

俄罗斯数学
教材选译

随机过程论

□ A.B. 布林斯基　A.H. 施利亚耶夫　著
□ 李占柄　译

高等教育出版社
Higher Education Press

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重

版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

前 言

这本书是由作者们在莫斯科大学数学力学系不同年代讲稿的基础上所形成的.

在基础课概率论 (第 4 学期) 和数理统计 (第 5 学期) 的基础上, 是在第 6 学期学习随机过程的. 读者会发现这里所写的材料已经大大超出了本学期课程所讲的内容. 而我们进行扩充的目的就是要体现理论的各个方面的分支及其应用. 这里所述的一共八章的内容已经大大覆盖了标准的大纲. 一些重要结果的复杂技巧证明被放到 “附录” 中. 除此而外, 每章增添了 “补充和练习”. 这些材料可能对讨论班的作业及专业课程的准备是有用的.

随机过程的理论基础乃是 Kolmogorov 关于给定的有限分布族, 过程的存在性定理. 在他的经典小册子 [34] 中被称为 “基本定理”. 直到发表以前, 随机过程的研究都作为单个的随机变量族, 主要是从它们的有限维分布的性质来考虑的 (例如马氏过程的向前、向后方程). “基本定理” 给出了随机过程按照轨道来分析的可能性, 从而奠定了被称为现代随机分析方向的基础. 特别是, 本书对有限维分布相容性 Kolmogorov 定理是在极其广泛的条件下给出了证明, 并从不同的观点加以讨论. 给出了 Donsker – Prokhorov 不变原理, Strassen 形式重对数律的基本原理 (导致测度族的一般大偏差定理), 关于 Brown 运动嵌入到 Wiener 过程的 Skorokhod 定理, Brown 运动强马氏性的不同形式以及其他的深刻结果. 作为与理论相联系, 有趣的应用是借助鞅技巧所建立起来的保险数学的基本定理, 考虑具有一般马氏性的群众服务理论中著名 Erlang 公式的推导, 研究 Langevin 方程导出 Ornstein – Uhlenbeck 过程, 随机微分方程的基本理论等. 我们还可以发掘与其他数学领域的方法和结果有联系的研究问题, 例如, 用概率方法去解经典 Dirichlet 问题, 利用 Hilbert 空间工具来研究预报理论, 借助于函数理论的方法对 Kolmogorov – Szego 公式的证明. 同时给出了随机金融数学问题概念的初步表述.

随机过程是现代概率论中一个具有多方面应用的、正在广泛、蓬勃发展的分支. 因此, 尽管一再压缩书的内容, 但还是包括几乎 200 多词条的名称. 自然而然, 概率

论的资料也要作为教学参考书, 如 [85].

下面我们将较详细地介绍本书的结构.

在第一章给出了一些后面要用的基本概念的定义, 同时我们还建立了一系列辅助结果. 第二章研究了一类独立增量过程, 其中重要的代表就是 Brown 运动. 第三章完整地阐述了这类重要过程的性质. 在第四、六和七章分别介绍了鞅理论、马氏过程理论和平稳过程理论. 第五章包含了对于概率测度的弱收敛的一些结果, 其中包括随机过程轨道函数空间的测度. 第八章研究了随机积分 (主要是对 Brown 运动) 和随机微分方程的问题.

所有章都是分为许多节. 每一章的定义、推论、例子和公式都是重新标号, 且是单独的标记定义, 单独的标记定理, 等等. 这也包括"附录"在内. 在参考其他章(或附录) 的材料时, 要指出它们的标号, 例如, (Ⅱ, 10) 即第二章的公式 (10), 而 (6,2) 即附录 6 的公式 (2). 证明的最后要用符号 □. 在每一章的"补充与练习"和附录中的练习是对基本内容的延伸, 所标的号码放到相应内容的右边.

应该指出的是莫斯科大学数学力学系的一系列概率统计课程是在 A. N. Kolmogorov 和 B. V. Gnedenko 直接指导和影响下形成的, 他们多年来引导着概率论教研室的成长. 在我们手稿完成的过程中, 对交稿内容与教研室的同事和研究生进行了有益的讨论. 在此向他们表示我们衷心的谢意!

作者要向俄罗斯基础研究基金会对这套书的出版给予的财政支持表示感谢!

A. B. 布林斯基

A. H. 施利亚耶夫

莫斯科大学数学力学系概率论教研室

基本符号

:= — 定义符号,
$\mathbb{N}$ — 自然数集, $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$,
$\mathbb{Q}$ — 有理数集,
$\mathbb{Z}$ — 整数集,
$\mathbb{Z}_+$ — 非负整数集,
$\mathbb{R}$ — 实数集, $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$,
$\mathbb{C}$ — 复数集,
如果 $a,b\in\mathbb{R}$, 则 $a\wedge b=\min\{a,b\}, a\vee b=\max\{a,b\}, a^+=\max\{a,0\}, a^-=\max\{-a,0\}$,
$[a]$ — 数 a 的整数部分, sgn a — 数 a 的符号,
$\overline{A}$ — 集 A 的补集,
$\mathbf{1}_A$ — 集 A 的示性函数,
$[A]$ — 集 A 的闭包 (在距离空间中),
∂A — 集 A 的边界 (在距离空间中),
(S,ρ) — 带有距离 ρ 的距离空间 S,
$B_r(x)$ — 中心为 x 半径为 r 的闭球,
$C(T,\mathsf{S})$ — 在距离空间 T 上, 取值于距离空间 S 的连续函数空间,
$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ — 具有紧支集的无穷可微函数空间,
$\|\cdot\|_H$ — 巴拿赫 (Banach) (希尔伯特 (Hilbert)) 空间 H 的范数,
$(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ — 概率空间,
E — 数学期望,
D — 方差,
$\mathrm{cov}(X,Y)$ — 随机变量 X 和 Y 的协方差,
$\mathsf{E}(X|\mathscr{A})$ — 相对于 σ - 代数 $\mathscr{A}$, X 的条件数学期望,

$X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$ — 映射 X 相对于 σ - 代数 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{B}$ 是可测的,

$\sigma\{\mathscr{M}\}$ — 由某个空间 S (带有单位 S) 的子集族 $\mathscr{M}$ 所生成的最小 σ - 代数,

$\mathscr{B}(\mathsf{S})$ — 由拓扑空间中 S 的博雷尔 (Borel) 子集所生成的最小 σ - 代数,

$\mathscr{B}_T$ — 由可测空间 $X_t, t \in T$ 所生成乘积空间中柱集 σ - 代数,

P_X (PX^{-1} 或 $\mathrm{Law}(X)$) — 随机元 X 的分布,

$\sigma\{X_t, t \in T\}$ — 由随机元 $X_t, t \in T$ 所生成的最小 σ - 代数 (在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中),

$Q_n \Rightarrow Q$ — 测度 Q_n 弱收敛于测度 Q,

$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ — X_n 依分布收敛于 X,

$X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$ — X_n 依概率收敛于 X,

mes — 勒贝格 (Lebesgue) 测度,

$\mathsf{N}(a, C)$ — 具有中值为 a 和协方差阵 C 的正态分布,

$W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ — 维纳 (Wiener) 过程 (布朗 (Brown) 运动),

$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ — σ - 代数流 (滤基),

$\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t \in T}$ — 由过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 所生成的自然 σ - 代数流,

$P(s, x, t, B)$ — 马尔可夫过程的转移函数,

$p_{i,j}(t)$ — 齐次马尔可夫链的转移概率.

目录

《俄罗斯数学教材选译》序

前言

基本符号

第一章　随机过程. 随机过程的分布 1

随机过程论的研究对象, 一些问题. 随机元及其分布. 单调类定理. 概率空间的完全化. 可测映射的极限. 构造具有给定分布的独立随机变量族. 部分和过程, 经验测度, 更新过程, 克拉默－卢恩伯格保险模型, 泊松随机测度. 柱集 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_T$. 随机函数作为随机元族, 又可作为一个随机映射. 随机函数的有限维分布. 关于柯尔莫戈洛夫相容性定理. 空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上测度的特征函数. 用特征函数来表述在欧几里得空间(欧氏空间)上测度的相容性条件. 对无穷大 T, $\mathscr{B}_T$ 的描述. 连续轨道过程. 测度投影的相容性. 等价的随机函数. 可测过程.

第二章　独立增量过程. 泊松过程和高斯过程. 34

独立增量过程存在性准则. 泊松过程. 维纳过程 (布朗运动). 多维正态分布. 根据中值函数和相关函数构造实高斯函数. 复高斯过程. 作为相关函数, 又作为希尔伯特空间上的再生核的非负定函数. 帕尔赞定理. 布朗运动两种定义的等价性. 哈尔和绍德尔函数. 标准高斯变量序列的摆动. 构造连续维纳过程. 多维布朗运动.

第三章　布朗运动. 轨道性质 62

布朗运动 (维纳过程) 轨道的几乎处处不可微性. 维纳过程的马氏性. 滤基. 停时及它们的例子. 由停时 τ 以前, 所有观测的事件所组成的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_\tau$. 维纳过程的强

马氏性. 反射原理. $0-1$ 律. 在 $[0,t]$ 上维纳过程极大值的分布. 重对数律. 重对数局部律.

第四章 鞅. 离散与连续时间 92

鞅, 下鞅, 上鞅. 例子. 杜布分解. 补偿元. 田中公式离散变式. 滤基的扩充. 二次特征. 二次变差. 杜布的自由选择定理. 应用到随机游动 (破产问题). 杜布的下鞅极大、极小不等式. 关于穿越数引理. 下鞅收敛定理. 高尔顿 – 沃森分支过程. $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ 空间中鞅收敛定理. 莱维定理. 保险数学的基本定理. 具有连续时间鞅和下鞅的一些不等式.

第五章 测度的弱收敛. 不变原理 128

度量空间上的测度弱收敛. 依分布随机元的收敛. 测度的弱收敛准则. 在连续映射下测度弱收敛的保守性. 在空间 $C(T,S)$ 中测度的弱收敛. 测度族的相对紧性 (弱列紧性) 和胎紧性. 普罗霍洛夫定理. 唐斯克尔 – 普罗霍洛夫不变原理. 林德伯格多维中心极限定理. 独立随机变量和的极大值引理. 柯尔莫戈洛夫(拟合优度) 检验证明的步骤. 作为条件维纳过程的布朗桥. 一个概率空间的方法, 斯科罗霍德定理. 弱收敛的度量化. 莱维 – 斯科罗霍德距离.

第六章 马尔可夫过程. 离散与连续时间 160

马尔可夫过程的等价定义. 取值于 $\mathbb{R}^d$ 独立增量过程的马氏性. 例子. 马尔可夫链, 通过初始分布及转移概率构造马尔可夫链. 作为马尔可夫链的泊松过程. 马尔可夫过程的转移函数. 寻求 $d-$ 维布朗运动的转移函数. 马尔可夫过程的有限维分布, 它们通过初始分布及转移概率的表示. 时齐马尔可夫过程. 时齐马尔可夫链的遍历性定理. 一些推论. 不变测度. 随机半群 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ 的无穷小矩阵 Q. 柯尔莫戈洛夫向后、向前微分方程组. 作为 Q^* 矩阵的特征向量的平稳分布. 埃尔朗公式. 导出这些公式的群众服务系统的模型.

第七章 平稳过程. 离散与连续时间 203

正交随机测度及其 $\sigma-$ 有限构造 (均方) 测度. 根据给定的构造 (均方) 测度来构造正交随机测度. 对正交随机测度的积分及其性质. 关于相关函数谱分解卡鲁宁定理以及用对正交随机测度的积分来表示该过程. 广义平稳过程及其相关函数. 赫格洛茨定理. 博赫纳 – 辛钦定理. 连续和离散时间平稳过程的谱表示. 在 $L^2(\Omega)$ 空间中的遍历性. 滑动平均过程. 相关函数及谱密度的统计估计. 线性预测问题. 规则和奇异过程. 沃尔德分解. 规则过程作为物理上可实现的滤波器. 规则过程的柯尔莫戈洛夫准则. 柯尔莫戈洛夫 – 塞格定理.

第八章 随机积分. 随机微分方程 250

简单随机函数对维纳过程的随机积分. 对适应博雷尔可测随机函数的伊藤随机积分的构造. 随机积分的性质. 伊藤变量替换公式. 朗之万方程. 奥恩斯坦 – 乌伦贝克过程. 随机微分方程强解的存在、唯一性定理. 随机微分方程解的马氏性.

附录 1 柯尔莫戈洛夫定理的证明 288

附录 2 普罗霍洛夫定理的证明 294

附录 3 林德伯格 – 杜布定理的证明 298

附录 4 博赫纳 – 辛钦定理的证明 307

附录 5 柯尔莫戈洛夫 – 塞格定理的证明 310

附录 6 布朗运动族的强马氏性的证明 315

附录 7 狄利克雷问题的概率解 325

附录 8 大偏差 336

后记 355

参考文献 357

索引 368

第一章

随机过程. 随机过程的分布

内容摘要: 随机过程论的研究对象, 一些问题. 随机元及其分布. 单调类定理. 概率空间的完全化. 可测映射的极限. 构造具有给定分布的独立随机变量族. 部分和过程, 经验测度, 更新过程, 克拉默 (Cramer) – 卢恩伯格 (Luenberger) 保险模型, 泊松 (Poisson) 随机测度. 柱集 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$. 随机函数作为随机元族, 又可作为一个随机映射. 随机函数的有限维分布. 关于柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 相容性定理. 空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上测度的特征函数. 用特征函数来表述在欧几里得 (Euclid) 空间 (欧氏空间) 上测度的相容性条件. 对无穷大 T, $\mathscr{B}_T$ 的描述. 连续轨道过程. 测度投影的相容性. 等价的随机函数. 可测过程.

§1. 现代概率论最重要的特点就是它的方法与结果不仅自身有着独立的数学意义, 而且在其他科学领域中可以找到各种各样的应用, 例如物理, 化学, 生物, 金融数学等, 甚至于在技术领域中. 这也是被人称作“随机过程”的它为什么会成为概率论一个专门分支的一种解释.

概率论最初涉及的只是随机实验 (抛硬币, 掷骰子等), 为此要计算可能发生的这样或那样事件的概率. 随后, 产生了随机变量的概念, 这样就可以定量地描述随机实验的结果, 例如, 在抽奖中, 赢利的多少等. 到后来, 在随机实验中明确地引进了时间因子, 于是就有了严格地建立随机模型的可能性, 在此基础上, 人们就可以用随机过程来描绘随机现象演化的动力学模型.

在 1827 年, 植物学家布朗 (R. Brown) 在显微镜下发现了水中花粉颗粒的随机运动. 这种自然现象中的运动, 后被称为布朗运动, 很长一段时间都解释不清. 仅仅在 19 世纪末至 20 世纪初才被认识, 它是介质原子和分子的一种热运动现象. 同时为了描绘类似形式的过程, 客观上需要通过概率 – 统计的理论来解决. 布朗运动以及更广的

扩散过程的数学和物理模型是由巴舍利耶 (Bachelier), 爱因斯坦 (Einstein), 斯莫卢霍夫斯基 (Smoluhowski), 奥恩斯坦 (Ornstein), 普朗克 (Planck), 朗之万 (Langevin), 福克尔 (Fokker), 维纳 (Wiener), 莱维 (Levy), 柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov), 勒俄多诺维奇 (Leodonowicz) 和其他学者所建立的. 在 1997 年默顿 (Merton) 和舒尔斯 (Scholes) 将布朗运动应用于经济模型当中, 该成果获得了诺贝尔奖.

在系统地叙述随机过程的教程之前, 将提出一些具体的, 然而本身又是很重要的问题和习题, 其中的大部分在本书中都将涉及.

1° 我们将利用对布朗运动泛函的研究来证明一个数理统计的基本结果, 即著名的 Kolmogorov *相容性准则*. 此外, 借助于 Brown 运动如何来解决重要的 "非随机" 问题, 如 狄利克雷 (Dirichlet) *问题*: 寻找在区域 $G \subset \mathbb{R}^d$ 内调和, 并且在该区域的边界上具有给定函数的解 (以后我们还会给予详细的讨论).

2° 前面所提到的扩散模型刺激了*随机微分方程的发展*, 随后的研究要求一种特殊的工具 —— "随机分析". 这种特殊性是与 Brown 运动的轨道 (它是连续的, 但无论在哪一点上又都不可微) 相关的. 类似的方程还能用于, 例如, 在实际应用中借助它的帮助给出了非常有效的方法 (映像的恢复, 有线和无线广播, 形象识别等), 从杂乱无章背景 (干扰) 中提取有用的信号.

3° 对许多的实际问题来说, 显然有着十分重要意义的是*预报问题*: 观测在时间 t 以前随机过程的基础上来预测在时刻 $t+s(s>0)$ 的行为. 产生这样的问题, 例如, 在金融市场上分析有价证券的行情走势, 与此相关的而且非常有趣的是期权的*套期保值问题* (当这支股票的真实价格受到随机扰动情况下, 在未来的某个时刻, 根据以前确定的价格买入 — 卖出股票的模型).

4° 保险公司自身提出的任务: 在随机的时刻支付, 且支付多少也是随机的时候, 来配置固定的资金 (将包括投保者的保险费在内). 如何来刻画这样的随机时刻呢? 事实表明, 泊松过程与此极为相类似, 后面将会仔细研究. 我们指出在 Cramer – Luenberger 保险模型中, 为使公司破产的概率不超过给定的 (小的) 数 ε 前提下, 模型中的参数之间应该具有什么样的关系.

5° 最后, 我们将提到各种各样随机现象的渐近分析问题. 作为例子, 可以想象在模型中, 比如说电话局, 呼叫是在随机的时刻到来, 并且呼叫者谈话的时间长短也是随机的, 当发生了 "很长时间" 呼叫的时候, 它的*埃尔朗* (Erlang) *公式*.

应该强调的是, 在 3°~5° 中, 我们涉及了两种类型的问题. 第一, *要求建立能反映所研究现象实际的数学模型*, 第二, *要求准确地提出问题, 然后解决该问题*. 为此, 自然要求有足够深厚发展的理论. 在熟识这个理论的时候, 我们既会看到许多诱人去研究的随机过程类型, 又会接触到描绘和研究它们的各种各样的方法.

第一章将给出许多技术性的, 且具有辅助性特点的知识. 在阅读以后各章时, 为解释一些问题, 最好还能回顾它们. 在初次阅读时, 可以局限于随机元的概念 (§2), 它的分布 (§6), 随机函数的定义 (§7) 和例子 (§9), 这些例子是基于独立随机元序列

(§8). 同时要求根据 Kolmogorov 定理 (§12), 掌握构造具有给定相容的所有有限维分布的随机变量族. 为了构造在第二章中的独立增量过程和实 Gauss 过程, 利用了前面所提到的, 用随机向量特征函数 (§15) 来表述的相容性条件.

§2. 以后凡涉及的概率都将是假定满足于 Kolmogorov 公理化的某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 也就是具有概率测度 P 的可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上. 注意到可测空间是由某个集和由该集子集所组成的 σ - 代数 (一般用手写的字母来表示) 所组合而成的. 定义在可测空间中的某个 σ - 代数上非负可列可加集函数称作测度. 在某些场合, 当需要强调测度的特殊性质时, 例如它的有限性或 σ - 有限性, 我们经常会特别强调. 概率测度 P, 或简单的概率 —— 这是满足于 $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ 的测度. 为了简便, 经常也将概率测度称作测度.

首先, 我们需要取值于 (抽象) 集合 S 的随机变量的概念. 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和 $(S, \mathscr{B})$ 是可测空间 $(\Omega \neq \varnothing, S \neq \varnothing)$.

定义 1. 映射 $X : \Omega \to S$ 称作 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测的 (记作 $X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}$), 如果 $X^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$, 即对任意的 $B \in \mathscr{B}$, 有 $X^{-1}(B) := \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$.

在概率论中, $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测映射通常称作随机元或取值于 S 的随机变量.

对 S 的子集类 $\mathscr{M}$ 来说, $\sigma\{\mathscr{M}\}$ 表示带有单位元 S, 且包含 $\mathscr{M}$ 的最小 σ - 代数. 如果 S 是拓扑空间, 特别的是距离空间, 则, 根据定义, Borel σ - 代数 $\mathscr{B}(S)$ 是 σ - 代数 $\sigma\{\mathscr{M}\}$, 其中 $\mathscr{M}$ 是 S 中所有开集类. 当 $S = \mathbb{R}^k$ (具有欧氏距离), $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ 和 $k > 1$, 随机元 $X(\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测) 称作随机向量, 而当 $k = 1$ 时, 则称作 (实) 随机变量. 当 X 是空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上实随机变量, 则 X 的 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ - 可测性, 作为规定, 简称 $\mathscr{F}$ - 可测性.

引理 1. 设 $X : \Omega \to S$ (映射 X 不假设对任何 σ - 代数可测) 和 $\mathscr{M}$ 是 S 的某个子集类. 这时 $X \in \mathscr{A}|\sigma\{\mathscr{M}\}$, 其中 $\mathscr{A} := \sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\}$. 此外有 $\sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\} = X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$.

证. 很容易看出, 集合类 $\mathscr{D} = \{D \subset S : X^{-1}(D) \in \mathscr{A}\}$ 是 σ - 代数, 因为 $\mathscr{A}$ 是 σ - 代数, 并且是由映射原像集组成, 满足抽象集合的运算律. 根据构造 $\mathscr{M} \subset \mathscr{D}$, 因此 $\sigma\{\mathscr{M}\} \subset \mathscr{D}$, 这就是说 $X \in \mathscr{A}|\sigma\{\mathscr{M}\}$, 即 $X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\}) \subset \mathscr{A}$. 另一方面, $X^{-1}(\mathscr{M}) \subset X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$, 并且 $X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$ 是 σ - 代数, 因此 $\mathscr{A} = \sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\} \subset X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$. 这样有 $\mathscr{A} = X^{-1}(\sigma\{\mathscr{M}\})$. □

推论 1. 假设在引理 1 的条件中, 附带有 Ω 上的 σ - 代数 $\mathscr{F}$. 如果 $X^{-1}(\mathscr{M}) \subset \mathscr{F}$, 则 $X \in \mathscr{F}|\sigma\{\mathscr{M}\}$.

证. 考虑到 $\sigma\{X^{-1}(\mathscr{M})\} \subset \mathscr{F}$, 利用引理 1 可证. □

推论的思想在于当 $\mathscr{B}=\sigma\{\mathscr{M}\}$ 时, 为了证明 X 的 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测性, 必须考虑 $\mathscr{B}$ 中所有集合的原像, 而这时只须考虑 $\mathscr{M}$ 中所有集合 $B, X^{-1}(B)\in\mathscr{F}$ 就足够证明. 正是如此, 在定义取值于 $\mathbb{R}^k$ 中的随机向量时, 只须要求对任意的 $z=(z_1,\cdots,z_k)\in\mathbb{R}^k$, 集合 $\{\omega: X(\omega)\leqslant z\}:=\{\omega: X_1(\omega)\leqslant z_1,\cdots,X_k(\omega)\leqslant z_k\}\in\mathscr{F}$ 就足够了. (请解释)

注 1. 值得注意的是, 不仅仅是由集合产生 σ - 代数, 而且还可以由函数产生. 符号 $\mathscr{A}=\sigma\{X_t, t\in T\}$, 这里 $X_t:\Omega\to S_t, (S_t,\mathscr{B}_t)$ 是可测空间, $t\in T$, 表示包含对每个 $t\in T$ 使得 $X_t\in\mathscr{A}|\mathscr{B}_t$, 集合 Ω 中的子集所产生的最小 σ - 代数. 显而易见 $\mathscr{A}=\sigma\{X_t^{-1}(B_t): B_t\in\mathscr{B}_t, t\in T\}$, 并且如果 $X_t\in\mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ 对每个 $t\in T$, 则有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$.

§3. 除 σ - 代数之外我们不得不涉及更狭的一类集合. 称 S 的子集类 $\mathscr{C}$ 为 π - 系, 如果对有限交封闭, 即如果 $A,B\in\mathscr{C}$, 则 $A\bigcap B\in\mathscr{C}$ (对 $\mathscr{C}$ 中的元素, 通常是补充了集合 S). 定义 S 子集类 $\mathscr{D}$ 为 λ - 系, 如果是满足如下性质的子集类: $S\in\mathscr{D}$ 和如果 $A,B\in\mathscr{D}, A\subset B$ 则 $B\backslash A\in\mathscr{D}$, 此外, 如果 $A_n\in\mathscr{D}, n\in\mathbb{N}$ 和 $A_n\uparrow A$ (即 $A_n\subset A_{n+1}, n\in\mathbb{N}$ 和 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$), 则 $A\in\mathscr{D}$. 对任意 S 的子集类 $\mathscr{K}$ 都存在包含 $\mathscr{K}$ 的最小 π - 系 $\pi\{\mathscr{K}\}$ (请解释) 和包含 $\mathscr{K}$ 最小 λ - 系 $\lambda\{\mathscr{K}\}$. S 的子集类 $\mathscr{M}$ 是 σ - 代数当且仅当 $\mathscr{M}$ 是 π - 系又是 λ - 系.

定理 1 (单调类定理). 设空间 S 的子集类 π - 系 $\mathscr{C}$ 和 λ - 系 $\mathscr{D}$, 且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{D}$. 这时有 $\sigma\{\mathscr{C}\}=\lambda\{\mathscr{C}\}\subset\mathscr{D}$.

证. 不失一般性, 可以设 $\mathscr{D}=\lambda\{\mathscr{C}\}$, 这时只要验证 $\mathscr{D}$ 是 π - 系. 因为这时 $\mathscr{D}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ - 代数. 这样要验证, 如果 $A,B\in\mathscr{D}$, 则 $A\bigcap B\in\mathscr{D}$. 固定任意集合 $B\in\mathscr{C}$, 定义集合类 $\mathscr{F}_B=\{A\subset S: A\bigcap B\in\mathscr{D}\}$. 这时 $\mathscr{F}_B$ 是 λ - 系, 并且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}_B$. 因此 $\mathscr{D}=\lambda\{\mathscr{C}\}\subset\mathscr{F}_B$. 从而, 对任意的 $A\in\mathscr{D}$ 和 $B\in\mathscr{C}$ 有 $A\bigcap B\in\mathscr{D}$. 现取任意的 $A\in\mathscr{D}$, 研究集合类 $\mathscr{G}_A=\{B\subset S: B\bigcap A\in\mathscr{D}\}$. 对每个 $A\in\mathscr{D}$, 类似方法可以证明 $\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_A$. 这样, $\mathscr{D}$ 对有限交封闭, 于是有 $\sigma\{\mathscr{C}\}\subset\lambda\{\mathscr{C}\}$, 而 $\lambda\{\mathscr{C}\}\subset\sigma\{\mathscr{C}\}$ 是显然的. □

定理 1 的证明是谢尔品斯基 (Sierpinski) 给出的, 在概率中这个结果得到广泛的应用是与邓肯 (Dynkin) 的工作分不开的. 因此 λ - 系也称作 Dynkin 系或 $\mathscr{D}$ - 系.

前面所说的单调类定理, 对下面的一些结论的证明是非常有用的.

引理 2. 设可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上, 给定测度 P 和 Q, 并且 $\mathscr{F}=\sigma\{\mathscr{C}\}$. 这里 $\mathscr{C}$ 是 Ω 的子集类组成的 π - 系. 则在 $\mathscr{F}$ 上 $\mathsf{P}=\mathsf{Q}$ 的充分必要条件是在 $\mathscr{C}$ 上有 $\mathsf{P}=\mathsf{Q}$.

证. 必要性是显而易见的. 充分性是因为所有满足 $\mathsf{P}(A)=\mathsf{Q}(A)$, $\mathscr{F}$ 中的集合类构成一个 λ - 系. □

引理 3. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是概率空间, 而 $\mathscr{A}$ 是某个由 $\mathscr{F}$ 的子集组成的代数. 这时对任意的 $C\in\sigma\{\mathscr{A}\}$ 则有

$$\inf_{A\in\mathscr{A}}\mathsf{P}\{C\triangle A\}=0 \tag{1}$$

这里 $C\triangle A=(C\backslash A)\bigcup(A\backslash C)$. 从而对每个 $C\in\sigma\{\mathscr{D}\}$和任意的 $\varepsilon>0$ 都存在 $A_\varepsilon\in\mathscr{A}$ 使得 $\mathsf{P}(C\triangle A_\varepsilon)<\varepsilon$, 由此可得 $|\mathsf{P}(C)-\mathsf{P}(A_\varepsilon)|<\varepsilon$.

证. 对代数 $\mathscr{A}$ 中任意 A, 满足关系式 (1) 组成 π – 系. 而不难验证, 所有满足 (1) 式的集合类组成 λ – 系. 根据定理 1 结论得证. □

引理 4 (测度的正则性). 设 S 是距离空间, Q 是 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的测度. 这时对任意的 Borel 集 B, 有

$$\mathsf{Q}(B)=\sup_F\mathsf{Q}(F)=\inf_G\mathsf{Q}(G), \tag{2}$$

这里上确界是取自对所有的闭集 $F\subset B$, 而下确界是取自对所有的开集 $G\supset B$.

证. 设 ρ 是空间 S 的距离, 并且 $\rho(x,D)=\inf\{\rho(x,y):y\in D\}$, 这里 $x\in\mathsf{S},D\subset\mathsf{S}$. 对 $\delta>0$ 和闭集 F, 设 $F^\delta=\{x\in\mathsf{S}:\rho(x,F)<\delta\}$. 不难验证 F^δ 是开集, 并且当 $\delta\downarrow 0$ 时, $F^\delta\downarrow F$. 因此, 对任意的闭集 B, (2) 式成立. 对 (2) 式成立的所有 Borel 集 B 构成一个 σ – 代数 (请证明, 参见 [2; p.16]). 由于 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 是包含所有 S 的闭子集的最小 σ – 代数, 引理的结论得证. □

§4. 以后我们经常不得不利用已知概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的完全化. 设 $\mathscr{N}$ 是 Ω 中满足 $C\in\mathscr{N}\Leftrightarrow\exists D\in\mathscr{F}:C\subset D$ 和 $\mathsf{P}(D)=0$的子集类. $\overline{\mathscr{F}}$ 是形如 $A\bigcup C$ 子集类, 这里 $A\in\mathscr{F}$ 和 $C\in\mathscr{N}$. 很容易验证 $\overline{\mathscr{F}}$ 是 σ – 代数 (称作 $\mathscr{F}$ 关于测度 P 的完全化 σ – 代数). 根据

$$\overline{\mathsf{P}}(A\textstyle\bigcup C)=\mathsf{P}(A),\quad \text{这里 } A\in\mathscr{F} \text{ 和 } C\in\mathscr{N}, \tag{3}$$

于是有, 在 σ – 代数 $\overline{\mathscr{F}}$ 上测度 P 的扩张 (就是说 $\mathscr{N}$ 中的集合具有 0 测度). 如果 $F=A\bigcup C=B\bigcup D$, 这里 $A,B\in\mathscr{F}$ 和 $C,D\in\mathscr{N}$, 则 $\overline{\mathsf{P}}(F)=\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(B)$, 不难看出 $\overline{\mathsf{P}}$ 是一个在 $\overline{\mathscr{F}}$ 上完全确定的测度.

空间 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mathsf{P}})$ 称作概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的完全化 (关于测度 P). 不作特别声明, 一般地在开始时都已经完全化了, 将都用 $\mathscr{F}$, P 来代替 $\overline{\mathscr{F}},\overline{\mathsf{P}}$ (此时, $\mathscr{N}$ 就是所有 0 概率的事件类). 如果 σ – 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$ 则一般地同样也补充了 $\mathsf{P}-0$ 子集类 $\mathscr{N}$, 因此, 得到扩张的 σ – 代数 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}=\mathscr{A}\bigcup\mathscr{N}$ (与 (3) 式一样地在 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}$ 上测度的扩张). 很容易看出 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}=\sigma\{\mathscr{A},\mathscr{N}\}$. 值得注意的是, 如果取从 σ – 代数 $\mathscr{F}$ 到 σ – 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$ 上的测度 P 的压缩 $\mathsf{P}|_{\mathscr{A}}$, 并且关于测度 $\mathsf{P}|_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{A}$ 完全化, 则一般地说, 所得到的 σ – 代数要在 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}$ 中. 当概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是固定的, 则用 $\overline{\mathscr{A}}$ 表示 $\mathscr{A}^{(\mathsf{P})}$.

§5. 在各式各样随机元的逼近问题中, 下面的结论起着决定性的作用.

引理 5. 设 $(M,\mathscr{G})$ 是可测空间, (S,ρ) 是具有距离 ρ 的距离空间和 Borel σ - 代数 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$. 设 $h_n: M\to\mathsf{S}, h_n\in\mathscr{G}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 对 $n=1,2,\cdots$, 并且对每个 $x\in M$ 有 $h_n(x)\xrightarrow{\rho}h(x)$, 当 $n\to\infty$ 时有 $\rho(h_n(x),h(x))\to0$. 这时 $h:M\to\mathsf{S}$ 是 $\mathscr{G}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$ - 可测映射.

证. 对任意的闭集 $B\in\mathscr{B}(\mathsf{S})$

$$\{x:h(x)\in B\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant m}^{\infty}\{x:h_n(x)\in B^{(1/k)}\}\in\mathscr{G},$$

这里 $B^{(\varepsilon)}=\{x\in\mathsf{S}:\rho(x,B)<\varepsilon\},\rho(x,B)=\inf\{\rho(x,y):y\in B\}$. 因此根据推论 1 得要的结论. □

引理 6. 与引理 5 的区别是设在 $(M,\mathscr{G})$ 上给定测度 P 和当 $n\to\infty$ 时, $h_n(x)\xrightarrow{\rho}h(x)$ 关于 $x\in M$, P - 几乎所有的 (即 $\mathsf{P}(x\in M:h_n(x)\overset{\rho}{\nrightarrow}h(x),n\to\infty)=0$). 这时 h 是 $\overline{\mathscr{G}}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$ - 可测映射, 这里 $\overline{\mathscr{G}}$ 是 $\mathscr{G}$ 关于测度 P 的完全化.

证. 设当 $n\to\infty$ 时, 对 $x\in M_0, h_n(x)\to h(x)$, 这里 $\mathsf{P}(M_0)=1$. 取点 $z_0\in\mathsf{S}$ 和定义 $\widetilde{h}_n(x)=h_n(x)$ 对 $x\in M_0,\widetilde{h}_n(x)=z_0$ 对 $x\in M\backslash M_0, n\in\mathbb{N}$. 这时 $\widetilde{h}_n(x)\to\widetilde{h}(x)$ 对所有的 $x\in M$, 这里, 当 $x\in M_0$ 时有 $\widetilde{h}(x)=h(x)$, 当 $x\in M\backslash M_0$时有 $\widetilde{h}(x)=z_0$. 显然, $\widetilde{h}_n\in\mathscr{G}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$. 由引理 5 得出 $\widetilde{h}$ 是 $\mathscr{G}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$ - 可测映射. 现在对任意的 $B\in\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 计算它的原像

$$h^{-1}(B)=\{M_0\bigcap\widetilde{h}^{-1}(B)\}\bigcup\{(M\backslash M_0)\bigcap h^{-1}(B)\}\in\overline{\mathscr{G}},$$

因为 $M_0\in\mathscr{G},\widetilde{h}^{-1}(B)\in\mathscr{G}$ 和

$$\{(M\backslash M_0)\bigcap h^{-1}(B)\}\subset(M\backslash M_0),\quad 而\quad \mathsf{P}(M\backslash M_0)=0.\quad \square$$

引理 7. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是完全化的概率空间和 σ - 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$. 实随机变量 $Y(\omega)$ 是 $\overline{\mathscr{A}}$ - 可测的当且仅当可以找到 $\mathscr{A}$ - 可测随机变量 $Z(\omega)$ 使得 $Y=Z$ (P - 几乎处处), 即 $\mathsf{P}(\omega\in\Omega:Y(\omega)\neq Z(\omega))=0$.

证. 设 $Y\in\overline{\mathscr{A}}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 取 "简单函数"

$$Y_n(\omega)=\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}kn2^{-n}\mathbf{1}_{\{\omega:Y(\omega)\in(kn2^{-n},(k+1)n2^{-n}]\}}(\omega),\quad n\in\mathbb{N},\tag{4}$$

这里, 和通常一样, $\mathbf{1}_B(\cdot)$ 是集合 B 的示性函数,

$$\mathbf{1}_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B,\\ 0, & x\notin B\end{cases}\tag{5}$$

(经常用符号 $\mathbf{1}_B(x)$ 来代替 $\mathbf{1}\{B\}$).

显然, 当 $n\to\infty$, 对所有的 $\omega\in\Omega, Y_n(\omega)\to Y(\omega)$, 并且 $Y_n\in\overline{\mathscr{A}}|\mathscr{B}(\mathbb{R}), n\in\mathbb{N}$. 根据 σ – 代数 $\overline{\mathscr{A}}$ 的定义有

$$\{\omega: Y(\omega)\in(kn2^{-n},(k+1)n2^{-n}]\}=A_{n,k}\bigcup C_{n,k},$$

这里 $A_{n,k}\in\mathscr{A}, C_{n,k}\in\mathscr{N}(k=-2^n,\cdots,2^n-1, n\in\mathbb{N})$, 设 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=-2^n}^{2^n-1}A_{n,k}$. 这时 $A\in\mathscr{A}, \mathsf{P}(A)=1$. 定义

$$Z_n(\omega)=\mathbf{1}_A(\omega)\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}kn2^{-n}\mathbf{1}_{A_{n,k}}(\omega),\quad \omega\in\Omega,\quad n\in\mathbb{N}.$$

我们看出, 对 $\omega\notin A, n\in\mathbb{N}$ 有 $Z_n\in\mathscr{A}|\mathscr{B}(\mathbb{R}), Z_n=0$ 和当 $n\to\infty$ 时对 $\omega\in A$ 有 $Z_n(\omega)\to Y(\omega)$. 根据引理 5 有 $Z=\mathbf{1}_AY\in\mathscr{A}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 除此之外, $Z=Y$ (P – 几乎所有). 这样, 求得所要的随机变量 Z.

现设 $Z\in\mathscr{A}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和 $Y=Z$ (P – 几乎处处), 假设 $Z_n=Z, n\in\mathbb{N}$. 当 $n\to\infty$ 时, 有 $Z_n\to Y$ (P – 几乎处处), 根据引理 6 求得所要的随机变量 $Y\in\overline{\mathscr{A}}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. □

§6. 可测映射可以将测度由已知的空间导向另一个空间.

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 和 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 是可测空间, 并且在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上给定某个概率测度 P. 设 $X:\Omega\to\mathsf{S}$ 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ – 可测映射.

定义 2. 在 $\mathscr{B}$ 上的测度称作随机元 X 的概率分布或分布, 用 P_X 来表示, 如果由下面公式给出

$$\mathsf{P}_X(B):=\mathsf{P}(X^{-1}(B)),\quad B\in\mathscr{B}.\tag{6}$$

如果特别需要强调具体的测度 P 时, 那么 X 的分布用 $\mathsf{P}X^{-1}$ 来表示, 同样用 $\mathrm{Law}(X)$ 或 $\mathrm{Law}(X|\mathsf{P})$ 来表示. 测度 P_X 称作在可测映射 X 下测度 P 的像.

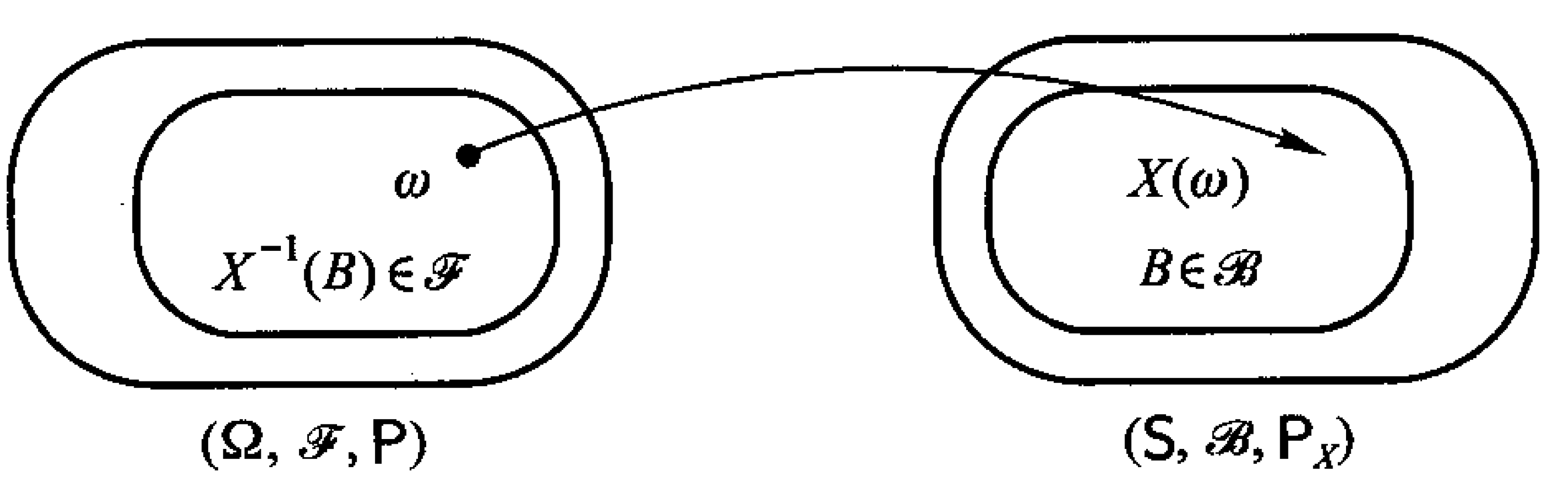


图 1

不难发现, 研究在给定的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上取值于 S 的 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ – 可测随机元的分布和研究在 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 上测度实质上是一样的. 事实上, 任何一个随机元 X 都可导出测度 P_X. 相反的结论是显而易见的.

引理 8. 在 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 上的任意概率测度 Q 都可以看作某个随机元 X 的分布.

为此, 只需要取 $\Omega = \mathsf{S}, \mathscr{F} = \mathscr{B}, \mathsf{P} = \mathsf{Q}$ 和 $X(\omega) = \omega$ (恒等映射). □

§7. 将引进对今后非常重要的概念 — 随机函数和与其相关的随机过程的概念.

定义 3. 在某个可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上, 对每个 $t \in T$ 给定随机元 $X(t)$, 则随机元族 $X = \{X(t), t \in T\}$ 被称作随机函数.

我们在这里指出重要的细节: 更准确地规定术语及相应的记号.

需要解释一下, 在给出的定义中, 所有的随机元 $X(t), t \in T$ 都是定义在同一个可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上. 但是, 为了有利于研究, 经常认为随机元 $X(t), t \in T$ 的值域可以是不同的. 准确地说, 给定一个可测空间族 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t), t \in T$. 这时, 引进的随机元族 $X = \{X(t), t \in T\}$ 可以看作定义在 $T \times \Omega$ 上的函数 $X = X(t, \omega)$, 并且对每个 $t \in T$ 取值于 S_t, 同时是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ - 可测映射 $(X(t, \cdot) : \Omega \to \mathsf{S}_t)$. 在这种意义下, 考虑到可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$, 函数 $X = X(t, \omega)$ 自然而然可以被称作随机函数.

对每一个 $t \in T$ 取值于实数的随机函数最简单例子是

$$X(t, \omega) = \xi(\omega) \cdot f(t),$$

这里 ξ 是在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的实随机变量, 而确定性函数 $f : T \to \mathbb{R}$. 在下一章中, 我们将看到由这种类型随机函数组成级数, 可以利用来描述 Brown 运动.

定义 4. 对固定的 ω, 函数 $X(\cdot, \omega)$ 或 $X(t, \omega), t \in T$, 称作轨道, 实现或样本函数.

在随机函数的符号中, 一般来说要省略自变量 ω, 简写为 $X(t)$ 或 X_t. 两种简写的利用要根据具体情况而定. 如果 $T \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, 则参数 $t \in T$ 可以解释为时间, 而随机函数称作随机过程. 当集合 T 为直线, 半直线, 线段, 区间或半区间, 则说是连续时间的随机过程, 而当 $T \subset \mathbb{Z} = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$, 则说是离散时间随机过程或随机序列. 如果 $T \subset \mathbb{R}^d, d > 1$, 则 X 称作随机场.

当随机过程 (场) $X = \{X_t, t \in T\}$ 仅仅研究是在有限或可数的子集 $T' \subset T$ 时, 经常采取将过程离散化. 例如代替 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 研究的是步长为 $\Delta > 0$ 的过程, 即过程 $Y = \{X_{n\Delta}, n = 0, 1, \cdots\}$.

这里值得一提的是, 研究定义在集 $T \subset \mathbb{R}^d, d > 1$ 上随机场时, 一般来说, 不能利用重排参数化的方法转化为研究随机过程 (甚至于, 当集合 T 与直线上的子集建立起一一对应). 问题在于, 在描述相关的随机变量类 $\{X_t, t \in U\}$ 和 $\{X_t, t \in V\}$ 的一系列问题中, 集合 $U, V \subset T$ 的几何位置起着实质性的作用.

为了用随机过程的术语表示任意的随机函数 (不仅是当 $T \subset \mathbb{R}$). 一般地说, 随机函数的分类是基于参数集 T 的构造或空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ 的形式, 并且在它们的乘积空间中有着这些函数的轨道, 但不是充满所有地方的. 事情是这样的, 在描述这些或那些现象时, 首先对过程 (被研究的) 的性质可能提出一些特殊的要求 (一般来说

会有交叉). 常见的随机函数类的例子, 像独立增量过程, Gauss 过程, 鞅等, 将在以下几章中研究.

§8. 现在, 假设给定某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, 为引入一系列随机过程的例子, 我们回顾一下事件 (或随机元) σ - 代数独立的概念.

定义 5. 集合类 (包含 Ω, 特别的是 σ -代数) $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n \subset \mathscr{F}$ $(n \geqslant 2)$ 称作*独立的* (**总体上**), 如果对任意的 $A_k \in \mathscr{A}_k, k = 1, \cdots, n$ 有

$$\mathsf{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathsf{P}(A_1) \cdots \mathsf{P}(A_n). \tag{7}$$

无穷多集合类的族 $\mathscr{A}_t \subset \mathscr{F}(\Omega \in \mathscr{A}_t), t \in T$ 称作*独立的*, 如果对所有的 $n \geqslant 2$ 和任意彼此互不相同的点 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 且对 $\mathscr{A}_{t_1}, \mathscr{A}_{t_2}, \cdots, \mathscr{A}_{t_n}$ 有 (7) 式.

引理 9. *设 $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \cdots, \mathscr{M}_n \subset \mathscr{F}(n \geqslant 2)$ 是独立的 π - 系. 这时 $\sigma\{\mathscr{M}_1\}, \cdots, \sigma\{\mathscr{M}_n\}$ 是独立的 σ - 代数. 如果是独立的 σ - 代数, 则它们 0 事件的扩张集合类 $\mathscr{N}$ 是独立的.*

证. 设 $\mathscr{D}_1$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子集类, 使得对任意的 $A_1 \in \mathscr{D}_1$ 和所有的 $A_k \in \mathscr{M}_k, k = 2, \cdots, n$, 满足 (7) 式. 显然, $\mathscr{D}_1$ 是 λ - 系, 并且 $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{D}_1$. 根据定理 1 得到 $\sigma\{\mathscr{M}_1\} \subset \mathscr{D}_1$. 类似地研究子集类 $\mathscr{D}_2$, 它是由事件 A_2 使得对所有的 $A_1 \in \sigma\{\mathscr{M}_1\}$ 和 $A_k \in \mathscr{M}_k$, 其中 $k = 3, \cdots, n$, 满足 (7) 式所组成. 同样道理, 导致引理的第一个结论.

第二个结论是显然的. 这是因为 σ - 代数 $\overline{\mathscr{G}}$ 中的任意事件 A, 是在增添子集类 $\mathscr{N}$ 到 σ - 代数 $\mathscr{G}$ 的扩张中, 都形如 $A = C \bigcup D$, 这里 $C \in \mathscr{G}$和 $D \in \mathscr{N}$. □

在给定的某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 对每个 $t \in T$ 取值于某个可测空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 的**随机变量族** $\{X_t, t \in T\}$ **(总体上) 独立**, 这就是说由它们所产生的 σ - 代数组 $\sigma\{X_t\} = X^{-1}(\mathscr{B}_t), t \in T$ 是独立的.

这样, 随机变量 $X_t, t \in T$ (集 T 至少包含两个点) 是*独立的*当且仅当对所有 $n \geqslant 2$, 任意不重复的 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 和任意集 $B_k \in \mathscr{B}_{t_k}, k = 1, \cdots, n$ 有

$$\mathsf{P}(X_{t_1} \in B_1, \cdots, X_{t_n} \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_{t_k} \in B_k). \tag{8}$$

与随机元独立概念相关的, 是下面很有意思的结果.

定理 2 (洛姆尼斯基 (Lomnicki) – 乌拉姆 (Ulam), [161]). *设 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ 是任意可测空间族, 且设对任意 $t \in T$ 在 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 上给出了测度 Q_t. 这时, 存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 和独立随机元族 $X_t: \Omega \to \mathsf{S}_t, X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$, 使得对每个 $t \in T$ 在 $\mathscr{B}_t$ 上有 $\mathsf{P}_{X_t} = \mathsf{Q}_t$.*

换句话说, 通常可以构造具有任意预先给定分布的*独立的*随机元族. 值得注意的是, 以 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 作为对所有的 $t\in T$ 的空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)$ 是不一样的. 有时, 在实际的研究会带来更方便 (参见例 6).

下面在 §12 中这个定理结果的注释与 Kolmogorov 定理 (定理 4) 的联系, 可参见习题 1.

§9. 以后, 我们不只一次看到, 着眼于*独立随机元序列*, 可以成功地构造出许多重要的过程. 现在就给出一系列这样的例子. 值得注意的是, 只要基本资料足够充分就可构造实独立随机变量序列, 如习题 2 和 3 所示的.

例 1. 设 $\xi_0,\xi_1,\cdots$ 是在某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上, 取值于空间 $\mathbb{R}^m(m\geqslant 1)$ 的独立随机向量. 随机过程 (具有离散时间)

$$S_n=\sum_{j=0}^{n}\xi_j,\quad n\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,\cdots\},\tag{9}$$

称作*随机游动*.

如果想象单个粒子在 0 时刻处在 ξ_0, 并且在每一时刻 (离散的) $n\in\mathbb{N}$ 都有位移量 ξ_n, 则向量 (n,S_n) 将给出这个粒子在时间和空间的坐标.

例 2. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是独立同分布、非退化、非负随机变量序列. 称作*更新过程*, 如果

$$X_0(\omega)=0,\quad X_t(\omega)=\sup\left\{n:\sum_{j\leqslant n}\xi_j(\omega)\leqslant t\right\},\quad t>0.\tag{10}$$

一般总假设, 若是在空集上取和, 则认为是 0, 因此, 如果 $\xi_1(\omega)>t$, 有 $X_t(\omega)=0$. 一般来说, 这样的随机变量 $X_t(\omega)$ 取值在 $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$, 这时 σ - 代数 $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 是由集 B 和集 $B\bigcup\{\infty\}$ 组成, 其中 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

下面来解释一下 "更新过程" 的名称直观含义. 假设从 $t_0=0$ 开始, 在时刻用来分割区间, 其长度为 ξ_j, 这时某个单元稳定性发生失常 (例如, 电子器件烧毁), 稳定性损坏, 并且瞬间损坏的单元被同样新的替换. 这时是在区间 $(0,t]$ 上总的替换 ("更新") 数量 X_t. 过程 $X=\{X_t,t\in\mathbb{R}_+=[0,\infty)\}$ 的轨道在图 2 给出.

例 3. $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是某个概率空间, $\{\xi_j,j\in\mathbb{N}\},\{\eta_j,j\in\mathbb{N}\}$, 两个非负随机变量序列, 且 $\{\xi_j,\eta_j,j\in\mathbb{N}\}$ 总体上独立和 $\mathrm{Law}(\xi_j)=\mathrm{Law}(\xi_1),\mathrm{Law}(\eta_j)=\mathrm{Law}(\eta_1),j\in\mathbb{N}$. 对给定的正常数 y_0,c, 定义过程

$$Y_t(\omega)=y_0+ct-\sum_{j=1}^{X_t(\omega)}\eta_j(\omega),\quad t\geqslant 0,\tag{11}$$

这里 $X_t(\omega)$ 是根据 (10) 式给出的. 在 Cramer – Luenberger 保险模型中用到形式

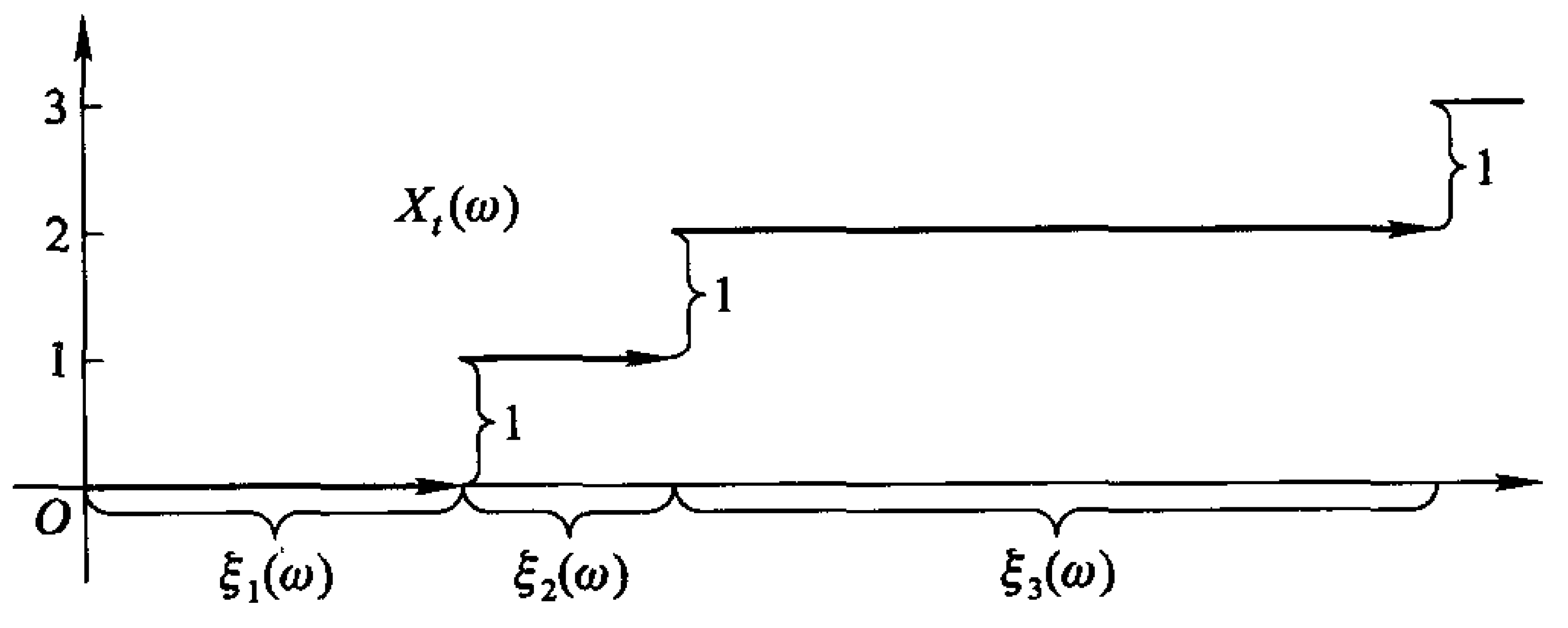


图 2

(11) 类型的过程 (参见, 例如 [86; p.99]), 这里 y_0 是公司初始资本, c 是保险费增加速率, η_j 是在随机时刻 $\tau_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \xi_i, (j \in \mathbb{N})$ 支付数量, 而 Y_t 直观上体现公司在时刻 t 的资本.

例 4. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 取值于 $\mathbb{R}^m (m \geqslant 1)$ 独立同分布随机向量. 引入经验测度

$$\mathsf{P}_n(B, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_B(\xi_j(\omega)), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

利用定义 3, 很容易看出对每个 $n \in \mathbb{N}$, 公式 (12) 给出一个以 Borel 集 B 为指标的过程, 即这里 $T = \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$.

可以从某个类 $\mathscr{H}$ 中取函数 f 来代替 (12) 式中的集示性函数 $\mathbf{1}_B$. 这时, 函数 f 应具有一定可测性, 给出了一个以函数族为指标的过程.

例 5. 设 $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ 是由取值于 $\mathbb{R}^m$ 独立同分布随机向量所形成的随机场. 设 μ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), d \geqslant 1$ 上 σ – 有限测度*) . 定义部分和过程

$$S_n(B, \omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \zeta_j(\omega) \mu(nB \bigcap C_j), \quad B \in \mathscr{B}([0,1]^d), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

这里 $C_j = (j-1, j] = (j_1 - 1, j_1] \times \cdots \times (j_d - 1, j_d]$ 是以 $j \in \mathbb{Z}^d$ 为上顶点的单位立方体, $nB = \{x = ny : y \in B\}$. 换句话说, 这里与 (9) 式的区别在于取和的加权形式不同.

例 6. 设 $\lambda (\lambda \neq 0)$ 是在某个可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 上的有限测度. 设 $Y, X_1, X_2, \cdots$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上独立随机元, 且 Y 是具有参数 $\lambda(\mathsf{S})$ 实 Poisson 随机变量, 而 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ – 可测独立同分布随机变量, 且当 $B \in \mathscr{B}$ 时, 有 $\mathsf{P}_{X_1}(B) =$

---

*) 在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 上, μ 是 σ – 有限测度, 如果有 $\mathsf{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{S}_n$, 这里 $\mathsf{S}_n \in \mathscr{B}, \mu(\mathsf{S}_n) < \infty$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$.

$\lambda(B)/\lambda(\mathsf{S})$, 由定理 2 可知, 这样构造是可能的 (值得注意的是, 这里涉及 Y 和 X_k 是取值于不同的空间). 在 $\mathscr{B}\times\Omega$ 上, 引入函数 $Z(B,\omega)$, 设

$$Z(B,\omega)=\sum_{j=1}^{Y(\omega)}\mathbf{1}_B(X_j(\omega)) \tag{14}$$

(当 $Y(\omega)=0$ 时, $Z(B,\omega)=0$). 公式 (14) 定义了被称作具有强度测度 (或导入测度) λ 的 Poisson 随机测度. 当 λ 是 σ - 有限测度时, 将在本书的附录中讨论.

§10. 现在我们研究以前给出的, 而且经常所遇到的随机函数的定义. 将随机函数 $X=\{X(t,\omega),t\in T\}$ 一方面想象为一族随机元 $X(t,\cdot),t\in T$, 另一方面更方便地想象为在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上一个随机元, 取值于由 T 上函数所构成的可测空间中.

这种思想是很简单的. 每一个 $\omega\in\Omega$ 都对应一条轨迹 $X(\cdot,\omega)$, 即根据

$$X(\omega):=X(\cdot,\omega) \tag{15}$$

引入映射 X.

既然我们随时都要与对象的可测性打交道, 那么就应该仔细分析由映射 (15) 所带来的可测性问题.

为此, 研究笛卡儿 (Descartes) 积 $\mathsf{S}_T=\prod_{t\in T}\mathsf{S}_t$ (当对所有 $t\in T$, $\mathsf{S}_t=\mathsf{S}$ 时, 也用 $\mathop{X}_{t\in T}\mathsf{S}_t$ 或 S^T 来表示), 它是由对 $t\in T$, $y(t)\in\mathsf{S}_t$ 在 T 上那样的函数 $y=y(t)$ 所组成. 每一个随机过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 的轨道是空间 S_T 上的元素.

我们将解释对每一个集合 $B\subset\mathsf{S}_T$ 的类 $\mathscr{M}$, 都有 $\{\omega:X(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$. 这时, 结论 1 保证 X 是 $\mathscr{F}|\sigma\{\mathscr{M}\}$ - 可测的.

引入基本柱集全体作为集合类 $\mathscr{M}$, 即如下形式的集合

$$C_T(t,B_t)=\{y\in\mathsf{S}_T:y(t)\in B_t\},$$

这里对 $t\in T,B_t\in\mathscr{B}_t$ (而 t 和 B_t 是变体). 形象化地说, 是由在点 t 通过 "大门" B_t 的那些函数 $y\in\mathsf{S}_T$ 所组成 (参见图 3).

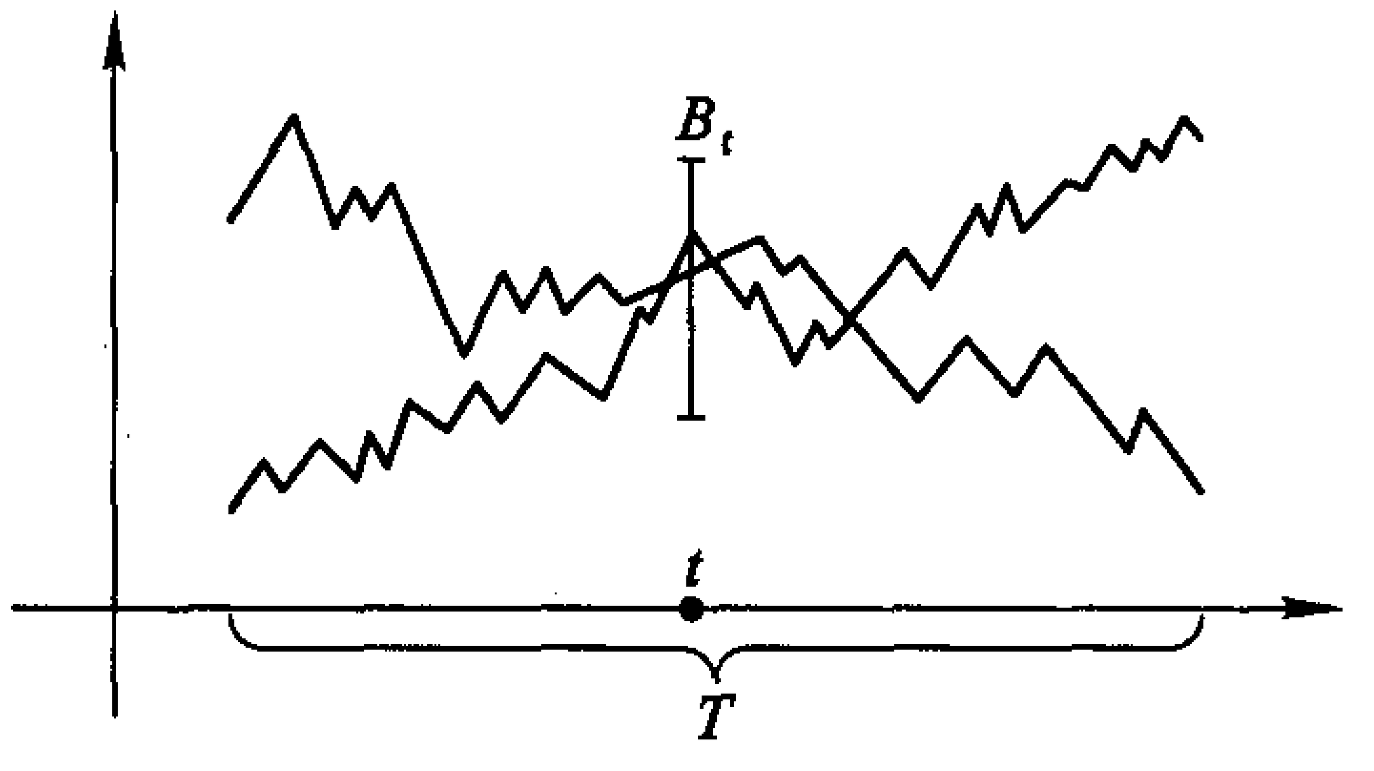


图 3

值得注意的是, 既然对每个 $t \in T, X(t,\cdot) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$, 于是有

$$\{\omega : X(\omega) \in C_T(t, B_t)\} = \{\omega : X(t,\omega) \in B_t\} \in \mathscr{F}.$$

引入下面的定义.

定义 6. 在空间 S_T 中, 由基本柱集类 $\mathscr{M}$ 所产生的 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 称作柱集 σ – 代数.

对 $\mathscr{B}_T$ 也用 $\bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}_t$ 来表示, 称作 σ – 代数 $\mathscr{B}_t, t \in T$ 的乘积 σ – 代数. 如果对所有 $t \in T, \mathsf{S}_t = \mathsf{S}$ 和 $\mathscr{B}_t = \mathscr{B}$, 则也可用符号 $\mathscr{B}^T$ 代替 $\mathscr{B}_T$.

根据结论 1, 由 (15) 式所给出的映射 X 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}_T$ – 可测的.

令人兴奋的是, 相反的结论也成立. 为此, 定义坐标映射 $\pi_{T,t} : \mathsf{S}_T \to \mathsf{S}_t$, 设

$$\pi_{T,t}y = y(t), \quad \text{这里} \quad t \in T, \quad y \in \mathsf{S}_T. \tag{16}$$

很容易看出, 对任意的 $t \in T$, 有 $\pi_{T,t} \in \mathscr{B}_T|\mathscr{B}_t$, 这是因为任意集合 $B_t \in \mathscr{B}_t$ 的原像都是空间 S_T 中的基本柱集. 根据注 1, 可以说, σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 是由一族坐标映射 $\pi_{T,t}, t \in T$ 所产生的, 即

$$\mathscr{B}_T = \sigma\{\pi_{T,t}^{-1}\mathscr{B}_t : t \in T\}, \quad \text{这里} \ \pi_{T,t}^{-1}\mathscr{B}_t = \{\pi_{T,t}^{-1}B_t : B_t \in \mathscr{B}_t\}. \tag{17}$$

显然, 对任意的 $t \in T$ 和 $\omega \in \Omega$ 有 $X(t,\omega) = \pi_{T,t}X(\omega)$. 复合的可测映射给出了一个可测映射 (相对于所对应的 σ – 代数). 于是有下面的定理.

定理 3. 随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的等价定义是映射 (15) 式是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}_T$ – 可测的. 换句话说, 族 $X = \{X(t), t \in T\}$ 是一族 $\mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ – 可测随机元 $X(t), t \in T$, 当且仅当映射 (15) 式是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}_T$ – 可测的.

值得注意的是, 在这个定理中, 没有涉及可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上任何概率测度 P.

显然, $\mathscr{B}_T$ 可以是由基本柱集的所有有限交所组成 π – 系所生成的.

由定理 3 得到, 每个随机函数 $X(t,\omega)$ 可看作为随机元 X, 它都诱导出在 $(\mathsf{S}_T, \mathscr{B}_T)$ 上的概率分布 P_X. 这样, 对属于 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 的集合 B, 可以说概率 $\mathsf{P}(\omega : X(\cdot,\omega) \in B)$.

§11. 设 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 是可测空间族. 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和任意彼此不重复的点 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 引入由形如 $B_{t_1} \times B_{t_2} \times \cdots \times B_{t_n}$, 这里 $B_{t_k} \in \mathscr{B}_{t_k}, k = 1, \cdots, n$ 的 **"矩形"** 所产生空间 $\mathsf{S}_{t_1,\cdots,t_n} = \mathsf{S}_{t_1} \times \cdots \times \mathsf{S}_{t_n}$ 上的最小 σ – 代数, 记作 $\mathscr{B}_{t_1,\cdots,t_n}$.

设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上与可测空间族 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 相应的随机函数. 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t_1, \cdots, t_n \in T$, 随机向量 $\xi = (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}_{t_1,\cdots,t_n}$ – 可测的映射, 这是因为根据推论 1, 有

$$\xi^{-1}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n}) = \bigcap_{k=1}^{n} \{X(t_k) \in B_{t_k}\} \in \mathscr{F}.$$

定义 7. 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t_1,\cdots,t_n\in T$, 在 $\mathscr{B}_{t_1,\cdots,t_n}$ 上, 随机向量 $(X(t_1),\cdots,X(t_n))$ 的分布所生成的测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 称作**随机函数** $X=\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布.

这样, 对 "矩形" $C=B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_n}$ 有

$$\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(C)=\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X(t_k)\in B_{t_k}\}\right). \tag{18}$$

由 (18) 式立刻可以得出, 对每个 $n\geqslant 2$, 所有的 $t_k\in T$ 和 $B_{t_k}\in\mathscr{B}_{t_k}(k=1,\cdots,n)$, 对 $(1,\cdots,n)$ 的任意置换 $(i_1,\cdots,i_n)$ 都满足下面的对称性和相容性条件:

1° $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_n})=\mathsf{P}_{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}}(B_{t_{i_1}}\times\cdots\times B_{t_{i_n}})$,

2° $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_{n-1}}\times \mathsf{S}_{t_n})=\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_{n-1}}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_{n-1}})$.

事实上, 因为 (18) 式右边不依赖于事件的交是什么样的次序, 从而 1° 成立, 而 2° 成立是因为 $\{X(t_n)\in\mathsf{S}_{t_n}\}=\Omega$.

不难发现, 条件 1° 和 2° 等价于条件 1° 和 3°, 这里条件 3° 是指, 如果对 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_n})$ 中任意 $m=1,\cdots,n$ 取 $B_{t_m}=\mathsf{S}_{t_m}$, 于是导致在其中 t_m 和 B_{t_m} 同时 "消失":

3° $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n}(B_{t_1}\times\cdots\times\mathsf{S}_{t_m}\times\cdots\times B_{t_n})=\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_{m-1},t_{m+1},\cdots,t_n}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_{m-1}}\times B_{t_{m+1}}\times\cdots\times B_{t_n})$.

注 2. 测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 的指标 $(t_1,\cdots,t_n)$, 一般是彼此不同的点 $t_1,\cdots,t_n$. 如果不是这样, 我们就可以简化为较 "短" 的向量, 它们是由彼此不同的点 $t_k\in T$ 所组成, 例如

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{t,t}(B'\times B'')&=\mathsf{P}(X_t\in B',X_t\in B'')=\mathsf{P}(X_t\in B'\textstyle\bigcap B'')\\&=\mathsf{P}_t(B'\textstyle\bigcap B'').\end{aligned}$$

§12. 定理 2 (Lomnicki – Ulam) 指出根据在可测空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t),t\in T$ 上定义的任意一个测度族 $\mathsf{Q}_t,t\in T$ 通常都可以构造 (唯一的) 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和独立 (依测度 P) 随机元族 $X_t=X_t(\omega),t\in T$ 使得 $\mathsf{P}_{X_t}=\mathsf{Q}_t$, 即 $\mathrm{Law}(X_t|\mathsf{P})=\mathsf{Q}_t$.

这里特别要指出的是下面两件事. 一方面, 在这定理中对空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t),t\in T$ 没有要求任何拓扑性质. 仅仅假设是可测空间. 另一方面, 这个定理没有给出是否能构造出概率空间和它上面的随机元族 $X_t,t\in T$ 使得随机元 $X_{t_1},\cdots,X_{t_n}$ 的联合分布与预先给定的概率分布 $\mathsf{Q}_{t_1,\cdots,t_n}$ 相重合. 定理 Lomnicki – Ulam 仅仅确定对测度 $\mathsf{Q}_{t_1,\cdots,t_n}$ 是 "一维" 分布 $\mathsf{Q}_{t_1},\cdots,\mathsf{Q}_{t_n}$ 的直积 ($n\geqslant 1$ 和 $t_1,\cdots,t_n$ 是集合 T 中彼此不同的点) 才能构造.

与此相关的是著名的 Kolmogorov 定理 (1933 年在他的德文版小册子 "概率论的基本概念" 中首次发表; 参见俄文版 [34]). 为了详细叙述该定理, 我们需要下面的定义.

定义 8. 可测空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 和 $(\mathsf{V},\mathscr{A})$ 称作同构的 (记作 $(\mathsf{S},\mathscr{B})\sim(\mathsf{V},\mathscr{A})$), 如果存在一一映射 $h:\mathsf{S}\to\mathsf{V}$, 使得 $h\in\mathscr{B}|\mathscr{A}$ 和 $h^{-1}\in\mathscr{A}|\mathscr{B}$. 如果 V 是 $[0,1]$ 区间上的 Borel 子集, 和 $\mathscr{A}$ 是 V 的 Borel 子集产生的 σ – 代数 (即 $\mathscr{A}=\mathsf{V}\bigcap\mathscr{B}([0,1])$), 则与其同构的可测空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 称作 Borel 空间.

注意, 拓扑空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 称作波利希 (Polish) 空间, 如果存在距离将 S 转化为完备可分距离空间. 例如具有欧氏距离的空间 $\mathbb{R}^m$ 是 Polish 空间. 众所周知 (参见, 例如 [41; 卷 1]), Polish 空间中任意 Borel 子集, 并且和由自己的 Borel 子集所生成的 σ – 代数是一个 Borel 空间.

定理 4 (Kolmogorov). 设 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 是 Borel 空间族. 并设在空间 $(\mathsf{S}_{t_1,\cdots,t_n},\mathscr{B}_{t_1,\cdots,t_n})$ 上, 这里 $n\in\mathbb{N}$ 和彼此不同的点 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$, 其上给定满足对称性和相容性条件 1° 和 2° 的测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ (参见 §11). 这时存在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和其上随机函数 $X=\{X(t),t\in T\}$ 使得 X 的有限维分布正是测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$.

证. 这个定理和与它等价形式的证明在附录 1 中给出. □

Kolmogorov 定理的最初形式是基于实随机变量的相容的有限维联合分布函数系来构造实随机变量族 $X_t,t\in T$ (任意集 T 的点作为指标). Kolmogorov 给出的证明包括了 (经适当变形) 前面我们所述的更一般的结果. 与此相关, 应该说的是, 如果 $T=\mathbb{N}$ 时, Kolmogorov 定理就变成了丹尼尔 (Daniell) 定理 (参见 [112]). 因此当 T 是任意集和任意 Borel 空间族 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 时, 定理也称作 Daniell – Kolmogorov 定理.

注 3. 设在集 $T\subset\mathbb{R}$ 上定义随机函数 $X=\{X(t),t\in T\}$. 这时根据条件 1° 可以对 $t_1<\cdots<t_n$ 的有限维分部进行研究. 另一方面假设在空间 $(\mathsf{S}_{t_1,\cdots,t_n},\mathscr{B}_{t_1,\cdots,t_n})$ 上给定测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$, 这里 $t_1<\cdots<t_n,t_k\in T\subset\mathbb{R},k=1,\cdots,n,n\in\mathbb{N}$. 如果这些测度满足条件 3°, 则根据 Kolmogorov 定理可以找到随机函数 $X=\{X(t),t\in T\}$, 使得对任意的指标向量 $(t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1<t_2<\cdots<t_n$, 它的有限维分布与测度 $\mathsf{P}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$ 相同.

§13. 我们还要给出今后用到的另一种关于测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 的对称性和相容性条件形式.

对 $n\geqslant 2,t_1,\cdots,t_n\in T$ 和指标 $(1,\cdots,n)$ 的一种置换 $(i_1,\cdots,i_n)$, 定义映射 $\psi_n:T^n\to T^n$ 和 $\Psi_n:\mathsf{S}_{t_1}\times\cdots\times\mathsf{S}_{t_n}\to\mathsf{S}_{t_{i_1}}\times\cdots\times\mathsf{S}_{t_{i_n}}$, 设

$$\psi_n(t_1,\cdots,t_n)=(t_{i_1},\cdots,t_{i_n}),\quad \Psi_n(x_1,\cdots,x_n)=(x_{i_1},\cdots,x_{i_n}).\tag{19}$$

引入映射 $\theta_n:T^n\to T^{n-1}$ 和 $\Theta_n:\mathsf{S}_{t_1}\times\cdots\times\mathsf{S}_{t_n}\to\mathsf{S}_{t_1}\times\cdots\times\mathsf{S}_{t_{n-1}}$,

$$\theta_n(t_1,\cdots,t_n)=(t_1,\cdots,t_{n-1}),\quad \Theta_n(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_{n-1}).\tag{20}$$

同样字母的大小写, 实质上是强调映射作用于不同的集合. 指标 n 在 (19) 式和 (20) 式中经常是不写出, 也不指出它们依赖的点 $t_1, \cdots, t_n$ 和 $x_1, \cdots, x_n$.

引理 10. 对每个 $n \geqslant 2$ 和所有的 $\tau = (t_1, \cdots, t_n)$, 这里 $t_1, \cdots, t_n$ 是集 T 中彼此不同的点. 测度 $\mathsf{P}_\tau = \mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 的对称性和相容性条件 1° 和 2° (或 1° 和 3°) 等价于下面两个条件:

(A) $\mathsf{P}_{\psi\tau} = \mathsf{P}_\tau \Psi^{-1}$ 和 (B) $\mathsf{P}_{\theta\tau} = \mathsf{P}_\tau \Theta^{-1}$.

证. 首先研究在空间 $\mathsf{S}_{t_1,\cdots,t_n}$ 上由 "矩形" $B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_n}$ 所组成的 π - 系, 这里 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T(n \in \mathbb{N})$, 然后利用引理 2 证明. □

§14. 在构造具有实值的随机过程中, 经常更方便地利用在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (具有 Borel σ - 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$) 上测度与它的特征函数之间的一一对应.

定义 9. 在 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上, 被称作测度 Q 的特征函数, 如果

$$\varphi_{\mathsf{Q}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\langle\lambda, x\rangle\}\mathsf{Q}(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

这里 $\langle\lambda, x\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, i^2 = -1$.

众所周知, (参见, 例如, [85; 第II章, §3]) 分布函数 $F(x) = \mathsf{Q}((-\infty, x])$ 这里 $(-\infty, x] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n], x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. 完全确定了在 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的测度 Q. 如果在点 x 上, 分布函数 $F = F(x)$ 是连续的, 则它的值是由它的特征函数的逆变换公式确定:

$$F(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\sigma\to 0+} \int_{(-\infty,x]} dy \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \exp\{-i\langle\lambda, y\rangle - \sigma^2|\lambda|^2/2\}\varphi_{\mathsf{Q}}(\lambda), \tag{22}$$

这里 $|\lambda|^2 = \langle\lambda, \lambda\rangle, d\lambda$ 和 dy 表示对勒贝格 (Lebesgue) 测度的积分 (参见, [85; 第 II 章, §12, 定理 3]). 若知道函数 $F = F(x)$ 在它的连续点上的值, 则完全确定了该函数 F. 这就是说, 特征函数完全确定了在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度 Q. 注意, 如果 $\varphi_{\mathsf{Q}} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), d\lambda)$, 则在 (22) 式中可以设 $\sigma = 0$ 而不是取 σ 的极限.

回顾 Lebesgue 积分的变量替换公式. 设 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}), (\mathsf{V}, \mathscr{A})$ 是可测空间, $g : \mathsf{S} \to \mathsf{V}$ 是 $\mathscr{B}|\mathscr{A}$ - 可测映射和 $h : \mathsf{V} \to \mathbb{R}^n, h \in \mathscr{A}|\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. 这时, 根据假设, 下面积分存在

$$\int_{\mathsf{S}} h(g(x))\mathsf{Q}(dx) = \int_{\mathsf{V}} h(y)(\mathsf{Q}g^{-1})(dy), \tag{23}$$

这里, 向量函数的积分是按坐标取的, 而测度 Q 是定义在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 上. (23) 式中的两个积分同时存在与不存在, 而如果存在, 则同时它们相等 (参见, [85; 第 II 章, §6]).

设在可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 上给定 σ - 有限测度 μ 和 ν. 测度 μ 称作**相对于测度** ν **绝对连续** (记作 $\mu \ll \nu$), 如果由于 $\nu(A) = 0$ 导致 $\mu(A) = 0$. 根据**拉东 (Radon)** –

尼科迪姆 (Nikodym) 定理 (参见, 例如, [35; p.405]). $\mu \ll \nu$ 当且仅当存在函数 $f \in L^1(\mathsf{S}, \mathscr{B}, \nu)$ 称作测度 μ 相对于测度 ν 的密度, 用 $d\mu/d\nu$ 来表示, 使得

$$\mu(A) = \int_A f(x)\nu(dx), \quad A \in \mathscr{B}. \tag{24}$$

众所周知, 当 $\mu \ll \nu$ 时, 对函数 $h : \mathsf{S} \to \mathbb{R}^n, h \in \mathscr{B}|\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 下面公式成立

$$\int_{\mathsf{S}} h(x)\mu(dx) = \int_{\mathsf{S}} h(x)f(x)\nu(dx), \tag{25}$$

这里两边积分是同时存在的 (此时它们彼此相等).

定义 10. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是概率空间. 随机向量 $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n (Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 的特征函数是

$$\varphi_Y(\lambda) = \mathsf{E}\exp\{i\langle\lambda, Y\rangle\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{26}$$

这里 E 是关于测度 P 取数学期望.

由公式 (21) 和 (23) 看出

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) &= \int_\Omega \exp\{i\langle\lambda, Y(\omega)\rangle\}\mathsf{P}(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i\langle\lambda, z\rangle\}\mathsf{P}Y^{-1}(dz) = \varphi_{\mathsf{P}_Y}(\lambda), \end{aligned} \tag{27}$$

即向量 Y 的特征函数与它的概率分布的特征函数相同.

§15. 设在空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 中测度族 $\mathsf{P}_\tau, \tau = (t_1, \cdots, t_n)$ 其中 $t_1, \cdots, t_n$ 是彼此不同的点 (任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 T 中的 $t_1, \cdots, t_n$), 用 $\varphi_\tau = \varphi_\tau(\lambda)$ 表示测度 P_τ 的特征函数.

如果测度 P_τ 是随机过程 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布, 这时 φ_τ 有如下的形式

$$\varphi_\tau = \mathsf{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^n X(t_k)\lambda_k\right\}, \quad \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

由此可见特征函数在向量 τ 和 λ 的坐标同时进行置换时不变, 并且特征函数 φ_τ 将在向量 τ 中 “消失” 的坐标用 0 代替 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 中相对应的变量, 可以得到 “较短” 向量 τ 及其特征函数 φ_τ.

可以证明, 这些简单的条件完全等价于测度的对称性和相容性条件 1° 和 2° (参见; §11).

定理 5. *在空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))_{n\geqslant 1}$ 中测度 $\mathsf{P}_\tau, \tau = (t_1, \cdots, t_n) \in T^n$ 的对称性和相容性充分必要条件是对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}^n, \tau \in T^n$ 和 $n \geqslant 2$ 同时满足下面两个条件: (a) $\varphi_{\psi\tau}(\Psi\lambda) = \varphi_\tau(\lambda)$ 和 (b) $\varphi_{\theta\tau}(\Theta\lambda) = \varphi_\tau(\Theta\lambda, 0)$, 这里映射 ψ, Ψ, θ 和 Θ 是在 §13 中定义的 (且 $\mathsf{S}_t = \mathbb{R}, t \in T$), 而对 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, (\Theta\lambda, 0) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, 0)$.*

证. 由于空间 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的测度与其特征函数是一一对应的, 所以引理 10' 条件 (A) 和 (B) 等价

$$\varphi_{\psi T}(\lambda)=\varphi_{\mathsf{P}_\tau\Psi^{-1}}(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}^n, \tag{29}$$

$$\varphi_{\theta T}(\lambda)=\varphi_{\mathsf{P}_\tau\Theta^{-1}}(\mu),\quad \mu\in\mathbb{R}^{n-1} \tag{30}$$

对 $n\geqslant 2$ (注意 $\varphi_\tau=\varphi_{\mathsf{P}_\tau}$). 根据引理 8 可以找到取值于 $\mathbb{R}^n$ 的随机向量 Y_τ 使得 $\mathsf{P}_\tau=\mathsf{P}_{Y_\tau}$. 因为 $\mathsf{P}_{Y_\tau}\Psi^{-1}(B)=\mathsf{P}(Y_\tau\in\Psi^{-1}(B))=\mathsf{P}(\Psi Y_\tau\in B)$, 这时 $\mathsf{P}_\tau\Psi^{-1}$ 是向量 ΨY_τ 的分布. 于是

$$\varphi_{\Psi Y_\tau}(\lambda)=\mathsf{E}\exp\{i\langle\Psi Y_\tau,\lambda\rangle\}=\mathsf{E}\exp\{i\langle Y_\tau,\Psi^*\lambda\rangle\}=\varphi_{Y_\tau}(\Psi^{-1}\lambda), \tag{31}$$

这里我们将 Ψ 与给定的映射的正交矩阵不加区别 (这时 $\Psi^*=\Psi^{-1}$, Ψ^* 是矩阵 Ψ 的转置). 根据 (31) 式条件 (29) 具有形式 $\varphi_{\psi_\tau}(\lambda)=\varphi_\tau(\Psi^{-1}\lambda),\lambda\in\mathbb{R}^n$, 从而等价条件 (a). 类似地,

$$\varphi_\Theta Y_\tau(\mu)=\mathsf{E}\exp\{i\langle\Theta Y_\tau,\mu\rangle\}=\mathsf{E}\exp\{i\langle Y_\tau,(\mu,0)\rangle\}=\varphi_{Y_\tau}((\mu,0)),\quad \mu\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{32}$$

这样, (30) 式等价条件 (b). □

注 4. 设 $X=\{(X_1(t),\cdots,X_m(t)),t\in T\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的随机 (向量) 过程, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t_1,\cdots,t_n\in T$, 研究向量 $\xi_{t_1,\cdots,t_n}=(X_1(t_1),\cdots,X_m(t_1),\cdots,X_1(t_n),\cdots,X_m(t_n))$, 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{mn})$ 上具有分布 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 和特征函数 $\phi_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda)$, 这里 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\lambda_j=(\lambda_j^{(1)},\cdots,\lambda_j^{(m)})\in\mathbb{R}^m,j=1,\cdots,n$. 对向量的情况 (对在空间 $(\mathbb{R}^{mn},\mathscr{B}(\mathbb{R}^{mn}))$ 上给定的测度 P_τ) 定理 5 也是成立的. 在这种 (向量) 情况, 在条件 (a) 中坐标 $t_1,\cdots,t_n$ 和 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 同时进行置换时不变, 在条件 (b) 中将在向量 λ "消失" 的坐标 λ_n 在 $\mathbb{R}^m$ 中用 0 向量代替.

§16. 更详细地研究 σ - 代数 $\mathscr{B}_T$ 的构造. 我们还需要一些新的概念. 对子集 $U\subset T$ (一般来说, $\subset$ 不假设是严格包含) 类似于空间 S_T 和 σ - 代数 $\mathscr{B}_T$, 定义空间 S_U 和 σ - 代数 $\mathscr{B}_U$. 不难发现, 对有限集 $U=\{t_1,\cdots,t_n\}$, σ - 代数 $\mathscr{B}_U$ 从某种意义上与在 §11 引入的 σ - 代数 $\mathscr{B}_{t_1,\cdots,t_n}$ 很相近. 区别在于, 当运用的是函数 (而不是向量), U 中点是以什么样的次序计数是不重要的. 如果 $V\subset U\subset T$ 则定义映射 ("投影") $\pi_{U,V}:\mathsf{S}_U\to\mathsf{S}_V$ 根据公式

$$\pi_{U,V}y=y|_V,\quad y\in\mathsf{S}_U. \tag{33}$$

这里 $y|_V$ 是在集合 U 上函数 y 压缩到集合 V 上 (参见图 4). 当 V 是由一个点 t 所组成, 则代替 $\pi_{T,\{t\}}$ 写成像在 (16) 式中的 $\pi_{T,t}$, 由推论 1 可以得到

$$\pi_{U,V}^{-1}\mathscr{B}_V\subset\mathscr{B}_U,\quad 对\ V\subset U\subset T, \tag{34}$$

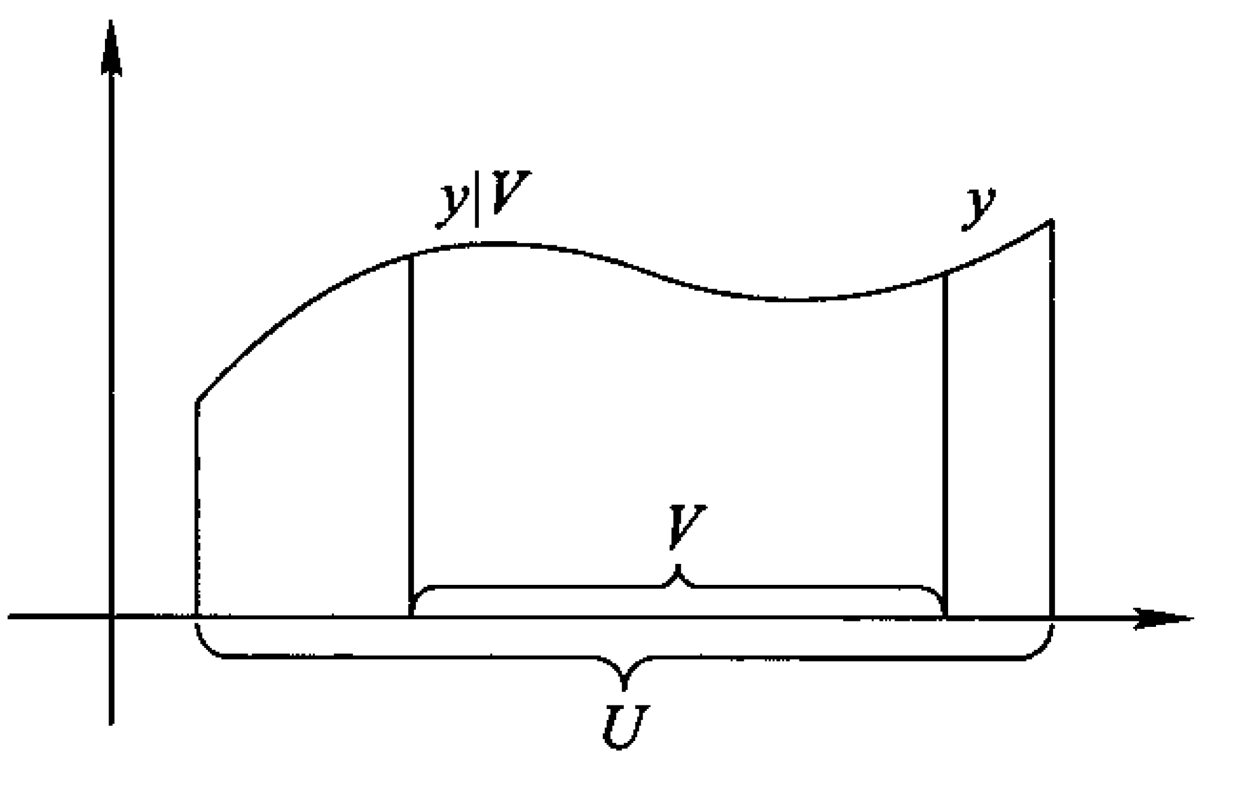


图 4

即 $\pi_{U,V} \in \mathscr{B}_U|\mathscr{B}_V$ (S_V 中基本柱集的原像是 S_U 中的基本柱集), 对 $V \subset U \subset T$ 有 $\pi_{T,V} = \pi_{U,V}\pi_{T,U}$. 因此

$$\pi_{T,V}^{-1}(B_V) = \pi_{T,U}^{-1}(\pi_{U,V}^{-1}(B_V)), \tag{35}$$

这里 B_V 是 $\mathscr{B}_V$ 中的任意集.

对任意的集合 $U \subset T$ 在 σ – 代数 $\mathscr{B}_U$ 中都存在自然嵌入的 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$. 为此定义 $\mathscr{B}_{T,U} = \pi_{T,U}^{-1}\mathscr{B}_U, U \subset T$. 不难看出, 这个集合系 $\mathscr{B}_{T,U}$ 是包含在 $\mathscr{B}_T$ 中, 作为在可测映射下 σ – 代数的原像的 σ – 代数 (参见 (34)).

在 σ – 代数 $\mathscr{B}_U$ 和 $\mathscr{B}_{T,U}$ 的集合之间可以建立一一对应:

$$\mathscr{B}_U \ni B_U \leftrightarrow \widetilde{B}_U = B_U \times \prod_{t \in T \setminus U} \mathsf{S}_t \in \mathscr{B}_{T,U}, \tag{36}$$

并且 $B_U \bigcap B'_U = \varnothing \Leftrightarrow \widetilde{B}_U \bigcap \widetilde{B}'_U = \varnothing$

除此之外, 对 $V \subset U \subset T$, 根据 (35) 和 (34) 式,

$$\mathscr{B}_{T,V} = \pi_{T,V}^{-1}\mathscr{B}_V = \pi_{T,U}^{-1}(\pi_{U,V}^{-1}\mathscr{B}_V) \subset \pi_{T,U}^{-1}\mathscr{B}_U = \mathscr{B}_{T,U}. \tag{37}$$

记

$$\mathscr{C}_T = \bigcup_{J \in F(T)} \mathscr{B}_{T,J},$$

这里 $F(T)$ 是集 T 中有限集全体 (即 $C \in \mathscr{C}_T \Leftrightarrow \exists J \in F(T) : C \in \mathscr{B}_{T,J}$).

考虑到 (37) 式, 看出 $\mathscr{C}_T$ 是由所有的柱集 $C = \pi_{T,J}^{-1}B_J$, 这里柱集的基 $B_J \in \mathscr{B}_J, J \in F(T)$ (自然, C 同样可以写成 $C = B_J \times \prod_{t \in T \setminus J} \mathsf{S}_t$ 的形式) 所组成的 ("柱集") 代数.

为了解释清为什么在这里称作 "**柱**" 的含义, 取空间 $\mathbb{R}^3$ 中, $x_3 = 0$ 时平面中的集合 B 和所有它的点都 "乘" 上直线 $\mathbb{R}$. 这样, 得到集合

$$B \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in B, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

显然, 这就是在一般几何意义下的柱.

§17. 众所周知, 可以是由不同的集合类产生同一个 σ – 代数. 应用到 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 上, 有以下的定理.

定理 6. 设 T 是无穷集和 $N(T)$ 是所有 T 的可数子集的全体. 这时, 对 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 下面的表示成立:

$$\mathscr{B}_T = \sigma\{\mathscr{C}_T\} \quad 和 \quad \mathscr{B}_T = \bigcup_{U\in N(T)} \mathscr{B}_{T,U}, \tag{38}$$

证. 既然, 对每个 $U \subset T, \mathscr{B}_{T,U} \subset \mathscr{B}_T$, 则 $\mathscr{C}_T \subset \mathscr{B}_T$ 和 $\sigma\{\mathscr{C}_T\} \subset \mathscr{B}_T$. 另一方面 $\pi_{T,t}^{-1}\mathscr{B}_t = \mathscr{B}_{T,\{t\}} \subset \mathscr{C}_T$, 因此根据 (17) 式 $\mathscr{B}_T \subset \sigma\{\mathscr{C}_T\}$. (38) 式中第一个关系式成立.

证明 $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{U\in N(T)} \mathscr{B}_{T,U}$ 是 σ – 代数. 设 $A_n \in \mathscr{A}$, 即对某个 $U_n \in N(T)$ $(n \in \mathbb{N})$ 有 $A_n \in \mathscr{B}_{T,U_n}$. 根据 (37) 式得到 $\mathscr{B}_{T,U_n} \subset \mathscr{B}_{T,U}$, 这里 $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n \in N(T)$. 因此 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}_{T,U} \subset \mathscr{A}$. 显然, 集合系 $\mathscr{A}$ 是满足 σ – 代数的其他性质. 与此同时, 对任意的 $t \in T$, 可以取 (因为 T 是无穷集) 集合 $U(t) \in N(T)$, 使得 $t \in U(t)$. 这时, 对每个 $t \in T$ 有 $\mathscr{B}_{T,\{t\}} \subset \mathscr{B}_{T,U(t)} \subset \mathscr{A}$. 总之 $\mathscr{B}_T \subset \mathscr{A}$. 除此之外, $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_T$, 因为对每个 $U \subset T$ 有 $\mathscr{B}_{T,U} \subset \mathscr{B}_T$. 这就意味着 $\mathscr{B}_T = \mathscr{A}$. 从而证明了 (38) 式中第二个关系式.
□

定理 6 明确地指出, 函数 y (S_T 中的 y) 从属柱集 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 中的集合 B 的确定仅仅是由在某个可数集 $U \subset T$ 上的取值所定 (而 U 选取只是依赖于集合 B, 如果 T 本身是可数集, 则 (38) 式导致自然等式 $\mathscr{B}_T = \mathscr{B}_{T,T}$).

假设 $T = [0,1]$ 和对 $\mathsf{S}_t = \mathbb{R}, t \in T$. 这时, 由前所述可知, 例如, $C[0,1] \notin \mathscr{B}_T$, 这里 $C[0,1]$ 是区间 $[0,1]$ 上实连续函数集. 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 集合 $M_\alpha = \{y \in \mathsf{S}_T : \sup\limits_{t\in T} y(t) \leqslant \alpha\}$ 是不可数 (对每个 $t \in [0,1]$) 基本柱集 $\{y \in \mathsf{S}_T : y(t) \leqslant \alpha\}$ 的交, 因此, 由 σ – 代数的性质, 不可能确定有 $M_\alpha \in \mathscr{B}_T$. 现在, 我们较多地讨论 "对每个 $\alpha \in \mathbb{R}, M_\alpha$ 完全是不包含在 $\mathscr{B}_T$ 中".

这样, 当 T 是不可数集时, 就发生了严重困难, 这就使在轨道空间中许多有意义的集合都不包含在以柱集 σ – 代数中. 因此, 一般来说, 对它们是否可谈论包含过程轨道的概率, 就不得而知了 (参见练习 22).

§18. 如果 (几乎所有的) 过程 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的轨道在所有轨道空间 S_T 中 "较好的" 子集中, 则问题将简化. 为了解释这一情况, 要求下面的结论.

引理 11. 设 $\mathsf{S}_t, t \in T$ 是具有距离 ρ_t 的可分距离空间, 且 $\mathscr{B}_t = \mathscr{B}(\mathsf{S}_t)$ 是 Borel σ – 代数; $F(T)$ 是 T 的有限子集全体. 这时空间 $\mathsf{S}_J, J \in F(T)$ 定义在 J 上的函数 $y(t), y(t) \in \mathsf{S}_t$ 并且赋予距离

$$\rho_J(x,y) = \max_{t\in J} \rho_t(x(t), y(t)), \quad x, y \in \mathsf{S}_J, \tag{39}$$

是可分距离空间. 这时 $\mathscr{B}_J=\mathscr{B}(\mathsf{S}_J)$, 即柱集 $\sigma-$ 代数与 Borel $\sigma-$ 代数相同. 除此之外, 如果, 空间 $\mathsf{S}_t, t\in T$ 是完备的 (从而是 Polish 空间) 则 S_J 是 Polish 空间.

证. 显然函数 ρ_J 具有距离的所有性质. 在这距离意义下函数 $y_n(\cdot)\in\mathsf{S}_J$ 的收敛性等价于对每个 $t\in J$, 在空间 (S_t,ρ_t) 上, 当 $n\to\infty$ 时的收敛性. 很容易看出 (S_J,ρ_J) 是可分空间.

公式 $\pi_{J,t}y=y(t)$ 所定义的 "投影" $\pi_{J,t}:\mathsf{S}_J\to\mathsf{S}_t$ 是由 (S_J,ρ_J) 到 (S_t,ρ_t) 的连续映射. 因此对任意的开集 $G_t\in\mathscr{B}(\mathsf{S}_t)$ 有 $\pi_{J,t}^{-1}(G_t)\in\mathscr{B}(\mathsf{S}_J)$. 根据推论 1 对任意的 $B_t\in\mathscr{B}(\mathsf{S}_t)$ 有 $\pi_{J,t}^{-1}B_t\in\mathscr{B}(\mathsf{S}_J)$. 由 (17) 式看出 $\mathscr{B}_J\subset\mathscr{B}(\mathsf{S}_J)$. 特别强调的是最后的一个包含是不要求 $\mathsf{S}_t, t\in T$ 的可分性.

现设 G 是 (S_J,ρ_J) 中任意的一个开集. 由于距离空间 (S_J,ρ_J) 的可分性, 集合 G 可以表示成可数个开球的和 (作为练习请验证或看 [35; 第 II 章, §5, 第三段]). 球 $B_\varepsilon(y)=\{z\in\mathsf{S}_J:\rho_J(x,y)<\varepsilon\}$ 乃是在 S_J 中的 "矩形". 因此, 任意开集 G 都可以表成可数个 $\mathscr{B}_J$ 中 "矩形" 的和. 因此 $\mathscr{B}(\mathsf{S}_J)\subset\mathscr{B}_J$.

如果空间 $\mathsf{S}_t, t\in J$ 是完备的, 则 S_J 也是. □

注 5. 我们已经建立起在可分距离空间中, Borel $\sigma-$ 代数与由所有开球 (也即闭球) 所产生 $\sigma-$ 代数相同. 在不是可分空间, 一般来说, $\sigma-$ 代数可能不相同.

设 T 是某个距离空间 V 中的紧集, 而 S 是具有距离 ρ 的 Polish 空间. 引入定义在集合 T 上, 对每个 t 取值于 S, 引入**连续函数 $x=x(t)$ 的空间** $C(T,\mathsf{S})$. 赋予这个空间一致距离

$$\rho_C(x,y)=\sup_{t\in T}\rho(x(t),y(t)),\quad x,y\in C(T,\mathsf{S}).\tag{40}$$

在空间 $C(T,\mathsf{S})$ 中柱集 $\sigma-$ 代数定义为由 $\mathscr{C}_T\bigcap C(T,\mathsf{S})$ 集合系所产生的 $\sigma-$代数. 换句话说, 在空间 S_T 的每个柱集中只剩下连续函数, 然后在 $C(T,\mathsf{S})$ 中再取包含这些 "**连续柱集**" 的最小 $\sigma-$ 代数.

引理 12. *引入的连续函数空间 $C(T,\mathsf{S})$ 是 Polish 空间. 在这空间中 Borel $\sigma-$ 代数与柱集 $\sigma-$ 代数相同.*

证. 第一个结论是非常简单的, 不讨论. 与引理 11 的证明一样, 可以证明空间 $C(T,\mathsf{S})$ 的柱集 $\sigma-$ 代数包含在它的 Borel $\sigma-$ 代数中. 为了验证相反的包含关系, 我们取集合 T 中可数稠密子集 M. 这时闭球 $B_r(x)=\{y\in C(T,\mathsf{S}):\rho_C(x,y)\leqslant r\}$, 这里 $x\in C(T,\mathsf{S})$ 和 $r\geqslant 0$, 可以表示成

$$B_r(x)=\bigcap_{t\in M}\{y\in C(T,\mathsf{S}):\rho(x(t),y(t))\leqslant r\},\tag{41}$$

即在 $C(T,\mathsf{S})$ 中柱集的可数交. 由注 5 可得该结论. □

下面的结果可与定理 3 作有趣的比较.

定理 7. 设在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$, 几乎所有它的轨道位于在前边所述的空间 $C(T, \mathsf{S})$ 中. 这时在 (15) 式中引入的随机元 X 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(C(T,\mathsf{S}))$ – 可测映射.

证. 设 $\widetilde{\Omega}$ 表示那些点 $\omega \in \Omega$ 的集合, 对这些点在 T 上有连续的轨道 $X(\cdot, \omega)$ (根据条件有 $\mathsf{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$). 利用 (41) 式得到

$$\{\omega : X(\omega) \in B_r(x)\} = \bigcap_{t \in M} \{\omega \in \widetilde{\Omega} : \rho(x(t), X(t,\omega)) \leqslant r\} \bigcup \{\omega \notin \widetilde{\Omega} : X(\omega) \in B_r(x)\}.$$

考虑到函数 ρ 的连续性, 对所有 $x(\cdot) \in C(T, \mathsf{S}), t \in T$ 和 $r \geqslant 0$ 有

$$\{\omega : \rho(x(t), X(t,\omega)) \leqslant r\} \in \mathscr{F}. \text{ 集合 } \{\omega \notin \widetilde{\Omega} : X(\omega) \in B_r(x)\} \subset \Omega \backslash \widetilde{\Omega},$$

而概率空间 (如前边所述) 总是假设是完全的, 也就是, 这个集合同样属于 $\mathscr{F}$.

由注 5 得出 X 的可测性. □

例 7. 研究 $T = [0,1]$ 和 $\mathsf{S} = \mathbb{R}$ (具有欧氏距离 ρ). 验证对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 具有几乎处处是连续轨道的过程 $X = \{X(t), t \in [0,1]\}$, 集合 $\{\sup\limits_{t \in [0,1]} X(t) \leqslant \alpha\} \in \mathscr{F}$.

泛函 $h(x(\cdot)) := \sup\limits_{t \in [0,1]} x(t)$, 这里 $x \in C([0,1])$ 是由空间 $(C([0,1]), \rho_C)$ 到空间 $(\mathbb{R}, \rho)$ 的连续映射, 因此, $h \in \mathscr{B}(C([0,1]))|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 除此之外, 根据定理 7 有 $X \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(C([0,1]))$, 显然对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$\{\omega : \sup_{t \in [0,1]} X(t,\omega) \leqslant \alpha\} = \{\omega : h(X(\omega)) \leqslant \alpha\},$$

可测映射的复合是可测的 (相对于所对应的 σ – 代数), 得证. □

§19. 如果在可测空间 $(\mathsf{S}_T, \mathscr{B}_T)$ 中给出测度 Q, 则与引理 8 相应的随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$ 具有自己的概率分布测度 Q (即 $\mathsf{P}_X = \mathsf{Q}$), 它可以有如下形式的定义:

$$X(t,\omega) = \omega(t), \quad \text{对} \quad \omega(\cdot) \in \mathsf{S}_T, \quad t \in T. \tag{42}$$

公式 (42) 给出了 (参见 (16)) 一族空间 S_T 的坐标映射; 这时也说, 过程 X 是直接给定的或是以坐标形式给定的.

设在 $(\mathsf{S}_T, \mathscr{B}_T)$ 上有测度 Q. 这时在 "压缩" 空间 $(\mathsf{S}_U, \mathscr{B}_U), U \subset T$ 产生的测度 $\mathsf{Q}_U := \mathsf{Q}\pi_{T,U}^{-1}$ ("投影" 或测度 Q 的像).

对 $V \subset U \subset T$, 考虑到 (6) 和 (35) 式有

$$\mathsf{Q}\pi_{T,V}^{-1} = \mathsf{Q}(\pi_{T,U}^{-1}\pi_{U,V}^{-1}) = (\mathsf{Q}\pi_{T,U}^{-1})\pi_{U,V}^{-1}.$$

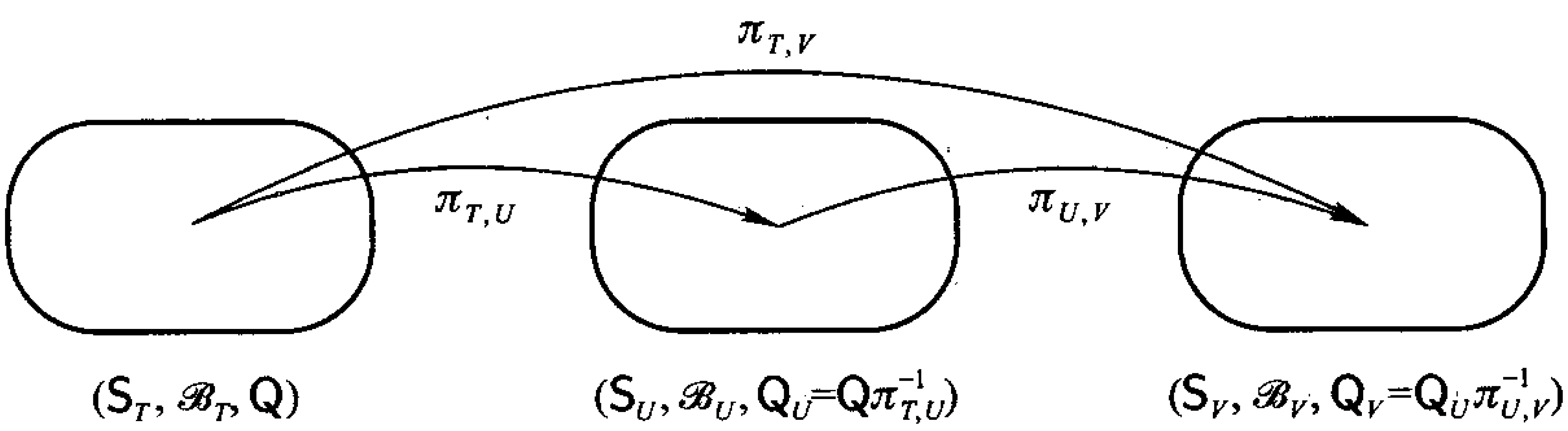


图 5

进而在"压缩"空间中得到被称作测度 Q 投影的相容性条件: 对所有的 $V \subseteq U \subset T$, 在 $\mathscr{B}_V$ 上有

$$\mathsf{Q}_V = \mathsf{Q}_U \pi_{U,V}^{-1}. \tag{43}$$

对 T 中有限集 V, U (下面相应的也用 I, J 来表示) 给出等价 (43) 式的简单条件. 由引理 2 得到在 $(\mathsf{S}_J, \mathscr{B}_J)$ 上测度族 Q_J, 这里 $J \in F(T)$, 是相容的当且仅当对任意的"矩形" $B_I = \{y \in \mathsf{S}_I : y(t) \in B_t, t \in I\}(B_t \in \mathscr{B}_t, t \in I)$, 对所有 $J \in F(T)$ 和 $I \subset J$ 有

$$\mathsf{Q}_I(B_I) = \mathsf{Q}_J \pi_{J,I}^{-1}(B_I). \tag{44}$$

运用集合作指标 (而不是有序点集) 的测度会带来方便, 是因为在 §11 中所引用的对称性和相容性两种形式条件可变成一个相容条件系. 这样, 公式 (43) 就更让人很好地了解, 在用来构造吉布斯 (Gibbs) 随机场时, 条件分布相容性的思想 (参见, 例如 [15]).

§20. 现在研究一下, 什么样的随机函数在什么意义下可以认为是"无区别的".

定义 11. 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 给定过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 和 $Y = \{Y_t, t \in T\}$, 且对任意的 $t \in T$ 取值于 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$, 如果对每个 $t \in T$ 有

$$\mathsf{P}(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0$$

则称作它们是等价的 (或随机等价的).

此时, 假设集合 $\{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \in \mathscr{F}$. 显然, 对取值于 $\mathbb{R}^m$ 中的过程 X 和 Y, 最后等式成立是自然而然的. 任何等价于 X 的过程 Y 称作修正的或者过程 X 的修正 (这时 X 也是 Y 的修正).

常见的等价的过程 (X 和 Y) 的例子, (然而这时, 它们的轨道是有"非常大的差别") 构造如下: $T = \Omega = [0,1], \mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$, P 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度, $X_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega), Y_t(\omega) \equiv 0, t \in T, \omega \in \Omega$. 不难发现, X 所有的轨道都是间断的, 而 Y 所有的轨道是**连续的**.

定义 12. 过程 X 和 Y (可能定义在不同的概率空间, 但对每个 $t \in T$, 取值于同一个空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$) 称作*广义下随机等价*, 如果它们具有相同的概率分布, 即当 $\mathrm{Law}(X) = \mathrm{Law}(Y)$ (在 $\mathscr{B}_T$ 上).

设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 和 $Y = \{Y_t, t \in T\}$ 是轨道在空间 S_T 中的随机过程, 这时, 由引理 2 得出, $\mathrm{Law}(X) = \mathrm{Law}(Y)$ 当且仅当

$$\mathrm{Law}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) = \mathrm{Law}(Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n}), \quad t_1, \cdots, t_n \in T,\ n \in \mathbb{N}, \tag{45}$$

即当这些过程所有的有限维分布相同.

很容易看出, 等价的过程是广义下随机等价的.

定义 13. 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 对每个 $t \in T$, 取值于空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 的随机过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 和 $Y = \{Y_t, t \in T\}$称作 (**随机**) *无区别的*, 如果

$$\mathsf{P}(\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega),\ 对某个\ t \in T) = 0,$$

即这些过程的轨道以*概率* 1 相同.

注意, 在该定义中假设了集合 $A = \{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega),\ 对某个\ t \in T\}$ 的测度是*确定的* (进一步说是等于 0), 即 $A \in \mathscr{F}$.

如果概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是*完全的*, 则由于对每个 $s \in T$ 有包含关系

$$\{\omega : X_s(\omega) \neq Y_s(\omega)\} \subset \{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega),\ 对某个\ t \in T\},$$

得出无区别的过程是等价的.

§21. 与 Kolmogorov 定理以及根据有限维分布构造过程有关的一些事实.

Kolmogorov 定理指出根据有限维概率分布系的相容性*可以构造*具有相同有限维分布的随机过程. 这时, 在 Kolmogorov 定理中特别强调随机函数是以*坐标形式的*: $X(t, \omega) = \omega(t), t \in T$. 这就是说, 在每个 $t \in T$ 取值于 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 的轨道函数可能是*任意函数* $\omega = \omega(t), t \in T$. 从而, 在这个定理中还遗留下一个公开性问题: 根据给定的有限维分布所构造的这样或那样过程中,"好的" 或称 "典型的" 轨道究竟能到什么样程度.

今后, 在许多论断中都含有如下说法: "设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的随机过程". 这时, 概率空间本身的构造是不确定的, 特别是当涉及只是与随机过程 X 的概率分布有关的时候. 此时, 经常需要研究给定的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 除了 X, 其他的随机对象的必要. 在这样的情况下, 必须要概率空间是足够 "丰富", 在其上能够定义这些新的对象.

考虑到这样要求, 可能处理的办法之一是, 研究 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 与它的*扩张*. 也就是说, 假设 $(\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$ 是某另一个概率空间. 定义新的概率空间 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathsf{P}})$, 设

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}' \quad \widetilde{\mathsf{P}} = \mathsf{P} \otimes \mathsf{P}',$$

这里 $\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}'$ 是在 $\Omega\times\Omega'$ 中由 "矩形" $A\times A'$ 所产生的 σ – 代数, 其中 $A\in\mathscr{F}$和 $A'\in\mathscr{F}'$, 对 $A\in\mathscr{F},A'\in\mathscr{F}'$ 有 $\widetilde{\mathsf{P}}(A\times A'):=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}'(A')$. 然后, 一对一的扩张到 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 上的测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$. 若 $X=\{X_t(\omega),t\in T\}$ 是在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上随机过程, 则自然而然可以认为它是在 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 上给出. 事实上, 对 $\widetilde{\omega}=(\omega,\omega')$ 假设

$$\widetilde{X}_t(\widetilde{\omega})=X_t(\omega),\quad t\in T. \tag{46}$$

显然, 对那样定义的随机过程 $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_t,t\in T\}$ 有下面性质成立:

$$\mathrm{Law}(\widetilde{X}|\widetilde{\mathsf{P}})=\mathrm{Law}(X|\mathsf{P}), \tag{47}$$

即在 $\mathscr{B}_T$ 上, 概率分布 $\widetilde{\mathsf{P}}_{\widetilde{X}}$ 和 P_X 相同.

当然, 概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 要比概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ "丰富". 因此, 在讨论概率空间时, 立刻应该认定最初的概率空间是 "足够丰富" 的.

当 $(\Omega',\mathscr{F}',\mathsf{P}')=([0,1],\overline{\mathscr{B}}([0,1]),\mathrm{mes})$, 这里 mes 是 Lebesgue 测度, $\overline{\mathscr{B}}([0,1])$ 是 Borel σ – 代数相对于 Lebesgue 测度的完全化, 扩张的 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 被称作概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的标准扩张.

§22. 一般地说, 最重要的过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是对每个 $t\in T$ 随机变量 X_t 取值于同一个可测空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$. 此时, 经常会对过程的可测性方面增加些条件. 为此, 首先要作的是:

定义 14. 设 $(T,\mathscr{A})$ 是可测空间. 在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上且对每个 $t\in T$ 取值于可测空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 的随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 称作**可测的**, 如果映射

$$(t,\omega)\to X_t(\omega)\in\mathsf{S},\quad (t,\omega)\in T\times\Omega \tag{48}$$

是 $\mathscr{A}\otimes\mathscr{F}|\mathscr{B}$ – 可测的.

与定义有关的, 要强调下面的重要情况: 我们这里所研究的随机过程 $X=\{X_t(\omega),t\in T\}$ 不是对给定的 ω 作为 t 的函数, 也不是对给定的 t 作为 ω 的函数, 而是作为可测映射 $(t,\omega)\to X_t(\omega)$. 换句话说, 我们所研究的随机过程是作为二元 (t,ω) 的 (可测) 函数.

常见的, S 是距离空间和 $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathsf{S})$. 如果 T 是离散集合 (有限或可数) 和 $\mathscr{A}$ 是所有 T 的子集所组成的 σ – 代数, 则过程 X 显然是可测的.

引入过程可测性概念的意义是在于研究**随机时间** $\tau=\tau(\omega)(\tau\in\mathscr{F}|\mathscr{A})$, 我们经常会遇到随机变量 $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ (参见练习 27).

设 $X,X_1,X_2,\cdots$ 是取值于可测空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B})$ 的独立同分布随机变量序列. 下面的例子告诉我们, 由于**随机时间** τ 的引入, 可能导致 X_τ 的分布与 $X_n(n\in\mathbb{N})$ 的分布不一样.

例 8. 前面所定义的随机变量序列 $X, X_1, X_2, \cdots$ 和某个集合 $B \in \mathscr{B}, \mathsf{P}_X(B) > 0$, 定义随机变量 τ (推广的, 即取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中):

$$\tau(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in B\} \tag{49}$$

(如果对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $X_n(\omega) \notin B$ 则 $\tau(\omega) := \infty$).

试证, 几乎处处 $\tau < \infty$, 且找出 X_τ 的分布. (如果 $\tau(\omega) = \infty$, 则, 例如, 假设 $X_\tau(\omega) = X(\omega)$, 即认为 $X_\infty(\omega) = X(\omega)$.)

不难发现, $\{\tau = 1\} = \{X_1 \in B\}, \{\tau = n\} = \{X_1 \notin B, \cdots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\}, n \geqslant 2$. 因此, $\mathsf{P}(\tau = n) = \mathsf{P}(X \in B)(1 - \mathsf{P}(X \in B))^{n-1}, n \geqslant 1$. 从而, 几乎处处 $\tau < \infty$, 对任意的集合 $C \in \mathscr{B}$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_\tau \in C) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X_\tau \in C, \tau = n) \\
&= \mathsf{P}(X_1 \in BC) + \sum_{n \geqslant 2} \mathsf{P}(X_n \in BC, X_1 \notin B, \cdots, X_{n-1} \notin B) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(X \in BC)(1 - \mathsf{P}(X \in B))^{n-1} = \mathsf{P}(X \in BC)/\mathsf{P}(X \in B) \\
&= \mathsf{P}_X(C|B).
\end{aligned}$$

有趣的是, 如果集合 B 与任意集合 $C \in \mathscr{B}$ 相独立 (在概率空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}, \mathsf{P}_X)$ 中), 则 X_τ 的分布与 X 分布相重合. 并且只是对 B 有 $\mathsf{P}_X(B) = 1$.

补充与习题

1. 对 Borel 空间族时, 利用 Kolmogorov 定理 (定理 4) 导出, 特殊情况的 Lomnicki – Ulam 定理 (定理 2).

有趣的是最简单的情况, 当要求构造具有给定分布的实独立随机变量序列时, 可以采用以下方法直接构造出 (不用 Kolmogorov 定理).

设 $\Omega = [0,1], \mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1])$ 和 $\mathsf{P} = \text{mes}$ (Lebesgue 测度). 研究数 $\omega \in \Omega$ 的二进位分解:

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) 2^{-k}, \tag{50}$$

这里系数 $a_k(\omega)$ 等于 0 或 1. (50) 式的表示不是一一对应的. 假设在表示不是一一对应的时候, 仅仅研究系数 $a_k(\omega)$ 中具有无穷多个 0 的情况.

2. 验证在 (50) 式中, 变量 $a_1(\omega), a_2(\omega), \cdots$, 构成在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上独立随机变量序列, 并且

$$\mathsf{P}(a_k = 1) = \mathsf{P}(a_k = 0) = 1/2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

试证, 如果在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上独立随机变量序列满足条件 (51), 则随机变量 $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)2^{-k}$ 在区间 $[0,1]$ 上具有均匀分布.

3. 试证, 如果 F 是某个分布函数和 U 是具有在 $[0,1]$ 区间上均匀分布的随机变量 (给定在某个概率空间上), 则 $X(\omega) = F^{\mathrm{inv}}(U(\omega))$ 是具有分布函数 F 的随机变量 (广义反函数 $F^{\mathrm{inv}}(x) = \inf\{y : F(y) \geqslant x\}, x \in [0,1]$; 如果对所有的 $y \in \mathbb{R}$ 有 $F(y) < 1$, 则 $F^{\mathrm{inv}}(1) := +\infty$; 如果对所有的 $y \in \mathbb{R}$ 有 $F(y) > 0$, 则 $F^{\mathrm{inv}}(0) := -\infty$).

将在 (50) 式当中的量 $a_1, a_2, \cdots$, 排成下表的形式:

$$\begin{array}{l} b_{11}(\omega), b_{12}(\omega), \cdots \\ b_{21}(\omega), b_{22}(\omega), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

(例如, $b_{11} = a_1, b_{12} = a_2, b_{21} = a_3, b_{31} = a_4, b_{22} = a_5, b_{13} = a_6, \cdots$), 变量 $U_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk}(\omega)2^{-k}, n \in \mathbb{N}$.

由习题 2 和 3 得出, 对任意给定的分布函数 $F_1, F_2, \cdots$, 变量 (取值于 $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$), $X_n = F_n^{\mathrm{inv}}(U_n), n \in \mathbb{N}$ 将是独立的且 $\mathsf{P}(X_n \leqslant x) = F_n(x), x \in \mathbb{R}$.

4. (与定理 6 比较). 试举例, 对 $\lambda \in \Lambda, \mathscr{A}_\lambda$ 是集合 Ω 中某些子集组成的 σ – 代数, 使得由 σ – 代数族所构成的 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ 不是一个 σ – 代数.

5. 对引理 7 可以推广取值于 Borel 空间的随机元.

6. 设集合 G 是由函数 $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 组成, 并且对每个变量都是不降的. 试验证, $G \notin \mathscr{B}_T(\mathsf{S}_t = \mathbb{R}, t \in T = \mathbb{R}^d)$. 同时, 找出 $\mathsf{P}_X(G)$ 这里 $X = \{X_t = \xi(1 + f(t)\eta), t \in \mathbb{R}^d\}, f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是对每个变量都是不增的函数, 而 ξ 和 η 是在区间 $[-1, 2]$ 上均匀分布的独立随机变量.

7. (与习题 2 比较) 试证, 在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \mathsf{P})$ 上, 这里 P 是 Lebesgue 测度, 不可能构造 (连续统势) 伯努利 (Bernoulli) 独立变量族 $X_t, t \in \mathbb{R}$, 即对每个 t,

$$\mathsf{P}(X_t = 0) = \mathsf{P}(X_t = 1) = 1/2$$

的随机变量.

8. 试证, 无论在什么样概率空间上, 都不可能给出非退化实的独立同分布随机变量族 $X(t, \omega), t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$, 使得以概率 1 它们的轨道 $X(\cdot, \omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的.

9. (与定理 4 比较) 设 $C(\mathbb{R})$ 是在 $\mathbb{R}$ 上实连续函数空间. 给出如下形式的柱集 $D_J = \{x \in C(\mathbb{R}) : x(t) \in B_t, t \in J\}$, 这里 $B_t \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), t \in J$ 和 $J \in F(\mathbb{R})(F(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 中所有的有限子集全体), 函数

$$\mathsf{Q}_J(D_J) = \prod_{t \in J} \mathsf{Q}_0(B_t),$$

这里 Q_0 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的某个测度. 能否在空间 $C(\mathbb{R})$ 的柱集 σ – 代数上引入测度 P, 使得对所有的 $J \in F(\mathbb{R})$ 和任意前面引入的柱集 D_J 有 $\mathsf{P}(D_J) = \mathsf{Q}_J(D_J)$?

10. 试问过程 (11) 的轨道是什么样的?

11. 在定义 (13) 中设 $m = 1$, 即 $\{\zeta_j\}$ 是独立同分布的标量随机变量, 和设 $d = 1$. 假设

$$X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathsf{S}_n([0, 1], \omega), \quad t \in [0, 1].$$

请在下列的情况下构造这个过程的轨道:

(a) μ 是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度; (b) μ 是**计数测度**, 即

$$\mu(B) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(j), \quad B \subset \mathbb{R}.$$

关于在习题 11 (a) 和 (b) 中所生成的过程 (与其相对应的, 在空间 $C([0, 1])$ 中和在斯科罗霍德 (Skorokhod) 空间 $D([0, 1])$ 中的轨道, 这些我们将在以后讨论), 建议参见小册子 [2] 中的第 2, 3 章.

12. 在定义 (12) 中, 设 $m = 1$, 假设

$$F_n^*(x, \omega) = \mathsf{P}_n((-\infty, x], \omega), \quad x \in \mathbb{R}.$$

试构造过程 $F_n^*(x, \omega)$ 轨道的图形, 该过程被称作*经验分布函数*. 当 ξ_j 是具有 $[0, 1]$ 上均匀分布和当 ξ_j 是 Bernoulli 随机变量,

$$\mathsf{P}(\xi_i = 1) = p, \quad \mathsf{P}(\xi_i = 0) = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

时有何区别?

引入下面的定义.

定义 15. 集合类 $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 称作相对于 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 上测度 Q 是*可有限逼近的*, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$ 可以找到集合 $S_1^{(\varepsilon)}, \cdots, S_N^{(\varepsilon)} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, 这里 $N = N(\varepsilon)$, 使得对每一个 $B \in \mathscr{M}$ 都有集合 $S_i^{(\varepsilon)}$ 和 $S_j^{(\varepsilon)}$, 具有 $S_i^{(\varepsilon)} \subset B \subset S_j^{(\varepsilon)}$, $\mathsf{Q}(S_j^{(\varepsilon)} \backslash S_i^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$.

于是有如下的定理.

定理 8 (参见 [3; p.421]). *设集合类 $\mathscr{M}$ 是相对于测度 Q 是可有限逼近的. 设 $\mathsf{P}_n(B, \omega)$ 是由公式 (12) 定义的过程, 和具有分布 $\mathsf{P}_{\xi_1} = \mathsf{Q}$ 相对应的向量. 这时, 当 $n \to \infty$ 时有*

$$\sup_{B \in \mathscr{M}} |\mathsf{P}_n(B, \omega) - \mathsf{Q}(B)| \to 0, \tag{52}$$

对所有的 $\omega \in \widetilde{\Omega}$, 这里 $\Omega \backslash \widetilde{\Omega} \subset \Omega_0$ 和 $\mathsf{P}(\Omega_0) = 0$. 换句话说, 如果概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是完全的, 则在 (52) 式中是几乎处处收敛.

13. 试证, 集合类 $\mathscr{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}^m\}$, 即所有形如 $(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_m], (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ 集合全体是相对于 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 上任意的 (概率) 测度 Q 是可有限逼近的. 进而成立多维情况的格利文科 (Glivenko) – 坎泰利 (Cantelli) 定理, 即经验分布函数 $F_n^*(x, \omega) := \mathsf{P}_n((-\infty, x], \omega)$ 当 $n \to \infty$ 时, 几乎处处一致收敛到分布函数 $F_{\xi_1}(x)$:

$$\sup_x |F_n^*(x, \omega) - F_{\xi_1}(x)| \to 0 \quad (\mathsf{P}\text{–几乎处处}).$$

14. 试证, 如果测度 $\mathsf{Q} = \mathsf{P}_{\xi_1}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上是相对于 Lebesgue 测度是绝对连续的, 则结论 (52) 式同样对凸集合类 $\mathscr{M}$ 也成立. (当 $m = 1$ 时, 这个结论虽然不是显然的, 但是可以由习题 13 推出, 当 $m \geqslant 2$ 时, 这个结论就不可以由习题 13 推出).

15. 试验证在习题 14 中, 如果没有测度 Q 是相对于 Lebesgue 测度是绝对连续 $(m \geqslant 2)$ 的条件, 该结论就不成立.

关于经验测度, 甚至于可以是以函数族为指标的经验过程的研究, 参见例如, [120].

设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}([0,1]^d), d \geqslant 1$. 对函数 $F : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ 用

$$\|F\|_{\mathscr{A}} = \sup_{A \in \mathscr{A}} |F(A)|$$

来表示. 假设 $F_\delta(A) = \mathrm{mes}(A^{(\delta)}), A \in \mathscr{A}, \delta > 0$ 和 $A^{(\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x, \partial A) < \delta\}, \rho(x, \partial A) = \inf_{y \in \partial A} \rho(x, y), \rho$ 是欧氏距离, mes 是 $\mathbb{R}^d$ 上 Lebesgue 测度, 且集合类 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}([0,1]^d)$ 具有

$$\text{当} \quad \delta \to 0_+ \quad \text{时有} \quad \|F_\delta\|_{\mathscr{A}} \to 0. \tag{53}$$

16. 试证, 如果 $\mathscr{A}$ 是形如 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset [0,1]^d$ 的矩形集合类, 则下面一致强大数定律成立.

定理 9 ([96]). *设 $\{X_j, j \in \mathbb{N}^d\}$ 是由独立同分布数学期望为 c_0 实的随机变量组成的随机场, 集合类 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}([0,1]^d)$ 满足条件 (53). 这时, 当 $n \to \infty$ 时, 几乎处处有*

$$\|n^{-d} S_n(\cdot) - c_0 \mathrm{mes}(\cdot)\|_{\mathscr{A}} \to 0$$

这里 $S_n(A) = \sum_{j \in nA} X_j, nA = \{x = ny, y \in A\}, n \in \mathbb{N}$, 即研究具有规范化因子 n^{-d} 的部分和过程 (13), 其中 μ 是计数测度.

对于以集合为指标的过程的中心极限定理和重对数定律的研究, 参见, 例如 [90, 94].

在经典理论的研究中, *更新过程* (10) 起着重要的作用. 更新过程称作*离散的*, 如果 ξ_1 的分布是筛状的, 即集中在形如 $k\lambda$ 的集合上, 这里 $k \in \mathbb{Z}$, 而 $\lambda > 0$ 是参

数, 称作 "**分布的步长**"(如果 ξ_1 是非负随机变量, 则 $k = 0, 1, \cdots$). 相反的情况, 更新过程称作连续的. 作为在区间 $(0, t]$ 上平均更新数, 来定义更新函数 $u(t), t > 0$, 即 $u(t) = \mathsf{E}X_t$.

17. 试证, 对所有 $t > 0, u(t) < \infty$.

下面是更新理论的基本定理 (参见, 例如 [78; 第 2 卷, p.408]).

定理 10 (布莱克韦尔 (Blackwell)). 对连续的更新过程, 对任意的固定的 $s > 0$, 当 $t \to \infty$ 时有

$$u(t + s) - u(t) \to s/c,$$

这里 $c = \mathsf{E}\xi_1$ (形式上认为 $s/\infty = 0$). 对离散的更新过程, 当 s 是 ξ_1 分布的步长 λ 的整数倍, 该结论也成立.

"几乎是明显" 地看出, 如果电子管的平均寿命是 c, 则在时间 "平均" 意义下的 s 时间中需要用 s/c 次更新代替. 但是, 定理 10 的结论得出是相当的复杂. 这个定理的概率证明可以参见, 例如, [1; p.46~50] 或者 [190; 第 2 章, 第 8 段]. 关于更新过程可以参见 [4; 第 9 章], [78; 第 2 卷, 第 11 章], [125; 第 5 章], [131; 第 25 章], [146; 第 8 章].

18. 请解释, 根据 (14) 式所定义的函数 $Z(B, \cdot)$, 对每个 $B \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$ 是取值于空间 $(\mathbb{Z}_+, \mathscr{A})$ 的随机变量, 这里 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\} = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中所有子集组成的 σ - 代数 (由此可得, $Z = \{Z(B), B \in \mathscr{B}(\mathsf{S})\}$ 是以集合族 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 为指标的实随机过程).

设 λ 是在某个可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 上的 σ - 有限测度 ($\mathsf{S} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathsf{S}_m$, 这里 $\mathsf{S}_m \in \mathscr{B}, \mathsf{S}_m \bigcap \mathsf{S}_k = \varnothing$ 对 $m \neq k$ 和 $0 < \lambda(\mathsf{S}_m) < \infty, m, k \in \mathbb{N}$). 这时, Poisson 随机测度 (14) 式的构造很容易由下面的方法模拟:

在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 构造可数个独立随机变量族 $Y^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \cdots, Y^{(m)}, X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \cdots$ 使得 $Y^{(m)}$ 是具有参数 $\lambda_m = \lambda(\mathsf{S}_m)$ 的 Poisson 分布和在 $\mathrm{Law}(X_j^{(m)}) = \lambda(\cdot)/\lambda(\mathsf{S}_m)$, 在 $\mathscr{B}_m = \mathscr{B} \bigcap \mathsf{S}_m, m, j \in \mathbb{N}$. 对 $B \in \mathscr{B}_m$ 设 $Z_m(B, \omega)$ 是根据 (14) 式中分别以 Y 和 X_j 代替 $Y^{(m)}$ 和 $X_j^{(m)}$. 设

$$Z(B, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(B \cap \mathsf{S}_m, \omega), \quad B \in \mathscr{B}, \omega \in \Omega, \tag{54}$$

不难发现 $Z(B, \omega)$ 可以取无穷值.

19. 试证, 如果对某个 $B \in \mathscr{B}$, 有 $\lambda(B) = \infty$ 则 $Z(B) = \infty$ 几乎处处, 而如果 $\lambda(B) < \infty$ 则 $Z(B) < \infty$ 几乎处处.

定理 11 (参见 [12; p.23]). 过程 (54) 称作 Poisson 随机测度, 具有下面的性质:

1. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和任意互不相交的集合 $B_1, \cdots, B_n \in \mathscr{B}$, 随机变量 $Z(B_1, \cdot), \cdots, Z(B_n, \cdot)$ 是相互独立的.

2. 对每个 $B \in \mathscr{B}$, 随机变量 $Z(B, \cdot)$ 为具有参数为 $\lambda(B)$ 的 Poisson 分布.

3. 轨道 $Z(\cdot, \omega)$ 是在 σ – 代数 $\mathscr{B}$ 上的整数值测度.

更进一步, 具有参数为 $\lambda = \infty$ 的 Poisson 随机变量, 我们定义为它以概率 1 等于无穷.

量 $Z(B)$ 可以直观地想象为是落入到集合 $B \in \mathscr{B}$ 中 "随机点" 的数目. 与此相关的是下面有趣的习题.

20 (参见 [32; p.370]). 设 λ 是空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 上的 σ – 有限测度, 集合 $B \in \mathscr{B}, 0 < \lambda(B) < \infty$. 设 $B = \bigcup_{q=1}^{n} B_q$, 这里 $B_q \in \mathscr{B}, B_j \bigcap B_q = \varnothing$, 对 $q \neq j$ $(q, j = 1, \cdots, n)$. 试证, 对任意的 $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $k = \sum_{q=1}^{n} k_q$ 有下面等式成立:

$$\mathsf{P}(Z(B_1) = k_1, \cdots, Z(B_n) = k_n | Z(B) = k) = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{\lambda(B_1)}{\lambda(B)}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\lambda(B_n)}{\lambda(B)}\right)^{k_n}.$$

这样, 如果 $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), d \geqslant 1$, 则在固定了落入到集合 B (有限, 非空的) 中的 "Poisson 点" 的数目 k 后, 它们的位置可以认为是 k 个在 B 上具有均匀分布的独立随机变量.

关于随机点过程和场 (不仅是 Poisson 的) 作为在物理, 技术和其他领域中作为重要模型被利用. 这方面有许多的著作 (参见, 例如, [10,13,111,145,151,178]).

现在此回到与随机函数相等的 (参见 §20) 有关的问题上来.

21. 试举例, 定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 实随机过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 和 $Y = \{Y_t, t \in T\}$, 使得在 $\mathscr{B}_T$ 上有 $\mathsf{P}_X = \mathsf{P}_Y$, 但是 X 和 Y 不 (随机的) 等价. 试举例, 当 $\mathsf{P}_X \neq \mathsf{P}_Y$ 时, 但是, 对每个 $t \in T$, X_t 与 Y_t 的分布却相同.

22. 试举例, (实) 过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 和集合 $D, L \notin \mathscr{B}_T$, 使得 $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathscr{F}$ 和 $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in L\} \notin \mathscr{F}$.

23. 试举例, 等价过程 $X = \{X_t, t \in T\}, Y = \{Y_t, t \in T\}$, 和那样的集合 $D \notin \mathscr{B}_T$ 使得 $A = \{\omega : X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathscr{F}$ 和 $B = \{\omega : Y(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathscr{F}$, 但是 $\mathsf{P}(A) \neq \mathsf{P}(B)$.

练习 22 和 23 告诉我们, 并不是总能够说出过程落到某个不包含在柱集 σ – 代数中集合的概率, 但是, 如果这能够说出, 则落到那个集合的概率就不一定是由过程的有限维分布所确定.

24. 试举例, (随机的) 等价过程, 但它们不是无区别的例子.

因此, 许多对理论和应用都很重要的集合, 确不包含在 σ – 代数 $\mathscr{B}_T$ 中 (参见定理 6). Doob 给出了关于过程的可分性概念. 利用它在一定情况下, 可以构造过程的一种版本, 且它的行为, 实质上, 是由在可数指标集上的值所确定的.

定义 16. 设在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上, 对每个 $t\in T$ 取值于 Polish 空间 (S,ρ) 的随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$, 这里 T 是拓扑空间. 随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 称作相对于可分性集合 $T_0\subset T$ 是可分的, 如果 T_0 是集合 T 中可数稠密集, 并且存在事件 $N\in\mathscr{F}$, 使得 $\mathsf{P}(N)=0$, 对所有的 $t\in T,\omega\in\Omega\backslash N$, 有

$$X_t(\omega)\in\left[\bigcap_{\substack{t\in G\\ G\in\mathscr{G}}}\{X_s(\omega),s\in G\bigcap T_0\}\right],\tag{55}$$

这里 $[B]$ 表示集合 B 的闭包, 而 $\mathscr{G}$ 是 (S,ρ) 中开集全体.

过程 X 称作可分的, 如果作为可分性集合 T_0 可以取任意的 T 中可数稠密集.

定理 12 (参见 [153; p.128]). 设 (S,ρ) 是紧距离空间, 和 (T,δ) 是准距离空间. 这时, 在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上, 对每个 $t\in T$ 取值于 (S,ρ) 的随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 都有可分修正. 如果 S 是局部紧空间, 则在单点紧化 S 时, 定理成立.

作为练习, 可以比较定义 16 与在 [101; p.111] 中的定义, 那里研究 $T=[0,1],\mathsf{S}=\mathbb{R}$ 的情况. 关于过程的可分性可以参见 [12,25].

定理 13 ([79]). 设满足定理 12 的条件, 随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是在 T 上随机连续的, 即对每个 $t\in T$ 和任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{s\to t}\mathsf{P}(\rho(X_s,X_t)>\varepsilon)=0.\tag{56}$$

这时, 对过程 X 存在可分可测的修正.

25. 试证, 如果 S 是可分的距离空间, 则在概率 (56) 式中确定的是事件, 即集合属于 $\mathscr{F}$ (提示: 利用引理 11).

26. 试证, 如果随机过程是可测的 (参见定义 14), 则它的轨道是 $\mathscr{A}|\mathscr{B}$ - 可测函数. 相反的结论对吗? 试举例, 没有可测修正的随机过程.

27. 设 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是可测过程和 $\tau:\Omega\to T,\tau\in\mathscr{F}|\mathscr{A}$. 试证, 这时 $Y(\omega)=X_{\tau(\omega)}(\omega)$ 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}$ - 可测随机变量. 试验证, 如果随机过程 X 是可测的条件不存在, 则结论就不一定成立.

比如说, 由 "随机个随机变量" 产生出的随机变量 $X_\tau\left(X_\tau=\sum\limits_{k\leqslant\tau}\xi_k\right)$, 这里 τ 是取整数值的随机变量. 它有许多方面的应用, 例如, 用在保险理论中. 这时, 随机个随机变量所产生的效应, 对由确定数量随机数量的之和所产生的是不可能观测到的 (参见, 例如, [133]).

28. 设随机过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 几乎所有的轨道在 $[0,\infty)$ 上右连续. 试证, 这样的随机过程有可测修正.

在, 例如, [12; p.120~130] 介绍了许多关于具有给定轨道性质的随机过程构造问题. 在第 II 章的补充中, 我们将涉及一些关于这方面的问题.

第二章
独立增量过程. 泊松过程和高斯过程

内容摘要: 独立增量过程存在性准则. 泊松 (Poisson) 过程. 维纳 (Wiener) 过程 (布朗 (Brown) 运动). 多维正态分布. 根据中值函数和相关函数构造实高斯 (Gauss) 函数. 复 Gauss 过程. 作为相关函数, 又作为希尔伯特 (Hilbert) 空间上的再生核的非负定函数. 帕尔赞 (Parzen) 定理. Brown 运动两种定义的等价性. 哈尔 (Haar) 和绍德尔 (Schauder) 函数. 标准 Gauss 变量序列的摆动. 构造连续 Wiener 过程. 多维 Brown 运动.

§1. 在这一章中, 我们将研究特殊的, 但又是广泛应用而重要的一类随机过程 —— 具有独立增量的过程. 对于初学者, 可以先放过 §6 关于复 Gauss 过程, §7 关于研究以函数族为指标的随机过程. 希望对 Poisson 和 Wiener 过程 (在 §2 和 §3 中) 给予特别的关注. 它们会经常用在以后的几章里.

定义 1. 实随机过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 称作独立增量过程, 如果对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和所有满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 的 $t_0, t_1, \cdots, t_n$, 量 $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是总体上独立.

定理 1. 设 $\{\varphi(s,t;\cdot)\}$, 这里 $0 \leqslant s < t < \infty$, 是相对于在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上某个概率族 $\mathrm{Q}_{s,t}, 0 \leqslant s < t < \infty$ 的特征函数族. 独立增量过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 且对任意的 $0 \leqslant s < t < \infty$ 随机变量 $X_t - X_s$ 具有特征函数 $\varphi(s,t;\cdot)$ 的充分必要条件是对所有的 $0 \leqslant s < u < t < \infty, v \in \mathbb{R}$ 有

$$\varphi(s,t;\cdot) = \varphi(s,u;v)\varphi(u,t;v), \tag{1}$$

这时, 随机变量 X_0 的分布 Q_0 可以任意取.

证. 由于独立随机变量和的特征函数等于求和各项随机变量特征函数的乘积, 所以 (1) 式的必要性条件是显然的.

设满足条件 (1). 假设已经有了概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和要找的过程 X, 并且 $\mathrm{Law}(X_0|\mathsf{P})=\mathsf{Q}_0$. 这时量 X_0 的特征函数是 $\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\lambda)$, 向量 $\xi=(X_{t_0},X_{t_1}-X_{t_0},\cdots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}})$, 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$ 的特征函数是

$$\varphi_\xi(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)=\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\lambda_0)\varphi(t_0,t_1;\lambda_1)\cdots\varphi(t_{n-1},t_n;\lambda_n).$$

注意

$$\begin{pmatrix}X_{t_0}\\X_{t_1}\\X_{t_2}\\\cdots\\X_{t_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{t_0}\\X_{t_1}-X_{t_0}\\X_{t_2}-X_{t_1}\\\cdots\\X_{t_n}-X_{t_{n-1}}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

对任意的随机向量 $\eta\in\mathbb{R}^q$, 任意的矩阵 $A=(a_{k,m})_{k,m=1}^q$, 这里 $a_{k,m}\in\mathbb{R}(k,m=1,\cdots,q)$, 和所有的 $\lambda\in\mathbb{R}^q$ 有

$$\varphi_{A\eta}(\lambda)=\mathsf{E}\exp\{i\langle\lambda,A\eta\rangle\}=\mathsf{E}\exp\{i\langle A^*\lambda,\eta\rangle\}=\varphi_\eta(A^*\lambda), \tag{3}$$

这里 A^* 是矩阵 A 的转置, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^q$ 中的数量 (标量) 积.

因此, 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, 过程 X 的有限维分布给定特征函数

$$\varphi_{t_0,t_1,\cdots,t_n}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\varphi_\xi(A^*\lambda)=\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\mu_0)\varphi(0,t_1;\mu_1)\cdots\varphi(t_{n-1},t_n;\mu_n),$$

这里 $\mu=A^*\lambda$ 和 A 是在 (2) 式中的三角矩阵, $\mu_0=\lambda_0+\cdots+\lambda_n,\mu_1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n,\cdots,\mu_n=\lambda_n$. 除此之外, 我们有 $\varphi_{t_0}(\lambda_0)=\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\lambda_0)$, 和 $\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\varphi_{t_0,t_1,\cdots,t_n}(0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 对 $n\in\mathbb{N}$ 和 $0<t_1<\cdots<t_n$.

这样, 在假设中存在要找的过程 X, 它的有限维分布的特征函数应该是什么样的.

回到给定的函数族 $\varphi_{\mathsf{Q}_0}(\cdot)$ 和 $\varphi(s,t;\cdot)$, 这里 $0\leqslant s<t<\infty$. 现在, 利用前面所述的方法导出特征函数 $\varphi_{t_0},\varphi_{t_0,t_1,\cdots,t_n}$ 和 $\varphi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(0=t_0<t_1<\cdots<t_n,n\in\mathbb{N})$, 然后利用第一章定理 5.

由于第一章注 3, 该定理的条件 (a) 不需要验证, 而条件 (b), 准确地说是条件 (b′), 意味着在 $\varphi_\tau(\lambda)$ 中任意变量 λ_m 用 0 代替, 同样满足, 因为根据 (1) 对 $1\leqslant m\leqslant n$, 有

$$\begin{aligned}&\varphi(t_{m-1},t_m;0+\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_n)\varphi(t_m,t_{m+1};\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_n)\\&=\varphi(t_{m-1},t_{m+1};\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_n).\end{aligned}$$

进而满足条件相容性条件, 也就是说由第一章定理 5 得到, 存在所要找的独立增量过程. 显然, X_0 的分布就是要找的分布 Q_0. $\square$

注 1. 实独立增量过程的定义可以扩充到取值于 $\mathbb{R}^m(m \geqslant 1)$ 的过程. 这时, 定理 1 的证明只需一些修改. 如, 在 (2) 式中的矩阵里, 1 的位置用 m 阶单位矩阵 I_m 来代替, 且研究的是 $\lambda_k \in \mathbb{R}^m, k = 0, 1, \cdots, n$.

注 2. 独立增量过程的定义不仅仅是在半直线 $[0, \infty)$ 上. 如果 $T = \mathbb{N}$ 和过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 有独立增量 (即对 $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是独立的对 $1 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 这里, $t_i \in \mathbb{N}$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i = 1, \cdots, n$), 则过程 X 具有简单的构造: $X_t = \xi_1 + \cdots + \xi_t, t \in \mathbb{N}$, 这里, $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是独立随机变量序列. 这样一来, 独立增量过程就是*独立随机变量和*组成的随机序列的自然而然的推广.

§**2.** 我们知道, 在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (或 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$) 上非负可数可加函数称作*局部有限测度*, 如果对任意的 $-\infty < a \leqslant b < \infty$, 有 $m([a, b]) < \infty$.

定义 2. 随机过程 $N = \{N(t), t \geqslant 0\}$ 称作具有*伴随测度* m (这里 m 是局部有限测度, $m(\mathbb{R}) = \infty$) 的 Poisson 过程, 如果满足下面条件:

1) $N(0) = 0$ 几乎处处.

2) 过程 N 是独立增量的.

3) 随机变量 $N(t) - N(s)$, 这里 $0 \leqslant s < t < \infty$, 具有参数为 $m((s, t])$ 的 Poisson 分布.

特别地, 如果 $m((s, t]) = (t - s)\lambda, 0 \leqslant s < t < \infty, \lambda > 0$, 则称作*具有常数强度 λ 的标准 Poisson 过程*.

一般假设, 具有参数为 0 的 Poisson 分布的随机变量, 则认为恒等于 0.

由定理 1 可知 Poisson 过程是存在. 事实上, 如果有了这样的过程, 则根据 3) 于是我们有

$$\varphi(s, t; \nu) = \varphi_{N_t - N_s}(\nu) = e^{m((s,t])(e^{i\nu} - 1)}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

对这样定义的函数 $\varphi(s, t; \nu), 0 \leqslant s < t < \infty, \nu \in \mathbb{R}$ 定理 1 的条件 (1) 是满足的, 因为 $m((s, t]) = m((s, u]) + m((u, t])$, 于是就可以利用定理 1. 作为初始分布 Q_0 应该取集中 0 点的测度.

下面的结果很有意义, 它可以解释如何构造 Poisson 过程的轨道.

定理 2 (Poisson 过程的显式构造). *设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是具有指数分布的独立随机变量序列, 其分布密度:*

$$p_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{4}$$

这里 λ 是正的参数, $i \in \mathbb{N}$. 这时, 相应的更新过程 (I.10) 乃是具有强度为 λ 的 Poisson 过程.

我们将不去证明它, 因为它仅仅是借助**无穷小矩阵**一般构造马氏链的一种特殊情况 (参见, 第六章, 练习 33).

例 1. 设 $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是根据公式 (I.11) 所定义的过程, 这里随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 具有参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布. 验证过程 Y 是独立增量的.

注意, 如果 $Z = \{Z_t, t \geqslant 0\}$ 是实独立增量过程和 $h = h(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上非随机实函数, 则 $\{Z_t + h(t), t \geqslant 0\}$ 同样是独立增量过程. 因此, 如果 $S = \{S_t, t \geqslant 0\}$, 这里 $S_t = \sum\limits_{j=1}^{X_t} \eta_j$, 具有独立增量性质, 则过程 Y (参见 (I.11)) 将是独立增量过程. 由于定理 2, 由公式 (I.10) 给出的过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是具有强度为 λ 的 Poisson 过程.

设 $\phi(\nu) = \mathsf{E}e^{i\nu\eta_1}, \nu \in \mathbb{R}$. 考虑到 Poisson 过程的独立增量, 同时序列 $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的独立性 (即伴随它们产生的 σ – 代数独立), 对 $0 \leqslant s < t$ 和 $\nu \in \mathbb{R}$ 有

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}e^{i\nu(S_t - S_s)} &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \mathsf{E}e^{i\nu(S_t - S_s)} \mathbf{1}_{\{X_s = k\}} \mathbf{1}_{\{X_t - X_s = m\}} \\
&= \sum_{k,m=0}^{\infty} \mathsf{E}\exp\left\{ i\nu \sum_{j=k+1}^{k+m} \eta_j \right\} \mathsf{P}(X_s = k)\mathsf{P}(X_t - X_s = m) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X_s = k) \sum_{m=0}^{\infty} (\phi(\nu))^m \frac{(\lambda(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda(t-s)} \\
&= e^{\lambda(t-s)(\phi(\nu)-1)}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

类似地, 可以计算出过程 $\{S_t, t \geqslant 0\}$ 的几个增量联合的特征函数, 由此可得所要的结论.

§3. 介绍一种最重要随机过程.

定义 3. 随机过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 称作 Weiner 过程 或 Brown 运动, 如果满足:

1) $W(0) = 0$ 几乎处处.

2) 过程 W 是独立增量的.

3) 对所有的 $0 \leqslant s < t < \infty$, 随机变量 $W(t) - W(s) \sim \mathsf{N}(0, t-s)$, 即随机变量 $W(t) - W(s)$ 具有参数为 0 和 $t - s$ 的 Gauss (正态) 分布.

由于 1)~3) 的性质, 又

$$
e^{-\frac{(t-s)\nu^2}{2}} = e^{-\frac{(u-s)\nu^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(t-u)\nu^2}{2}}, \quad 0 \leqslant s < u < t, \quad \nu \in \mathbb{R}.
$$

保证满足定理 1 的条件 (1), 从而过程存在.

对 Weiner 过程 $W(t) = W(t) - W(0) \sim \mathsf{N}(0, t)$, 因此对所有的 $t \geqslant 0$ 有 $\mathsf{E}W(t) = 0$. 如果 $0 \leqslant s \leqslant t$, 则协方差

$$
\operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \operatorname{cov}(W(s), W(t) - W(s) + W(s)) = \mathsf{D}(W(s) - W(0)) = s,
$$

这里 D 表示方差. 因此, 对 Weiner 过程 W, 当 $s,t \in [0,\infty)$ 时, 有

$$\mathsf{E}W(t) = 0, \quad \operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s,t\}. \tag{6}$$

注 3. 一般地说, 在 Weiner 过程的定义中, 还要求它的轨道几乎处处连续的 (即以概率 1 是连续的). 稍后, 我们会看到, 这个性质经常与性质 1)~3), 同时是满足的.

定义 4. 取值于 $\mathbb{R}^m$ 的, 且由 m 个独立 (连续的) Brown 运动 $\{W_k(t), t \geqslant 0\}, k = 1,\cdots,m$ 组成的随机过程 $W = \{W(t) = (W_1(t),\cdots,W_m(t)), t \geqslant 0\}$ 称作多维 ($m-$ 维) Brown 运动.

在这个定义中过程的独立性应该理解为伴随它们产生的 $\sigma-$ 代数独立 (参见, 第一章, 注 1). 这样的随机过程 W 是很容易得到. 事实上, 在某个概率空间 $(\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathsf{P}_k), k = 1,\cdots,m$ 上, 给出相应的 Brown 运动 $W_k = \{W_k(t), t \geqslant 0\}$. 然后, 设

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) = \bigotimes_{k=1}^{m} (\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathsf{P}_k)$$

并且, 类似于公式 (I.46), 在 Ω 上可以扩充定义 Brown 运动 W_k.

§4. 现在研究 Gauss 随机函数. 为此, 首先回顾在 $\mathbb{R}^n$ 中随机向量 Y 称作正态的或 Gauss 的 (表示为: $Y \sim \mathsf{N}(a, C)$), 如果对 $\lambda \in \mathbb{R}^n$ 它的特征函数 $\varphi_Y(\lambda) = \mathsf{E}\exp\{i\langle\lambda, Y\rangle\}$ 有以下形式:

$$\varphi_Y(\lambda) = \exp\left\{i\langle a,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle\right\} = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k - \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{n} c_{km}\lambda_k\lambda_m\right\}, \tag{7}$$

这里 $a \in \mathbb{R}^n, C = (c_{km})_{k,m=1}^n$ 是具有实元素的对称非负定矩阵, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中的数 (标) 量积, 并且具有欧氏范数 (今后, 对行、列向量作为表示都是一样的, 不再加以区分). 非负定矩阵 C (记作 $C \geqslant 0$) 意味着对所有的 $\lambda \in \mathbb{R}^n$, 有 $\langle C\lambda,\lambda\rangle \geqslant 0$. 很容易验证条件 $C \geqslant 0$ 和 $C = C^*$ 等价于下面的一个条件: 对任意的复数 $z_1,\cdots,z_n$ (对 $z = u + iv, \overline{z} = u - iv$, 这里 $u,v \in \mathbb{R}$) 有

$$\sum_{k,l=1}^{n} c_{kl} z_k \overline{z}_l \geqslant 0 \tag{8}$$

众所周知 (参见, 例如, [85; 第 1 卷, p.383]), 对矩阵 C 和任意的向量 $a \in \mathbb{R}^n$, 等式 (7) 右边的函数乃是某个随机向量 Y 的特征函数. 如果 $C > 0$, 即对任意的 $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 有 $\langle C\lambda,\lambda\rangle > 0$, 则随机向量 Y 有概率分布密度 (相对于 Lebesgue 测度)

$$p_Y(x) = (2\pi)^{-n/2}|C|^{-1/2}\exp\{-\langle C^{-1}(x-a), x-a\rangle\},$$

这里 $|C|$ 是 C 的行列式.

对 $Y \sim \mathsf{N}(a, C)$, 不难得到

$$a_k = \mathsf{E}Y_k, \quad c_{km} = \mathrm{cov}(Y_k, Y_m), \quad k, m = 1, \cdots, n \quad (n \geqslant 1). \tag{9}$$

定义 5. 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的实随机函数 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 称作 Gauss 的, 如果它所有有限维分布是 Gauss 的.

换句话说, X 是 Gauss 随机过程, 如果对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和任意选取有限个点 $t_1, \cdots, t_n \in T, (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ 是 Gauss 向量. 这个性质只要求 $(t_1, \cdots, t_n)$ 是有限个不同的点即可. 下面我们要介绍一个今后要用的引理.

引理 1. 向量 $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中是 Gauss 的, 当且仅当对所有的 $\tau, \langle \tau, Y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_k Y_k$ 是 Gauss 随机变量, 其中 $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$.

证. 设 $Y \sim \mathsf{N}(a, C)$. 这时, 由于 (7) 式对任意的 $\nu \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathsf{E}e^{i\nu\langle\tau,Y\rangle} = \mathsf{E}e^{i\langle\nu\tau,Y\rangle} = \exp\left\{i\langle a, \nu\tau\rangle - \frac{1}{2}\langle C\nu\tau, \nu\tau\rangle\right\} = \exp\left\{i\langle a, \tau\rangle\nu - \frac{1}{2}\langle C\tau, \tau\rangle\nu^2\right\},$$

即 $\langle \tau, Y \rangle \sim \mathsf{N}(\langle a, \tau \rangle, \langle C\tau, \tau \rangle)$ (因 $\nu\tau = (\nu\tau_1, \cdots, \nu\tau_n)$).

相反的, 设内积的随机变量 $\langle \tau, Y \rangle \sim \mathsf{N}(a_\tau, \sigma_\tau^2)$. 这时, (参见 (9), 对 $n = 1$ 的情况) $a_\tau = \mathsf{E}\langle \tau, Y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_k \mathsf{E}Y_k = \langle \tau, \mathsf{E}Y \rangle$,

$$\begin{aligned}\sigma_\tau^2 &= \mathsf{D}\langle \tau, Y \rangle = \mathsf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k Y_k\right) \\ &= \sum_{k,m=1}^{n} \tau_k \tau_m \mathrm{cov}(Y_k, Y_m) = \sum_{k,m=1}^{n} \tau_k \tau_m c_{km} = \langle C\tau, \tau \rangle,\end{aligned} \tag{10}$$

这里考虑到 $\mathsf{E}Y_j^2 < \infty, j = 1, \cdots, n$ (选取向量 τ, 使得 $\tau_j = 1$ 和当 $k \neq j$ 时 $\tau_k = 0$, 可以看出 Y_j 是 Gauss 随机变量). 对任意的 $\nu \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}e^{i\nu\langle\tau,Y\rangle} = \exp\left\{i\nu a_\tau - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2\nu^2\right\}. \tag{11}$$

在 (11) 式中设 $\nu = 1$, 且在 (10) 式中选取 a_τ, σ_τ^2, 得到公式 (7), 也就是说, 向量 Y 是 Gauss 的. □

§5. 研究实 Gauss 随机过程, 我们需要下面的定义.

定义 6. 定义在 $T \times T$ 上的实函数 $r = r(s, t)$ 称作非负定的, 如果对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的选取点 $t_1, \cdots, t_n \in T, (r(t_k, t_m))_{k,m=1}^n$ 是个非负定矩阵.

定理 3. 设 $a = a(t)$ 是任意的实函数和 $r = r(s,t)$ 是对称非负定实函数, 这里 $s,t \in T$. 这时, 可以找到概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 和在其上的 Gauss 随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$, 使得 $\mathsf{E}X(t) = a(t)$ 和 $\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = r(s,t)$ 对所有的 $s,t \in T$.

证. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\tau = (t_1, \cdots, t_n) \in T^n$ 引入在 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上的测度 Q_τ, 具有形如 (7) 式的特征函数, 这里 $a = (a(t_1), \cdots, a(t_n))$ 和 $c_{km} = r(t_k, t_m)$. 对测度 Q_τ 显然满足第一章定理 5 的条件 (a),(b), 保障了这些测度的相容性. 因此, 根据 Kolmogorov 定理 (第一章, 定理 4), 可以找到概率空间和在它之上的, 具有有限维分布为 Gauss 测度 Q_τ 的随机函数 X. 由它的构造可知, $\mathsf{E}X(t) = a(t)$ 和 $\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = r(s,t)$. □

注意, 对具有有限矩 $\mathsf{E}X^2(t)$, 这里 $t \in T$ 的任意实随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$, 当所有的 $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_n \in T$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 时有下面不等式成立

$$\sum_{k,m=1}^{n} \operatorname{cov}(X(t_k), X(t_m))\lambda_k\lambda_m = \operatorname{cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X(t_k), \sum_{m=1}^{n} \lambda_m X(t_m)\right) \geqslant 0. \tag{12}$$

同时有 $\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \operatorname{cov}(X(t), X(s))$. 因此, 定理 3 中的条件, 对函数 $r = r(s,t)$ 来说, 具有协方差函数 $r = r(s,t)$ 的实 Gauss 随机函数存在不仅是充分的, 而且是必要的. 因此实非负定函数类与 (实) Gauss 过程的协方差函数类相重合.

§6. 研究复 (取值于 $\mathbb{C}$) Gauss 随机过程, 我们需要下面的一些定义.

定义 7. 复函数 $R = R(s,t), s,t \in T, T$ 是某个非空集合, 称作非负定的, 如果对每个 $n \in \mathbb{N}$, 任意的 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 和所有的 $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, 有

$$\sum_{k,m=1}^{n} z_k \overline{z}_m R(t_k, t_m) \geqslant 0. \tag{13}$$

定义 8. 随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$ (实或复的) 称作 L^2 - 过程, 如果对 $t \in T$ 有 $\mathsf{E}|X(t)|^2 < \infty$. 过程的协方差函数 $r(s,t)$ 由下面公式给出:

$$r(s,t) = \mathsf{E}(X(s) - \mathsf{E}X(s))\overline{(X(t) - \mathsf{E}X(t))}, \quad s,t \in T. \tag{14}$$

定义 9. 设 $\xi(t), \eta(t)$ 是实随机过程; 取值于 $\mathbb{C}$ 的随机函数 $X = \{X(t) = \xi(t) + i\eta(t), t \in T\}$ 称作 Gauss 的, 如果 $\{(\xi(t), \eta(t)), t \in T\}$ 是在 $\mathbb{R}^2$ 中的 Gauss 过程, 即对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和所有的 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 向量 $(\xi(t_1), \eta(t_1), \cdots, \xi(t_n), \eta(t_n))$ 是 Gauss 的.

定理 4. 对所有的 $s,t \in T$, 非负定复函数 $R = R(s,t)$ 类与 L^2 - 过程 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数 $r = r(s,t)$ 类相重合, 进一步说, 与复 Gauss 过程 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数相重合.

证. 如果 $X=\{X(t),t\in T\}$ 是 L^2 – 过程, 则对每个 $n\in\mathbb{N}$, 任意的 $t_1,\cdots,t_n\in T$ 和所有的 $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ 有

$$\sum_{k,m=1}^{n} z_k\overline{z}_m r(t_k,t_m)=\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k X(t_k)\right|^2\geqslant 0,$$

即协方差函数 $r=r(s,t)$ 是非负定的.

现设 $R=R(s,t),s,t\in T$ 是非负定函数. $R_1(s,t)=\mathrm{Re}R(s,t)$ 和 $R_2(s,t)=\mathrm{Im}R(s,t)$, $s,t\in T$. 当 $z_k=u_k+iv_k,k=1,\cdots,n$, 不等式 (13) 经过分解实部与虚部形式有

$$\sum_{k,m=1}^{n} R_1(t_k,t_m)(u_ku_m+v_kv_m)+\sum_{k,m=1}^{n} R_2(t_k,t_m)(u_kv_m-v_ku_m)$$
$$+i\left[\sum_{k,m=1}^{n} R_1(t_k,t_m)(v_ku_m-u_kv_m)+\sum_{k,m=1}^{n} R_2(t_k,t_m)(u_ku_m+v_kv_m)\right]\geqslant 0. \quad (15)$$

由 (13) 式, 当 $n=1$ 时看出对所有的 $t\in T$ 有 $R(t,t)\geqslant 0$. 当 $n=2$ 时任意的 $t_1,t_2\in T$ 和 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 根据 (13) 式有

$$|z_1|^2R(t_1,t_1)+z_1\overline{z}_2R(t_1,t_2)+\overline{z}_1z_2R(t_2,t_1)+|z_2|^2R(t_2,t_2)\geqslant 0$$

因此, $z_1\overline{z}_2R(t_1,t_2)+\overline{z}_1z_2R(t_2,t_1)$ 是实数. 特别地, 当 $z_1=z_2=1$ 得到 $R(t_1,t_2)+R(t_2,t_1)\in\mathbb{R}$ 对所有的 $t_1,t_2\in T$. 取 $z_1=1,z_2=i$ 同样得到 $R(t_1,t_2)-R(t_2,t_1)$ 是虚数. 这样, 对 $s,t\in T$ 有 $R_1(s,t)=R_1(t,s)$ 和 $R_2(s,t)=-R_2(t,s)$. 换句话说, 对任意的 $s,t\in T$, 有 $R(s,t)=\overline{R(t,s)}$, 即函数 $R(s,t)$ 有埃尔米特 (Hermite) 共轭性质. 因此, 不等式 (15) 可以改写成 $\langle C\lambda,\lambda\rangle\geqslant 0$ 的形式, 这里 $\lambda=(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的数量积, 而 C 是实对称非负定矩阵, 它由 4 块组成:

$$C=\left(\begin{array}{c|c} R_1(t_k,t_m) & R_2(t_k,t_m) \\ \hline -R_2(t_k,t_m) & R_1(t_k,t_m)\end{array}\right)_{k,m=1,\cdots,n}. \quad (16)$$

由于第一章注 4, 对每个 t, 存在取值于 $\mathbb{R}^2$ 的 Gauss 过程 $\{(\xi(t),\eta(t)),t\in T\}$, 使得对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t_1,\cdots,t_n\in T$ 向量 $(\xi(t_1),\cdots,\xi(t_n),\eta(t_1),\cdots,\eta(t_n))\sim\mathsf{N}(0,C)$, 这里由 (16) 式给出协方差矩阵 C, 取

$$X(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi(t)-i\eta(t)),\quad t\in T. \quad (17)$$

这时, 对 $s,t\in T$ (注意 $-R_2(t,s)=R_2(s,t),s,t\in T$) 有

$$\mathsf{E}X(s)\overline{X(t)}=\frac{1}{2}(R_1(s,t)-iR_2(t,s)+iR_2(s,t)+R_1(s,t))=R(s,t). \quad \square$$

例 2. 设 $f(t)$ 是定义在某个集 T 上的复值函数 (特别情况, 是实值函数). 这时, 函数

$$R(s,t)=f(s)\overline{f(t)},\quad s,t\in T$$

是非负定的.

显然, 条件 (13) 是满足的.

注 4. 如果函数 $R=R(s,t)$ 在集合 $T\times T$ 上是非负定的, 则对任意的常数 $c\geqslant 0$, 函数 $cR(s,t)$ 也是非负定的. 设函数 $R_n=R_n(s,t)$ 是在集合 $T\times T$ 上是非负定的, $n=1,\cdots,N$, 这时, 函数 $\sum\limits_{n=1}^{N}R_n(s,t)$ 在 $T\times T$ 上也是非负定的. 如果当 $n\to\infty$ 时有 $R_n(s,t)\to R(s,t)$ 对每个 $s,t\in T$, 则函数 $R=R(s,t)$ 在集合 $T\times T$ 上是非负定的.

定义 10. 函数 $\varphi=\varphi(t),t\in T\subset\mathbb{R}$ 称作*非负定的*, 如果当 $s,t\in T$ 时 $s-t\in T$ 并且函数 $R(s,t)=\varphi(s-t)$ 是非负定的.

设 ξ 是实随机变量, 且它的特征函数 $\varphi=\varphi(t),t\in\mathbb{R}$. 很容易看出 φ 在 $\mathbb{R}$ 上是非负定的函数. 于是有

例 3. 下面的函数是在 $\mathbb{R}$ 上 L^2 – 过程的协方差函数:

$$r(s,t)=\cos(s-t),r(s,t)=\exp\{ia(s-t)-(s-t)^2\sigma^2/2\},\text{ 这里, } a\in\mathbb{R},\sigma\geqslant 0,$$
$$r(s,t)=\exp\{-\lambda|s-t|\},r(s,t)=\exp\{\lambda(\exp\{i(s-t)\}-1)\},\text{ 这里, } \lambda>0,$$
$$r(s,t)=(a-b|s-t|)\mathbf{1}_{[-a/b,a/b]}(s-t),\text{ 这里 } a\geqslant 0,b>0.$$

由于定理 4, 不难验证上面的例子都是不同 Gauss 过程的协方差函数.

在第七章, 我们将回来研究这样的随机过程: 它的协方差函数是依赖于自变量之差的.

§7. 函数的非负定性质是与一类重要的希尔伯特 (Hilbert) 空间特性相联系的.

定义 11. 函数 $K:T\times T\to\mathbb{C}$, 称作 Hilbert 空间 H (由定义在 T 上, 复值函数所组成) 的*再生核*, 如果满足

1°. 对任意的 $t\in T$, 有 $K(t,\cdot)\in H$,

2°. 对任意的 $f\in H$ 和 $t\in T$ 有 $\langle f,K(t,\cdot)\rangle=f(t)$,

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 H 中的数量积 (内积).

定理 5 (阿龙扎扬 (Aronszajn)). *复值函数 K 是某个 Hilbert 空间的再生核的充分必要条件是它是非负定的.*

证. 必要性. 设 K 是再生核. 对任意的 $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, 有

$$\sum_{j,q=1}^{n} z_j \overline{z}_q K(t_j, t_q) = \sum_{j,q=1}^{n} z_j \overline{z}_q \langle K(t_j, \cdot), K(t_q, \cdot)\rangle = \left\|\sum_{j=1}^{n} z_j K(t_j, \cdot)\right\|^2 \geqslant 0,$$

这里 $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle, u \in H$.

充分性. 设 K 是在 $T \times T$ 上的非负定函数. 研究 $\mathrm{Lin}(K)$ —— 函数 $K(t, \cdot), t \in T$ 的线性组合. 对 $f, g \in \mathrm{Lin}(K)$, 即对如下形式的函数

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j K(t_j, \cdot), \quad g = \sum_{q=1}^{m} b_q K(s_q, \cdot), \tag{18}$$

这里 $a_j, b_q \in \mathbb{C}, t_j, t_q \in T(j = 1, \cdots, n; q = 1, \cdots, m; n, m \in \mathbb{N})$, 有

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_j \overline{b}_q K(t_j, s_q). \tag{19}$$

特别地,

$$\langle f, K(s_q, \cdot)\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j K(t_j, s_q) = f(s_q). \tag{20}$$

既然 s_q 是 T 中任意点, 于是得到对任意的函数 $f \in \mathrm{Lin}(K)$ 性质 2° 成立. 除此之外, $\langle f, f\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} f(t_j)\overline{a}_j$, 因此对 $f \equiv 0$ 有 $\langle f, f\rangle = 0$.

对 $\alpha \in \mathbb{R}$, 研究二次三项式 $\langle \alpha f + g, \alpha f + g\rangle \geqslant 0$ 的判别式, 利用标准的方法得到**柯西 (Cauchy)– 布尼亚科夫斯基 (Bunyakovskii)– 施瓦茨 (Schwarz)** 不等式

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|, \tag{21}$$

这里 $\|h\| := \langle h, h\rangle^{1/2}$, 而元素 $f, g, h \in \mathrm{Lin}(K)$.

注意, 函数 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 在 $\mathrm{Lin}(K)$ 上具有数量积的所有性质. 设对 $f \in \mathrm{Lin}(K)$ 有 $\langle f, f\rangle = 0$, 这时根据 (21) 式, 对任意的 $g \in \mathrm{Lin}(K)$ 有 $\langle f, g\rangle = 0$. 由 (20) 式可以看出对 T 中任意点 s_q 有 $f(s_q) = 0$. 因此, 由 $\langle f, f\rangle = 0$ 导出 $f \equiv 0$. 数量积的其他性质是显然的. 应该强调的是, 在公式 (19) 的给出是适定的, 即 $\langle f, g\rangle$ 不依赖 f 和 g 在 (18) 式中表现形式. 事实上, 如果对 $\mathrm{Lin}(K)$ 中元素有 $f(t) = \widetilde{f}(t)$ 和 $g(t) = \widetilde{g}(t)$ 对所有的 $t \in T$, 则有

$$|\langle f, g\rangle - \langle \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle| = |\langle f - \widetilde{f}, g\rangle + \langle \widetilde{f}, g - \widetilde{g}\rangle| \leqslant \|f - \widetilde{f}\|\|g\| + \|\widetilde{f}\|\|g - \widetilde{g}\|,$$

而正如前所述, 有 $\|f - \widetilde{f}\| = \|g - \widetilde{g}\| = 0$.

依范数 $\|\cdot\|$ 将 $\mathrm{Lin}(K)$ 完备化. 研究 "等价" 的基本序列类 (参见, 例如, [35; 第 2 章, §3, 第 4 段]).

设 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是在 $\mathrm{Lin}(K)$ 中函数的基本序列, 即当 $n,m\to\infty$ 时, $\|f_n-f_m\|\to 0$. 利用 (21) 式, 对每个 $t\in T$ 有

$$|f_n(t)-f_m(t)|=|\langle f_n-f_m,K(t,\cdot)\rangle|\leqslant\|f_n-f_m\|(K(t,t))^{1/2},$$

这里考虑到已证的性质 2°, 有 $\|K(t,\cdot)\|^2=\langle K(t,\cdot),K(t,\cdot)\rangle=K(t,t)$ (对 $\mathrm{Lin}(K)$ 中的函数). 这样, $\mathrm{Lin}(K)$ 中序列 $\{f_n(t)\}_{n\geqslant 1}$ 决定唯一在 T 上函数 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)$.

如果 $\mathrm{Lin}(K)$ 中的基本序列 $\{f_n(\cdot)\}_{n\geqslant 1}$ 和 $\{g_n(\cdot)\}_{n\geqslant 1}$ 确定相对应的函数 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$, 则设

$$\langle f,g\rangle:=\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle.$$

很容易验证, 这个极限存在是不依赖于与给定函数 f 和 g 相对应的基本序列的选取. $\mathrm{Lin}(K)$ 的闭包记作 H, 这时函数 $f\in\mathrm{Lin}(K)$ 自然等于序列 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, 其中对每个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $f_n=f$. 现在不难相信, H 是 Hilbert 空间, 并以函数 K 为它的再生核. □

根据定理 4, 非负定函数类与协方差函数类相重合. 因此, *任意的协方差函数* $r(s,t),s,t\in T$, *可以看作具有数量积* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *的某个 Hilbert 空间* H *的再生核*. 从而

$$r(s,t)=\langle r(s,\cdot),r(t,\cdot)\rangle. \tag{22}$$

由定理 5 的证明可知, 由函数 $r(t,\cdot)$, 这里 $t\in T$, 线性组合的闭包所组成是如何的 "最小".

对 L^2 - 过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 用 $L^2[X]$ 表示 $\mathrm{Lin}(X)$ 在均方意义下的闭包, 即随机变量 $X(t),t\in T$ 线性组合的闭包.

定理 6 (帕尔赞 (Parzen)). *设* $X=\{X(t),t\in T\}$ *是概率空间* $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ *上, 中心化 (具有 0 中值和协方差函数* $r=r(s,t),s,t\in T$*) 的* L^2 - *过程. 设* H *是具有再生核* $r=r(s,t)$ *和数量积* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *的 "最小" Hilbert 空间. 这时, 在* $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ *上存在中心化的* L^2 - *过程* $Y=\{Y(h),h\in H\}$ *使得有*

$$X(t)=Y(r(t,\cdot)),\ \text{对每个}\ t\in T,$$

$$(Y(h),Y(g))=\langle h,g\rangle,\ \text{对任意的}\ h,g\in H,$$

这里随机变量等式成立是几乎处处的, 而对 $\xi,\eta\in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}),(\xi,\eta)=\mathsf{E}\xi\overline{\eta}$. *这时, 空间* $L^2[X]$ *和* H *是同构的.*

证. 对 $h=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kr(t_k,\cdot)\in H,c_k\in\mathbb{C},t_k\in T,k=1,\cdots,n,n\geqslant 1$, 设

$$Y(h)=\sum_{k=1}^{n}c_kX(t_k) \tag{23}$$

对函数 $h, g = \sum_{q=1}^{m} d_q r(t_q, \cdot)$, 这里 $d_q \in \mathbb{C}, s_q \in T, q = 1, \cdots, m, m \geqslant 1$ 有

$$(Y(h), Y(g)) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} c_k \overline{d}_q \mathsf{E}X(t_k)\overline{X}(t_q) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} c_k \overline{d}_q r(t_k, t_q) = \langle h, g\rangle.$$

不难看出, (23) 式的定义是具体的, 而且同构映射 $h \to Y(h)$ 可以从 $\mathrm{Lin}(K)$ 延拓到 H, 并保持原有的性质. □

§8. Wiener 过程是 Gauss 过程类中的一种过程

定理 7. Wiener 过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 的定义 (3) 等价于下面的:

1°. $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 是 Gauss 过程;

2°. $\mathsf{E}W(t) = 0, t \in [0, \infty)$;

3°. $\mathrm{cov}(W(t), W(s)) = \min\{s, t\}$, 这里 $s, t \in [0, \infty)$.

证. 首先根据定理 3, 具有 1°~3° 性质的过程是存在的. 事实上, 由公式 (6) 看出 Wiener 过程有协方差函数 $r(s, t) = \min\{s, t\}$, 这里 $s, t \in [0, \infty)$. 因此, 由 (12) 式得出这函数是非负定的.

设过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 满足条件 1°~3°, 验证满足定义 3 中的 1)~3).

性质 1) 显然的, 因为 $\mathsf{D}W(0) = \mathrm{cov}(W(0), W(0)) = \min\{0, 0\} = 0$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中 Gauss 向量 $Y \sim \mathsf{N}(a, C)$ 和具有实 (非随机) 元素的矩阵 $A = (a_{k,m})_{k,m=1}^{n}$, 由 (7) 式和 (3) 式有

$$AY \sim \mathsf{N}(Aa, ACA), \tag{24}$$

设 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$. 选取矩阵 A, 使得将 Gauss 随机向量 $(W(0), W(t_1), \cdots, W(t_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 变换为:

$$\begin{pmatrix} W(0) \\ W(t_1) - W(0) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \cdots\cdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(0) \\ W(t_1) \\ W(t_2) \\ \cdots \\ W(t_n) \end{pmatrix}.$$

根据 (24) 式, 向量 $(W(0), W(t_1) - W(0), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1}))$ 是 Gauss 的.

复 Gauss 向量的坐标是相互独立的当且仅当协方差矩阵是对角形的. (这是由于随机向量有独立的坐标当且仅当它的特征函数能分解为坐标的特征函数的乘积; 对 Gauss 向量需要利用公式 (7).) 在我们的情况, 这个 "对角" 的性质是满足的, 因为

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(W(t_{k+1}) - W(t_k), W(t_{m+1}) - W(t_m)) &= \min\{t_{k+1}, t_{m+1}\} - \min\{t_{k+1}, t_m\} \\ &\quad - \min\{t_k, t_{m+1}\} + \min\{t_k, t_m\} = 0, \quad 当\ k \neq m. \end{aligned} \tag{25}$$

因此, 已经构造出的过程是独立增量的, 即性质 2) 成立. 随机变量 $W(t)-W(s)$ 有 Gauss (正态) 分布 (它是由 Gauss 向量的部分坐标组合而成的向量, 所以也是 Gauss 的), 且均值为 0, 类似 (25) 式可以找到 $\mathsf{D}(W(t)-W(s))=t-s$, 对 $t\geqslant s$. 这样, 性质 3) 成立.

相反的, 设过程 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 满足定义 3. 这时, 成立 (6) 式, 即条件 2° 和 3° 成立. 重新利用 (24) 式, 得到过程 W 的 Gauss 性, 即 1°. □

§9. 我们来说明如何给出具有以概率 1 轨道连续的 Wiener 过程的显式构造.

首先构造在区间 $[0,1]$ 上的过程. 为此, 引入 Haar *函数系* $H_k(t), t\in[0,1], k=1,2,\cdots$:

$$H_1(t)\equiv 1,\quad H_2(t)=\mathbf{1}_{[0,1/2]}(t)-\mathbf{1}_{(1/2,1]}(t),\quad \cdots,$$
$$H_k(t)=2^{n/2}(\mathbf{1}_{I_{n,k}}(t)-\mathbf{1}_{J_{n,k}}(t)),\quad 2^n<k\leqslant 2^{n+1},$$

这里

$$I_{n,k}=[a_{n,k},a_{n,k}+2^{-n-1}],\quad J_{n,k}=(a_{n,k}+2^{-n-1},a_{n,k}+2^{-n}],$$
$$a_{n,k}=2^{-n}(k-2^n-1)\quad (n\in\mathbb{N})$$

(参见图 6, 对 $k>2$).

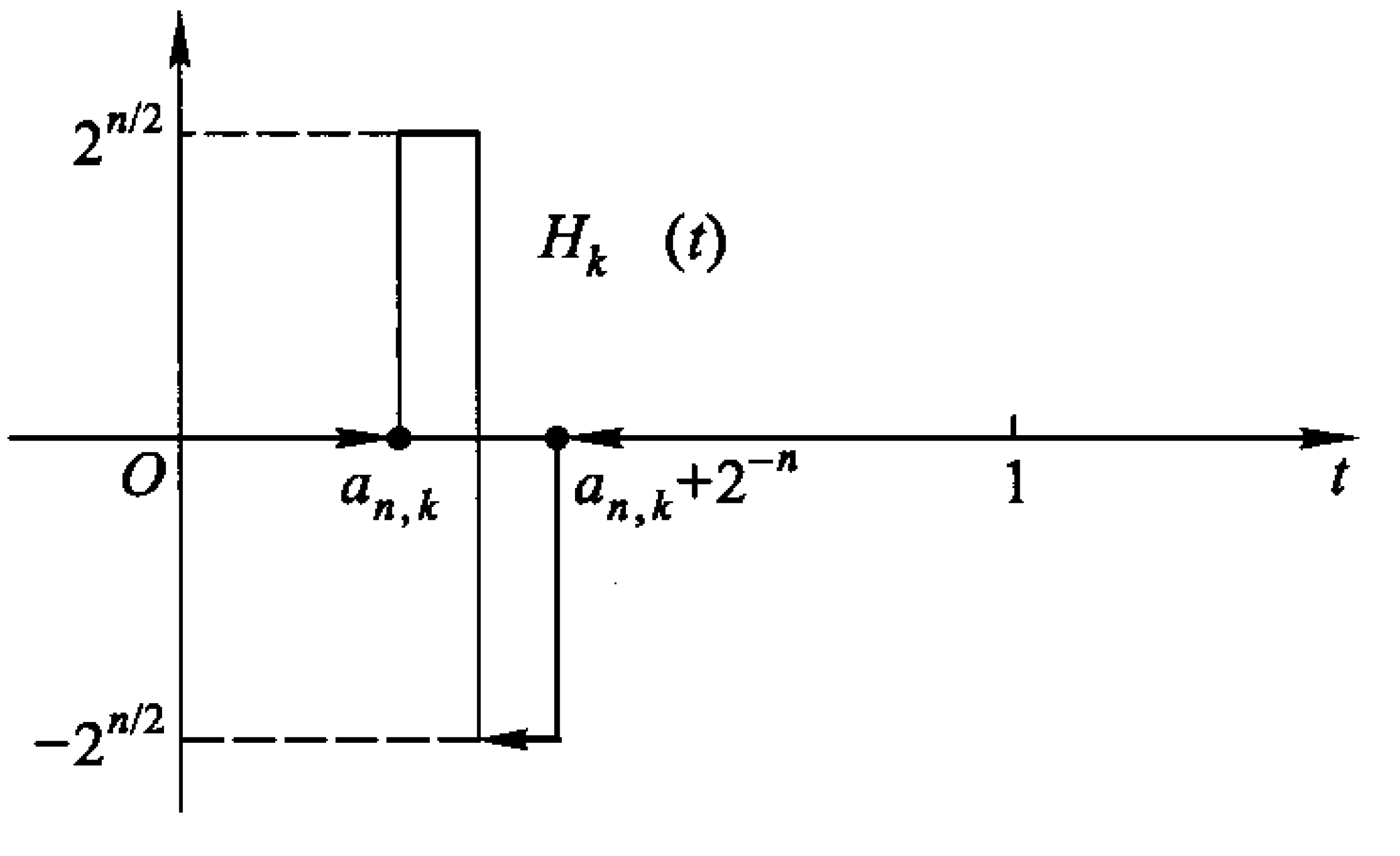


图 6

函数系 $\{H_k\}$ 在具有 Lebesgue 测度 $L^2([0,1])$ 空间中是*完备的标准正交系*, 其内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt,\quad f,g\in L^2([0,1]).$$

事实上, 函数系 $\{H_k\}$ 的标准正交性是显然的, 而完备性是因为利用该系中函数 H_k 的线性组合, 可以表示出以 2 进位有理数为区间端点的*示性函数*, 例如,

$$\mathbf{1}_{[0,1/2]}=(H_1+H_2)/2,\quad \mathbf{1}_{(1/2,1]}=(H_1-H_2)/2,$$
$$\mathbf{1}_{(0,1/4]}=(\mathbf{1}_{[0,1/2]}+(1/\sqrt{2})H_2)/2,\quad \mathbf{1}_{(1/4,1/2]}=(\mathbf{1}_{[0,1/2]}-(1/\sqrt{2})H_2)/2,\cdots,$$
$$\mathbf{1}_{[a_{n,k},a_{n,k}+2^{-n-1}]}=(\mathbf{1}_{[a_{n,k},a_{n,k}+2^{-n}]}+2^{-n/2}H_k)/2,\ \text{对}\ 2^n<k\leqslant 2^{n+1}.$$

因此, 任意的函数 $f \in L^2([0,1])$ 可以表示成

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k \rangle H_k, \tag{26}$$

这里, (26) 式右边级数的收敛性是在 $L^2([0,1])$ 中. 同样, 根据帕塞瓦尔 (Parseval) 等式有

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, H_k \rangle \langle g, H_k \rangle. \tag{27}$$

现在, 利用 Haar 函数来定义绍德尔 (Schauder) 函数 (参见图 7):

$$S_k(t) = \int_0^t H_k(y)dy \equiv \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, H_k \rangle, \quad t \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}.$$

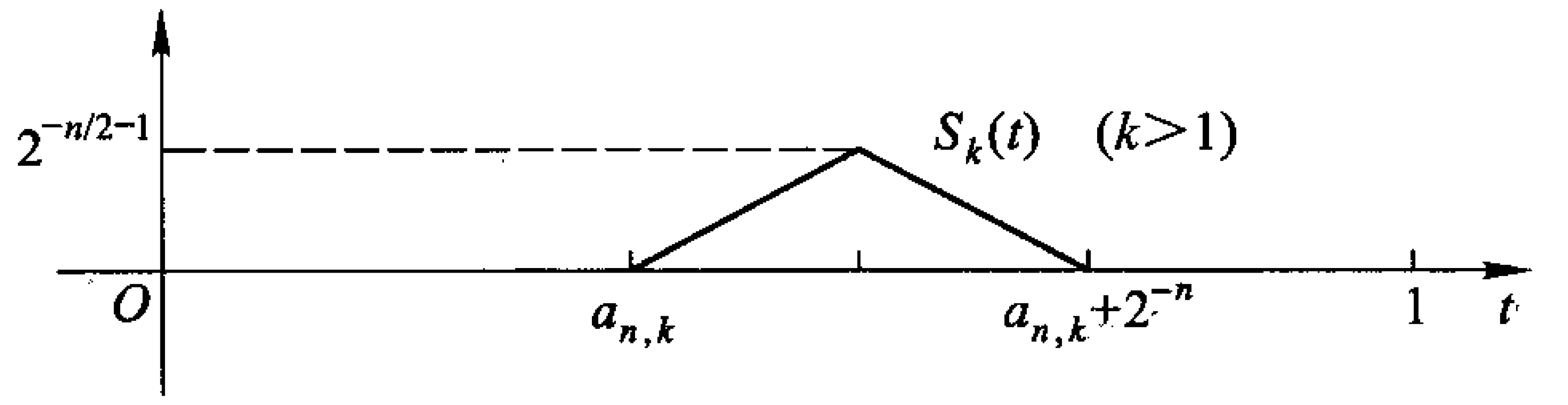


图 7

今后, 我们需要下面 2 个引理.

引理 2. 设数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, 当 $k \to \infty$, 对某个 $\varepsilon < 1/2$ 有 $a_k = O(k^{\varepsilon})$, 这时, 在 $[0,1]$ 上级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k S_k(t)$ 一致收敛, 且极限是 $[0,1]$ 上连续函数.

证. 由于, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $t \geqslant 0, S_k(t) \geqslant 0$, 只需要证

$$R_m = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k>2^m} |a_k| S_k(t) \to 0, \text{ 当 } m \to \infty.$$

我们有, 对每个 $k \geqslant 1$ 和某个 $c > 0$ 有 $|a_k| \leqslant ck^{\varepsilon}$. 因此, 对所有的 $t \in [0,1]$ 和 $n \geqslant 1$ 有

$$\sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} |a_k| S_k(t) \leqslant c2^{(n+1)\varepsilon} \sum_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} S_k(t) \leqslant c2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-n/2-1} \leqslant c2^{\varepsilon-n(1/2-\varepsilon)};$$

我们考虑到 t 仅仅只是在一个不相交的函数 S_k 支撑中, $2^n < k \leqslant 2^{n+1}$, 则对 k 有 $0 \leqslant S_k(t) \leqslant 2^{-n/2-1}$. 根据条件 $\varepsilon < 1/2$, 于是, 当 $m \to \infty$ 时, 有

$$R_m \leqslant c2^{\varepsilon} \sum_{n\geqslant m} 2^{-n(1/2-\varepsilon)} \to 0. \quad \square$$

引理 3. 设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上 (不一定是独立的) 随机变量序列 $\xi_k\sim\mathsf{N}(0,1)$, $k\in\mathbb{N}$. 这时, 对任意的 $c>2^{1/2}$ 和 P - 几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 可以找到 $N_0=N_0(\omega,c)\in\mathbb{N}$, 使得, 对所有的 $k\geqslant N_0$, 有 $|\xi_k(\omega)|<c(\ln k)^{1/2}$.

证. 对 $\xi\sim\mathsf{N}(0,1)$ 和任意的 $x>0$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\xi\geqslant x)&=(2\pi)^{-1/2}\int_x^\infty \exp\{-y^2/2\}dy=(2\pi)^{-1/2}\int_x^\infty(-1/y)d(\mathrm{e}^{-y^2/2})\\&=(2\pi)^{-1/2}\left(x^{-1}e^{-x^2/2}-\int_x^\infty y^{-2}e^{-y^2/2}dy\right)\leqslant x^{-1}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}.\end{aligned}\qquad(28)$$

从而, 对任意的 $x>0$

$$\mathsf{P}(|\xi|\geqslant x)\leqslant x^{-1}(2/\pi)^{1/2}e^{-x^2/2}.\qquad(29)$$

因此, 对 $c>2^{1/2}$

$$\sum_{k\geqslant 2}\mathsf{P}(|\xi_k|\geqslant c(\ln k)^{1/2})\leqslant c^{-1}(2/\pi)^{1/2}\sum_{k\geqslant 2}k^{-c^2/2}(\ln k)^{-1/2}<\infty.$$

根据 Borel – Cantelli 引理 (参见, [85]; 第 1 卷, p.327) 所指出的: 如果 $\sum\limits_k\mathsf{P}(A_k)<\infty$, 则无穷多个事件 A_k 发生只是 0 概率, 即 $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_n\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k\right)=0$. 由此可得结论. □

值得注意的是, 与 (28) 式同时有下面的估计式:

$$\mathsf{P}(\xi\geqslant x)\sim x^{-1}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2},\quad 当\ x\to\infty.\qquad(30)$$

§10. 借助于独立的标准 Gauss 随机变量序列 (在区间 $[0,1]$ 上) 来构造 Weiner 过程.

定理 8. 设 $\{\xi_k\}_{k\geqslant1}$ 是在某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上具有标准正态分布 $\mathsf{N}(0,1)$ 的独立随机变量序列. 假设对 $t\in[0,1],\omega\in\Omega$, 有

$$W(t,\omega)=\sum_{k=1}^\infty\xi_k(\omega)S_k(t).\qquad(31)$$

这时, $W=\{W(t),t\in[0,1]\}$ 是在 $[0,1]$ 上的 Weiner 过程, 且以概率 1 具有连续的轨道.

证. 根据引理 2 和 3, 级数 (31) 在 $[0,1]$ 上几乎处处一致收敛和级数 (31) 构造出过程 $W=\{W(t),t\in[0,1]\}$ 具有几乎处处连续轨道. 现在需要验证满足定理 7 中的条件 1°~3°. 为此, 首先要证级数 (31) 不仅在 $[0,1]$ 上几乎处处一致收敛, 而且对每个 $t\in[0,1]$ 是均方收敛.

对 $n, m \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,1]$, 设 $Z_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k S_k(t)$, 于是

$$\mathsf{E}|Z_{n+m}(t) - Z_n(t)|^2 = \mathsf{E}\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k S_k(t)\right|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+m}\sum_{l=n+1}^{n+m} S_k(t)S_l(t)\mathsf{E}\xi_k\xi_l$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+m} S_k^2(t).$$

我们有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k^2(t) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}(2^{-k/2-1})^2 < \infty$. 因此, 在完备的 $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间保证对每个 $t \in [0,1]$, 序列 $\{Z_n(t)\}$ 存在 L^2 - 极限 $Z(t)$, 即当 $n \to \infty$ 时, 有 $\mathsf{E}|Z_n(t) - Z(t)|^2 \to 0$. 由 (31) 式可知对每个 $t \in [0,1]$ 当 $n \to \infty$ 时有 $Z_n(t) \to W(t)$ 几乎处处. 因此, 有 $Z(t) = W(t)$ 几乎处处. 因为 (参见, 例如, [85; 第 1 卷, p.328]) 不管是几乎处处收敛, 还是均方收敛都导出依概率收敛, 而依概率收敛随机变量序列的极限是唯一的 (准确到 "等价"). 这样, 当 $n \to \infty$ 时, 对 $t \in [0,1]$, 有 $Z_n(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} W(t)$.

我们求由 (31) 式所定义过程 W 的中值和协方差函数. 既然, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t \in [0,1]$ 有 $\mathsf{E}Z_n(t) = 0$, 则当 $n \to \infty$ 时有

$$|\mathsf{E}W(t)| = |\mathsf{E}W(t) - \mathsf{E}Z_n(t)| \leqslant (\mathsf{E}|W(t) - Z_n(t)|^2)^{1/2} \to 0.$$

因此, 对所有的 $t \in [0,1]$, 有 $\mathsf{E}W(t) = 0$.

注意数量积的连续性, 于是对任意的 $s, t \in [0,1]$ 有

$$(Z_n(s), Z_n(t))_{L^2(\Omega)} \to (W(s), W(t))_{L^2(\Omega)} = \mathsf{E}W(s)W(t) = \operatorname{cov}(W(s)W(t)).$$

由于序列 $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ 的元素是独立的和等式 $\mathsf{E}\xi_k^2 = 1, k \in \mathbb{N}$, 于是有

$$(Z_n(s), Z_n(t))_{L^2(\Omega)} = \mathsf{E}Z_n(s)Z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} S_k(s)S_k(t)\mathsf{E}\xi_k^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} S_k(s)S_k(t), \text{ 当 } n \to \infty.$$

根据 (27) 式 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k(s)S_k(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle H_k, \mathbf{1}_{[0,s]}\rangle\langle H_k, \mathbf{1}_{[0,t]}\rangle = \langle \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]}\rangle = \min\{s,t\}$. 因此 $\operatorname{cov}(W(s), W(t)) = \min\{s,t\}$.

最后, 利用引理 1 来验证构造出的过程 W 是 Gauss 的.

取 $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n, t_1, \cdots, t_n \in [0,1]$, 研究随机变量 $Y = \sum\limits_{m=1}^{n} \tau_m W(t_m)$, 显然有

$$Y = \sum_{m=1}^{n} \tau_m \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k(t_m) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi_k, \tag{32}$$

这里 $b_k = b_k(\tau_1, \cdots, \tau_n; t_1, \cdots, t_n) = \sum\limits_{m=1}^{n} \tau_m S_k(t_m)$, 而级数 (32) 右边既几乎处处收敛又是 $L^2(\Omega)$ 收敛 (因为级数的部分和具有这个性质). 注意, $Y_N = \sum\limits_{k=1}^{N} b_k\xi_k \sim$

$\mathsf{N}(0,\sigma_N^2)$, 这里 $\sigma_N^2=\sum\limits_{k=1}^{N}b_k^2$, 于是得到 $\mathsf{E}Y_N^2=\sigma_N^2\to\mathsf{E}Y^2=\sigma^2$ (在 $L^2(\Omega)$ 中元素的收敛导致它们范数的收敛). 由于几乎处处收敛性又是 $L^2(\Omega)$ 中收敛性导致随机变量 Y_N 依分布收敛到随机变量 Y (用 $Y_N\xrightarrow{\mathscr{D}}Y$ 或 $Y_N\xrightarrow{\text{Law}}Y$ 来表示). 于是当 $N\to\infty$ 时, 有

$$\varphi_{Y_N}(\lambda)=\exp\{-\sigma_N^2\lambda^2/2\}\to\exp\{-\sigma^2\lambda^2/2\}=\varphi_Y(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

即 $Y\sim\mathsf{N}(0,\sigma^2)$. 这样构造出的过程 W 是 Gauss 的. 定理得证. □

由第一章的定理 7 得出, $W=\{W(t),t\in[0,1]\}$ (和任意它的修正) 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(C([0,1]))$ – 可测的随机元.

定义 12. 构造出随机元 $W=\{W(t),t\in[0,1]\}$在 σ – 代数 $\mathscr{B}(C([0,1]))$ 上的概率分布称作 Wiener 测度用 $\mathbb{W}$ 来表示.

§11. 现在构造 $[0,\infty)$ 上 Wiener 过程 W. 利用第一章定理 2, 在某个完全概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上给出独立随机元 $W_n=\{W_n(t),t\in[0,1]\};n\in\mathbb{N}$ 序列, 且对 $\omega\in\Omega$ 和在 $\mathscr{B}(C([0,1]))$ 上的 $\mathsf{P}_{W_n}=\mathbb{W},W_n(\cdot,\omega)\in C([0,1])$.

借助于过程 W_n 连续 "粘合" 来定义在 $[0,\infty)$ 上的过程 W, 即设

$$W(t,\omega)=\begin{cases}W_1(t,\omega) & \text{对 } t\in[0,1),\\ \sum\limits_{j=1}^{k}W_j(1,\omega)+W_{k+1}(t-k,\omega) & \text{对 } t\in[k,k+1),k\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{33}$$

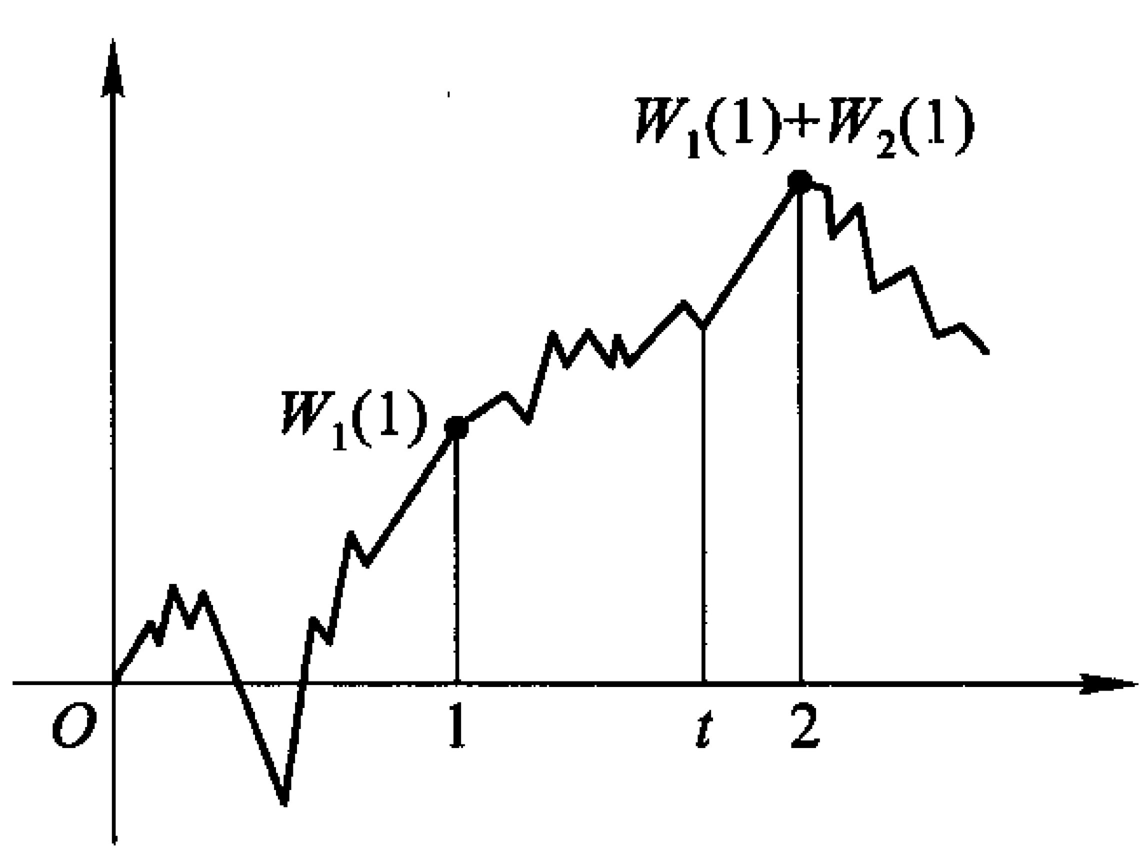


图 8

定理 9. 由公式 (33) 所定义的过程 W 是在 $[0,\infty)$ 上的 Wiener 过程. 这个过程的所有轨道是连续的.

证. 根据构造过程 W 轨道是连续的、显然的, 且 $W(0)=0$. 验证过程 W 具有独立增量, 且对 $0\leqslant s<t<\infty$ 有 $W(t)-W(s)\sim\mathsf{N}(0,t-s)$.

如果, 对某个 $k\geqslant 0,s,t\in[k,k+1)$, 则

$$W(t)-W(s)=W_{k+1}(t-k)-W_{k+1}(s-k)\sim\mathsf{N}(0,t-s).$$

如果 $s \in [k, k+1)$, 而 $t \in [m, m+1)$, 这里 $k < m$, 则

$$[s,t) = [s,k+1) \bigcup \bigcup_{k<l<m} [l,l+1) \bigcup [m,t) \left(\bigcup_{l \in \phi} [l,l+1) = \phi \right)$$

(参见, 图 9). 因此,

$$\begin{aligned} W(t) - W(s) &= W(k+1) - W(s) + \sum_{k<l<m} (W(l+1) - W(l)) + W(t) - W(m) \\ &= \zeta_k + \sum_{k<l<m} \zeta_l + \zeta_m. \end{aligned} \tag{34}$$

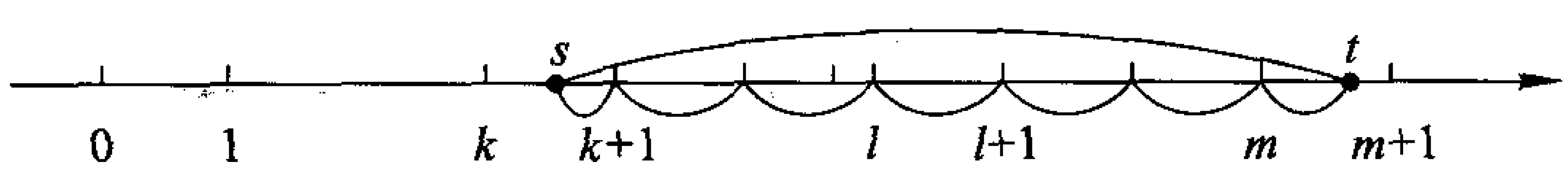


图 9

注意, 随机变量 $\zeta_k, \cdots, \zeta_m$ 是独立的, 且 $\zeta_i \sim \mathsf{N}(0, \sigma_i^2), i = k, \cdots, m$, 因此 $\zeta_k + \cdots + \zeta_m \sim \mathsf{N}\left(0, \sum_{i=k}^{m} \sigma_k^2\right)$. 从而 $W(t) - W(s)$ 的分布是正态的 $\mathsf{N}(0, t-s)$.

考虑到, 选取由彼此不相交独立随机变量作变量的可测函数, 它们是独立的, 类似的讨论可以验证过程 W 有独立增量. □

今后, 都假定所研究的 Wiener 过程都是几乎处处的轨道是连续的.

补充与习题

对两类具有代表性的独立增量过程 —— Brown 运动和 Poisson 过程 (在第二章已经给出了定义) 作进一步的研究.

1. 试求具有强度为 λ 的 Poisson 过程的协方差函数, 试与 Wiener 过程的协方差函数比较.

2. 设 $r = r(s,t)$ 是非负定函数 ($s, t \in T$, 这里 T 为某个集合). 是否存在非 Gauss 过程 $X = \{X_t, t \in T\}$, 且对所有的 $s, t \in T$ 有 $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = r(s,t)$?

3. 试证, 如果 $P_n(z_1, \cdots, z_m)$ 是具有正系数的 n 阶多项式 (m 个变量), $r_k(s,t)$ ($k = 1, \cdots, m; s, t \in T$) 是协方差函数, 则 $P_n(r_1(s,t), \cdots, r_m(s,t))$ 同样是协方差函数.

4. 设在空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上 L^2 - 过程 $X = \{X_t, t \in T\}$, $L^2[X]$ 表示在空间 $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中所有 $X_t, t \in T$ 线性组合的闭包. 试证, 如果 X 为 Gauss 过程, 则 $L^2[X]$ 是 Gauss 系, 即对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的 $Y_1, \cdots, Y_n \in L^2[X]$, 向量 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 具有 Gauss 分布.

5. (**自动模式性质**). 设 $W=\{W_t, t\geqslant 0\}$ 为 Wiener 过程, c 为正常数. 试证, 过程 $X=\left\{X(t)=\dfrac{1}{\sqrt{c}}X(ct), t\geqslant 0\right\}$ 是 Wiener 过程.

6. 试证定理 8, 即验证 Wiener 过程的原始定义, 也就是说在定理 8 中由公式 (31) 给出的过程具有独立增量. 根据 Doob 定理 (参见附录 5), 这个过程有连续轨道时自然而然的是 Gauss 的.

研究在第一章例 1 中, 在 $\mathbb{R}^m$ 中的随机游动, 即过程部分和 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$, 这里 $S_n=S_0+\xi_1+\cdots+\xi_n, n\geqslant 1$, 和 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 为独立同分布随机向量. 设 $S_0=0$. 许多场合关心的是, 游动的轨道充满空间 $\mathbb{R}^m$ 的那一部分, 以什么样的概率达到这个或另外一个集合等问题. 这类问题的经典例子是在概率论教程中的赌徒破产问题 (参见, [85; 第 1 卷, p.109], 同样参见第四章例 7). 在读过第六章关于马氏过程以后, 回到下面给出随机游动的一些结果将是非常有益处的. 为此, 我们需要一些概念.

定义 13. 称作在 $\mathbb{R}^m$ 中 Borel 集合 B, 过程 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$ 的占位 (**随机的**) 测度是随机变量

$$\mu(B)=\sum_{n\geqslant 0}\mathbf{1}_{\{S_n\in B\}}.$$

与这测度 $\mu=\mu(\cdot)$ 相对应的强度 (非随机的) 测度 $\nu=\nu(\cdot)$ 由下面公式给出:

$$\nu(B)=\mathsf{E}\mu(B)=\sum_{n\geqslant 0}\mathsf{P}(S_n\in B),\quad B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m).$$

定义 14. $V_\varepsilon(x)$ 表示在 $\mathbb{R}^m$ 中以点 x 为中心以 $\varepsilon>0$ 为半径的开球, 引入下面的集合:

$$R=\bigcap_{\varepsilon>0}\{x\in\mathbb{R}^m:\mu(V_\varepsilon(x))=\infty\} \text{ —— 常返集},$$

$$M=\bigcap_{\varepsilon>0}\{x\in\mathbb{R}^m:\nu(V_\varepsilon(x))=\infty\} \text{ —— 平均常返集},$$

$$A=\bigcap_{\varepsilon>0}\{x\in\mathbb{R}^m:\nu(V_\varepsilon(x))>0\} \text{ —— 可达集}.$$

定理 10 (关于二分法; 参见, 例如, [146; p.137]). 在 $\mathbb{R}^m$ 中, 根据 (I.9) 定义的随机游动 S 的实现仅仅是下面两种情况之一:

1) $R=M=A$ 和该集合是在 $\mathbb{R}^m$ 中的闭半群.

2) $R=M=\varnothing$ 和当 $n\to\infty$ 时, 几乎处处 $|S_n|\to\infty$.

定义 15. 随机游动称作常返的, 如果在定理 10 中有性质 1) 成立, 和非常返的 (或暂留的), 如果性质 2) 成立.

7. 试证, 如果 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$ 是在 $\mathbb{R}^m$ 中常返的随机游动, 则对每个 $k\in\mathbb{N}$, 游动 $S^{(k)}=\{S_{nk}, n\geqslant 0\}$ 同样是.

下面是**钟开莱 (Chung) – 富克斯 (Fuks)** 给出的随机游动常返准则.

定理 11 **(关于常返性; 参见, 例如, [146; p.139]).** 在 $\mathbb{R}^m$ 中, 随机游动 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}, S_0=0, S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n, n\geqslant 1$ 是常返的当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\sup_{0<r<1}\int_{V_\varepsilon(0)}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-rf(t)}\right)dt=\infty;$$

这里 $f(t), t\in\mathbb{R}^m$ 是随机向量 ξ_1 的特征函数.

8. 设随机变量 ξ_1 在 $\mathbb{R}$ 中具有参数为 $\alpha\in(0,2]$ 的对称稳定分布, 即设

$$f(t)=\mathsf{E}e^{it\xi_1}=e^{-c|t|^\alpha},\quad t\in\mathbb{R},\quad c>0. \tag{35}$$

试证这样的 α - 稳定随机游动, 当 $\alpha\geqslant 1$ 是常返的, 当 $\alpha<1$ 是暂留的.

9. 设 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$ 是在 $\mathbb{R}^m(m\geqslant 2)$ 中的随机游动, 且向量 ξ_1 的各个坐标是独立的, 具有 α - 稳定分布 (参见习题 8). 试证明, 当 α 是什么样值时候是常返的, 又是什么样值时候是暂留的.

被称作在 $\mathbb{R}^m$ 中**随机游动** $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$ **的对称化**是序列 $\widetilde{S}=\{\widetilde{S}_n, n\geqslant 0\}$, 它与序列 $\{S_n-S'_n, n\geqslant 0\}$ 同分布, 这里 $S'_n=\{S'_n, n\geqslant 0\}$ 是序列 $\{S_n\}$ 的独立复制品 (可以认为是构造序列 $\{\xi_n, n\geqslant 0\}$ 的独立复制品 $\{\xi'_n, n\geqslant 0\}$, 且 $S'_0=0, S'_n=\sum\limits_{j=1}^n\xi'_j, n\in\mathbb{N}$).

10. 试证, 如果随机游动 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$ 是常返的, 则随机游动的对称化 $\widetilde{S}=\{\widetilde{S}_n, n\geqslant 0\}$ 也是常返的.

11. 试证, 在 $\mathbb{R}^m$ 中随机游动 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$, 如果

a) 当 $m=1$ 时 $n\to\infty, n^{-1}S_n\xrightarrow{\mathsf{P}}0$;

b) $\mathsf{E}\xi_1=0$ 和 $\mathsf{E}|\xi_1|^2<\infty$, 当 $m=2$. 则是常返的. 试举例说明这条件是充分的但不是必要的.

定义 16. 最小闭集 $F\subset\mathsf{S}$, 使得 $\lambda(\mathsf{S}\backslash F)=0$ 称作拓扑空间 S 的 Borel σ - 代数上测度 λ 的**支撑**.

12. 设 $S=\{S_n, n\geqslant 0\}$ 是在 $\mathbb{R}$ 中的随机游动, 且 ξ_1 具有对称非退化分布, 且有有限的支撑. 试证, 这样的随机游动是常返的.

定义 17. 由测度 P_{ξ_1} 的支撑线性闭包所产生的子空间, 在 $\mathbb{R}^m$ 的维数称作随机游动 (I.9) 的**有效维数**.

13. 试证, 如果随机游动的有效维数不小于 3, 则随机游动是暂留的.

在 $\mathbb{R}^m$ 中随机游动具有

$$\mathsf{P}(\xi_1=e_i)=\mathsf{P}(\xi_1=-e_i)=(2m)^{-1},\quad i=1,\cdots,m,$$

这里向量 e_i 的第 i 个坐标为 1, 其他为 0. 称作在 $\mathbb{R}^m$ 中最简单的对称随机游动. 这种游动可以模拟 "粒子" 运动, 它在任意的坐标轴上任意的方向, 都以相同的概率移动 1 个单位.

由习题 13 的结果得到著名的波利亚 (Polya) 准则 (参见; [78; 第 1 卷, p.374]), 即在 $\mathbb{R}^m$ 中最简单的对称随机游动, 当 $m \geqslant 3$ 时, 是非常返的. 在 [78] 中, 证明了, 当 $m=1$ 和 $m=2$ 这样的随机游动是常返的 (为此, 费勒 (Feller) 指出 "条条道路通罗马").

14. (与前面关于随机游动结果相比较). 试证, 在 $\mathbb{R}^m$ 中最简单的对称随机游动所描述的粒子轨道, 以概率 1 有无数次自相交, 即以概率 1 粒子遇到它以前曾经到过的位置.

在瓦尔德 (Wald) 统计序列分析中, 随机游动找到了重要的应用. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 是在 $\mathbb{R}^m$ 中的独立同分布随机向量, 对它们提出两个假设:

$H_0 : X_1$ 的概率分布密度为 $p_0(x), x \in \mathbb{R}^m$,

$H_1 : X_1$ 的概率分布密度为 $p_1(x), x \in \mathbb{R}^m$.

要求根据 $X_j, j=1,\cdots$ 的观测来区分这两个假设. 假设密度 $p_i(x), i=0,1$ 是在 $\mathbb{R}^m$ 中的正函数, 引入对数似然比

$$S_n = \ln\left(\frac{p_1(X_1)\cdots p_1(X_n)}{p_0(X_1)\cdots p_0(X_n)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad \xi_j = \ln\left(\frac{p_1(X_j)}{p_0(X_j)}\right), \quad j,n \in \mathbb{N}.$$

Wald 对区分这两个假设问题的实质, 是选取两个 "边界" a, b 这里 $a < 0 < b$, 在点 (n, S_n) 是在带状区域 $\{(x,y) : X \geqslant 0, a < y < b\}$ 内以前, 不具备区分这两个假设的解 (与允许继续进行观测的**诺伊曼 (Neumann) – 皮尔逊 (Pearson)** 统计途径不同). 当随机游动首先穿过区域的上面 "边界" 时, 接受假设 H_1 作为解 (这时, 有 $S_n \geqslant b$), 而当随机游动首先穿过区域的下面 "边界" 时, 接受假设 H_0 作为解 (这时, 有 $S_n \leqslant a$). 在这里我们将不停留如何选取这些 "边界" 的问题, 对研究推广的例子, 参见小册子, 例如, [84].

15. 试证, 如果 $\mathsf{P}(\xi_1 \neq 0) = 0$, 则一维随机游动, 将以概率 1 穿出具有 "边界" (a, b) 的带状区域 $a < 0 < b$ (注意, $S_0 = 0$).

许许多多的著作都涉及随机游动, 参见, 例如, [74], [78; 第 1 卷, 第 14 章; 第 2 卷, 第 12 章], [123; 第 3 章], [146; 第 8 章]. 关于应用随机游动到数学储藏理论, 参见, 例如, [1]. 同样应提到在随机过程的理论中有着强发展趋势的方向 —— 在随机介质中的随机游动. 其模型的主要思想是粒子转移到新位置的概率本身是随机的, 且依赖于该粒子所在的位置 (参见, 例如, [141]). 还有相对于随机介质更复杂的模型, 例如, 与磁场相关的 (参见, 例如, [166], 以及那里的参考书目).

回顾, 根据 (I.56) 定义了随机过程在一点的随机连续, 而在一个集合的随机连续就是在该集合的每一点随机连续.

类似于著名的勒贝格 (Lebesgue) – 斯蒂尔切斯 (Stieltjes) 测度的分解定理, 即分解为离散的, 绝对连续的和奇异的部分 (参见, 例如, [35; p.410]), 有下面的定理 (参见, 例如, [73; p.163]).

定理 12 (Levy). 所有的独立增量随机过程 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 具有如下的表示:

$$X(t) = m(t) + Y(t) + Z(t), \quad t \geqslant 0,$$

这里 $m(t)$ 是非随机的函数, $Y = \{Y(t), t \geqslant 0\}$ 和 $Z = \{Z(t), t \geqslant 0\}$ 是独立的独立增量过程, 且 Y 是在 $[0, \infty)$ 上的随机连续过程, 而 Z 是纯离散随机过程, 即过程有如下形式:

$$Z(t) = \sum_k \xi_k^- \mathbf{1}_{\{t_k \leqslant t\}} + \sum_k \xi_k^+ \mathbf{1}_{\{t_k < t\}},$$

这里 $T = \{t_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是 $[0, \infty)$ 上的某个可数集合, 而 $\{\xi_k^-, \xi_k^+, k \in \mathbb{N}\}$ 是总体上独立的随机变量.

回到研究一类特殊的独立增量随机连续的实随机过程. 从三个简单的练习开始.

16. 设 $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ 是在每一点 $t \in [a, b]$ 上连续实随机过程. 这时, 随机过程 X 是在 $[a, b]$ 上一致随机连续的, 即对任意的 $\varepsilon, \gamma > 0$ 可以找到 $\Delta = \Delta(\varepsilon, \gamma) > 0$, 使得, 如果 $|s - t| \leqslant \Delta, s, t \in [a, b]$, 有

$$\mathsf{P}(|X_t - X_s| \geqslant \varepsilon) \leqslant \gamma. \tag{36}$$

除此之外, 随机过程 X 依概率有界, 即

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{t \in [a, b]} \mathsf{P}(|X_t| \geqslant c) = 0. \tag{37}$$

17 (奥坦韦安尼 (Ottaviani) 不等式). 设 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是独立实随机变量, 且对某个 $\alpha \in [0, 1), r \geqslant 0$, 对 $k = 1, \cdots, n$ 有

$$\mathsf{P}(|S_n - S_k| \geqslant r) \leqslant \alpha, \tag{38}$$

这里 $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$, 试证, 对所有的 $c \geqslant 0$ 有

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant r + c\right) \leqslant \frac{1}{1 - \alpha} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant c). \tag{39}$$

18. 设 $X = \{X_t, t \in [0, \infty)\}$ 是独立增量过程, 且在 $[0, \infty)$ 上随机连续, 试证

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \in M \cap [0, \infty)} |X_t| < \infty\right) = 1, \tag{40}$$

这里 M 是直线上二进位的有理数集.

定义 18. 定义在 $[0,\infty)$ 上在每点 $t\in(0,\infty)$ 都是右连 (连续) 左极 (极限存在) 的实函数全体 $D([0,\infty))$ 称作斯科罗霍德 (Skorokhod) 空间.

这个空间借助于特殊的距离 (参见, [2, §14]) 可以变成 Polish 空间. 这个空间中的函数通常称作*右连左极* (càdlàg) 函数 (它是由法语: continue à droite, limite à gauche(右连续, 左极限存在); 还用 rcll, 是由英语术语: right continuous, left – hand limits (右连续, 左极限存在) 而来).

借助于习题 16~18, 与后面将证明的 Doob 不等式 (第六章, 引理 6) 可以证明下面的定理 (参见, [39; 第 1 卷, p.70~72]).

定理 13. *在 $[0,\infty)$ 上随机连续的独立增量过程具有修正, 使得其轨道是在空间 $D([0,\infty))$ 中.*

19. 试证, Poisson 过程是在 $[0,\infty)$ 上随机连续的.

独立增量随机连续的实随机过程, 其有限维分布的刻画可借助于下面两个定理, 它们分别是属于辛钦 (Khinchin) 和莱维 (Levy) 的.

定理 14 (Khinchin 公式; 参见, 例如, [39; 第 1 卷, §16]). *设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 是独立增量随机连续的实随机过程. 这时, 对任意的 $t\geqslant 0$ 和所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 特征函数有*

$$\mathsf{E}\exp\{i\lambda X_t\}=\exp\left\{t\left(ia\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda,x)\nu(dx)\right)\right\}, \tag{41}$$

这里, $a\in\mathbb{R},\nu$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的有限测度, 和

$$g(\lambda,x)=\begin{cases}(\exp\{i\lambda x\}-1-i\lambda\sin x)(1+x^2)/x^2, & x\neq 0,\\ -\lambda^2/2, & x=0.\end{cases} \tag{42}$$

这时表示式 (41) 是唯一的, 即在公式中, 数 a 和测度 ν 是唯一确定的.

定理 15 (Levy 公式; 参见, 例如, [39; 第 1 卷, §16]). *如果满足定理 14 的条件, 则对任意的 $t\geqslant 0$ 和所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 有*

$$\mathsf{E}\exp\{i\lambda X_t\}=\exp\left\{t\left(ib\lambda-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\lambda x}-1-i\sin x)\widetilde{\nu}(dx)\right)\right\}, \tag{43}$$

这里, $b\in\mathbb{R},\sigma\geqslant 0,\widetilde{\nu}$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的测度 (一般来说, 可能取无穷值), 且

$$\widetilde{\nu}(\{0\})=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\widetilde{\nu}(dx)<\infty. \tag{44}$$

这时表示式 (44) 中, b,σ 和 $\widetilde{\nu}$ 是唯一确定的.

20. 试验证, 可由 Khinchin 公式推导出 Levy 公式和反过来. 这时参数 a,ν 和 $b,\sigma^2,\widetilde{\nu}$ 之间有何关系?

21. 设 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程, $x \in \mathbb{R}$, 对过程 $W_x(t) = x + W(t), t \geqslant 0$, 的 Levy 公式是什么样的?

现在回过来研究在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 定义在 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上取值于 $\mathbb{R}^m$ 的独立增量过程.

与 $m = 1$ 情况类似引出右连左极 (càdlàg) 函数的概念 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$.

定义 19. 称作取值于 $\mathbb{R}^m$ 的随机过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是*右连左极* (càdlàg) 过程, 如果它的轨道 (几乎处处) 是右连左极 (càdlàg) 函数. 如果 $\mathsf{P}(X_t \neq X_{t-}) > 0$, 这里 $X_{t-}(\omega) = \lim\limits_{s \uparrow t} X_s(\omega)$, 则过程在固定的点 $t > 0$ 上有*跳跃*.

22. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的独立增量随机连续的随机过程. 试证对 X 有右连左极 (càdlàg) 修正, 且在固定的点上没有跳跃 (参见, 定理 13)

定义 20. $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的右连左极 (càdlàg) 独立增量过程, 且 $X_0 = 0$ 几乎处处和对每个 $h > 0$, 随机变量 $X_{t+h} - X_t$ 的分布不依赖于 $t \in \mathbb{R}_+$ 称作 Levy 过程. 具有按照坐标轨道都是不降的 $(X_0 = 0, X_s \leqslant X_t$, 对 $s \leqslant t)$ Levy 过程称作*下坐标的*.

有其他同类的 Levy 过程的定义. 例如, 要求随机连续过程, 从而保证了 X 是右连左极 (càdlàg) 过程 (参见, 习题 22). 随机过程 $Y = \{X_t + Y_0, t \geqslant 0\}$, 这里 Y_0 是与 $\{X_t, t \geqslant 0\}, X_0 = 0$ 独立的随机向量, (X 具有定义 20 的过程) 也称作 Levy 过程.

全面阐述所有依概率连续, (取值于 $\mathbb{R}^m$) 的右连左极 (càdlàg) 独立增量过程, 特别是 Levy 过程. 所有这些结果被利用到对 Poisson 随机测度的积分上 (参见, 例如, [146; 第 11 章]). 这里只就叙述关于 Levy 过程增量分布的结果.

定理 16 (Levy – Khinchin 公式; 参见, 例如, [86; p.238]). *设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的 Levy 过程. 这时, 对任意的 $t \geqslant 0, u \in \mathbb{R}^m$ 有*

$$\mathsf{E} \exp\{i\langle u, X_t\rangle\} = \exp\{t\Psi(u)\}, \tag{45}$$

这里

$$\Psi(u) = i\langle b, u\rangle - \frac{\langle Cu, u\rangle}{2} + \int_{\mathbb{R}^m} (\mathrm{e}^{i\langle u, x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle \mathbf{1}_{\{|x| \leqslant 1\}})\nu(dx). \tag{46}$$

特征 (b, C, ν) 是唯一确定的: b 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量, C 是 m 阶对称非负定矩阵, ν 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 上的测度, 称其为 Levy 测度, 并且 $\nu(\{0\}) = 0$ 和

$$\int_{\mathbb{R}^m} (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty, \tag{47}$$

这里符号 "$\wedge$" 表示取极小值 (当 $\nu(\mathbb{R}^m) < \infty$ 和 $\nu(\mathbb{R}^m) = \infty$ 时).

公式 (45) 中的函数 $\Psi(u)$ 有时可能与 (46) 式有不同的表示 (参见, 例如, [86; p.240]).

Levy 和 Khinchin 对无穷可分分布的特征函数给出了不同的公式, 但它们中的每一个可以推导出另一个. 在这些公式之前是由 Kolmogorov 对具有有限方差的无穷可分随机变量的特征函数建立起来的公式. 有趣的是, 稳定的无穷可分分布最早是在独立实随机变量求和理论中产生的. 在这方面作出了基础性工作是 Levy, Polya, Khinchin, 费那提 (de Finetti), Kolmogorov, Gnedenko 等人. 关于这方面研究可参见参考书 [20,27,50,78,158].

对 Brown 运动 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 对任意的 $c>0$, 几乎处处有下面的等式

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-c\ln T}|W(t+c\ln T)-W(t)|/\ln T=\sqrt{2c}, \tag{48}$$

对独立同分布随机变量求和类似于*爱尔迪希* (Erdös) – *雷尼* (Renyi) *法则*.

公式 (48) 可以更精确化. 为此固定某个 $c>0$ 和当 $T\geqslant c\ln T$ 定义过程

$$\xi(T)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T-c\ln T}(W(t+c\ln T)-W(t)), \tag{49}$$

这里 $W=\{W_t,t\geqslant 0\}$ 为一维 Brown 运动.

定理 17 ([170, 181]). *对过程* (49), *以概率* 1 *有*

$$\limsup_{T\to\infty}(\xi(T)-\sqrt{2c}\ln T)/\ln\ln T=\sqrt{c/8}, \tag{50}$$

$$\liminf_{T\to\infty}(\xi(T)-\sqrt{2c}\ln T)/\ln\ln T=-\sqrt{c/8}. \tag{51}$$

关系式 (50) 首先是由奥尔特加 (Ortega) 和伍施泊尔 (Wschebor) (参见, [170; 定理 1]) 得到的, 而关系式 (51) 是由瑞威茨 (Reves) (参见, [181; 定理 2.1]) 得到的.

有许多关于独立增量随机过程 (其中包括 Levy 过程) 的著作 (参见, 例如, [73], [99], 以及那里的参考书目). 甚至于, 有关独立增量过程的推广到取值于较之 $\mathbb{R}^m$ 更一般的线性空间中 (参见, 例如, [16; 第 2 卷, 第 4 章]).

现在讨论关于随机函数轨道连续性的问题. 下面从经典的 Kolmogorov 结果开始.

定理 18 (参见, 例如, [12; p.124]). *设* $X=\{X(t),t\in[a,b]\}$ *是实随机过程, 使得, 对某个* $\alpha,\varepsilon>0$ *和* $C=C(\alpha,\varepsilon)>0$, *有*

$$\mathsf{E}|X(t)-X(s)|^\alpha\leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}\quad \text{对 } s,t\in[a,b]. \tag{52}$$

这时, 过程 X *存在连续修正.*

23. 试验证, 如果条件 (52) 中 $\varepsilon=0$, 则定理 18 的结论, 一般就不成立 (提示: 研究 Poisson 过程).

Kolmogorov 关于连续修正的定理有许多推广. 现在就介绍其中的几个.

对集合 $U \subset T$ (U 可能与 T 重合), 这里 (T,δ) 是准距离空间 (pseudo - metric space). 集合 $S_\varepsilon \subset T$ 称作 ε - 网, 如果对任意的 $t \in U$ 可以找到元素 $s \in S_\varepsilon$, 使得 $\delta(s,t) \leqslant \varepsilon$. 换句话说, U 被下面的闭球所复盖:

$$B_\varepsilon(s) = \{t \in T : \delta(s,t) \leqslant \varepsilon\}, \quad s \in S_\varepsilon. \tag{53}$$

如果 U 具有有限 ε - 网, 则任意它的 ε - 网称作最小的 ε - 网, 记作 $S_\varepsilon^{\min}(U)$, 如果 $\#(S_\varepsilon^{\min}(U))$ 是最小, 这里 $\#(V)$ 表示有限集 V 的元素个数. 假设 $N_\delta(\varepsilon,U) = \#(S_\varepsilon^{\min}(U))$, 特别要强调的是依赖于所取的准距离 δ. 数

$$H_\delta(\varepsilon,U) = \ln N_\delta(\varepsilon,U) \tag{54}$$

称作集合 U 的 ε - 熵 (通常在 (54) 式中对数以 2 为底).

由 [153], 在空间 (T,δ) 中引入两个条件. 设存在那样的 $d \in \mathbb{N}$ 和 $a > 0$ 使得对每个 $U \subset T$, 且具有直径 $D_U := \sup\{\delta(s,t) : s,t \in U\} < \infty$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$N_\delta(\varepsilon,U) \leqslant \max\{a(D_U/\varepsilon)^d, 1\} \tag{55}$$

设存在那样的 $b > 0$, 使得对任意的最小 ε - 网 $S_\varepsilon^{\min}(T)$, 对所有的 $t \in S_\varepsilon^{\min}(T)$ 有

$$\#(S_\varepsilon^{\min}(T) \bigcap B_{5\varepsilon}(t)) \leqslant b, \tag{56}$$

这里 $B_{5\varepsilon}(t)$ 是根据 (53) 式所定的.

定理 19 (参见, [153; p.134]). 设随机过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上对每个 $t \in T$ 取值于 Polish 空间 (S,ρ) 和满足条件 (55),(56) 的准距离空间 (T,δ). 假使, 对某些 $\gamma \in (0,1)$, $\alpha > d/\gamma$ 和 $\beta > 0$, 对所有的 $s,t \in T$ 有

$$\mathsf{E}(\rho(X(t),X(s)))^\alpha \leqslant \beta(\delta(t,s))^{\alpha\gamma}. \tag{57}$$

这时, 对随机函数 X 存在修正 $Y = \{Y_t, t \in T\}$, 具有连续轨道且对任意的 $\lambda \in (0, \gamma - d/\alpha)$ 有

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \sup_{\delta(t,s) \leqslant \nu} \rho(Y(t),Y(s))/\delta^\lambda(t,s) = 0 \ \ (\text{几乎处处}), \tag{58}$$

和对每个 $t_0 \in T$, 有

$$\mathsf{E}\left\{\sup_{t \in T} \rho(Y(t),Y(t_0))^\alpha\right\} \leqslant a(2\beta D_T)^{\alpha\gamma}/(2^{\gamma - d/\alpha} - 1)^\alpha. \tag{59}$$

注 5. 设 U 是 $\mathbb{R}^d$ 中闭的 “平行六面体” 或 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中闭的 “球” (欧氏距离), 则条件 (55) 和 (56) 满足. 因此, 由定理 19 得到定理 18, 且得到修正轨道的局部性质的结论.

为了对随机函数 X 引入较一般的矩条件, 研究在 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 上正严格增的凸函数 ψ, 且 $\psi(0) \leqslant 1$. ψ 的反函数用 Φ 来表示.

定理 20 (参见, [79]). 设随机过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上对每个 $t \in T$ 取值于 Polish 空间 (S, ρ) 的随机函数和准距离空间 (T, δ) 使得, 对某个 $M > 0$, 对所有的 $s, t \in T$, 如果 $\delta(t,s) \neq 0$ 有

$$\mathsf{E}\psi(\rho(X(t), X(s))/\delta(t,s)) \leqslant M \tag{60}$$

和 $\rho(X(t), X(s)) = 0$ 几乎处处, 如果 $\delta(t,s) = 0$, 这时, 设

$$\int_{+0} \Phi(N_\delta(T, \varepsilon))d\varepsilon < \infty, \tag{61}$$

这里积分区域取自某个 0 区域的正部分. 这时, 随机函数 X 存在连续修正.

24. 设 $X = \{X(t), t \in [0,1]^d\}$ 是对每个 $t \in T$ 取值于 Polish 空间 (S, ρ) 的随机场, 且对在 $\mathbb{R}_+$ 上某个正的不降连续函数 f 和 $p \geqslant 1$ 满足条件

$$\mathsf{E}(\rho(X(t), X(s)))^p \leqslant f^p(\|t - s\|), \tag{62}$$

$$\int^{+\infty} f(x^{-p/d})dx < \infty, \tag{63}$$

这里积分区域取自 ∞ 的某个区域. 试证, 随机函数 X 存在连续修正 (利用定理 20).

注 6 (参见 [79]). 积分条件 (63) 是最佳的, 即可以构造一个随机场, 它满足习题 24 中除了条件 (63) 的所有条件, 但是它没有连续修正.

从定理 20 可以得到著名的当德利 (Dali) 结果.

定理 21. 设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 是实 Gauss 过程, T 是任意的赋予下面准距离的集合

$$\delta(s,t) = (\mathsf{E}(X_s - X_t)^2)^{1/2}.$$

设

$$\int_{+0} \sqrt{\ln N_\delta(T, \varepsilon)}d\varepsilon < \infty. \tag{64}$$

这时, 存在 X 的连续修正.

基于优越测度概念的介入, 使得在随机函数轨道性质与距离熵的研究取得极其丰硕的结果. 这个概念在一定意义下给出了参数集合构造的更好估计. 事情在于, 距离熵正好有时对 "几乎是空的" 和 "充满了" 具有给定半径球的集合不加区分.

定义 21. 定义在空间 (T, δ) 的 Borel σ – 代数上的概率测度 μ 称作优越的, 如果

$$\sup_{t \in T} \int_0^\infty |\ln \mu(B_\varepsilon(t))|^{1/2} d\varepsilon < \infty, \tag{65}$$

这里 $B_\varepsilon(t)$ 是根据 (53) 式所定义的.

因为, 对 $\varepsilon \geqslant D_T, \mu(B_\varepsilon(t)) = 1$, 则在 (65) 式中的积分区域事实上是由 0 到 D_T, 而积分 (65) 的有限性等价于这个积分区域在某个 0 区域的正部分的积分有限性.

25 (参见, [48; p.182]). 试证优越测度的定义等价于下面的: 在正的 μ – 测度的集合上, 存在 $q > 1$ 和 T 的逐渐加细的化分序列 $\mathscr{C} = \{\mathscr{C}_k, k \in \mathbb{N}\}$, 使得

$$\sup_{C \in \mathscr{C}_k} D_C \leqslant 2q^{-k} \quad 和 \quad \sup_{t \in T} \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} |\ln \mu(C_k(t))|^{1/2} < \infty, \tag{66}$$

这里 $C_k(t)$ ——(唯一的) 那个包含点 t 分割 $\mathscr{C}_k$ 中的集合.

定理 22 (参见, [48; p.193]). 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是在某个紧空间 (T, δ) 上的实 Gauss 随机函数. 这时, 它的有界性的充分必要条件是存在优越测度, 而它的连续性的充分必要条件是

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \sup_{t \in T} \int_0^{\nu} |\ln \mu(B_\varepsilon(t))|^{1/2} d\varepsilon = 0. \tag{67}$$

自然, 这个定理涉及的是存在相应的修正轨道.

充分性条件是由费尔尼科 (Fernik) 给出的, 而必要性条件则由塔拉格兰 (Talagran) 给出.

注意, 对优越测度同样可以利用下面积分的有限性来定义:

$$\int_{+0} \Phi\left(\frac{1}{\mu(B_\varepsilon(t))}\right) d\varepsilon$$

对某确定的函数 Φ 类, 参见, 例如, [153].

Gauss 随机函数的性质研究可参见 [29,48,52,79,81]. 在这些书中有着广泛的参考书目. 一些结果涉及 Brown 运动的轨道, 它们将在下面的几章和补充中研究.

第三章

布朗运动. 轨道性质

内容摘要: 布朗 (Brown) 运动 (维纳 (Wiener) 过程) 轨道的几乎处处不可微性. Wiener 过程的马氏性. 滤基. 停时及它们的例子. 由停时 τ 以前, 所有观测的事件所组成的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_\tau$. Wiener 过程的强马氏性. 反射原理. $0-1$ 律. 在 $[0,t]$ 上 Wiener 过程极大值的分布. 重对数律. 重对数局部律.

§1. 在初学这一章的时候, 可以只限于了解 Brown 运动的马氏性和强马氏性的证明 (§2 和 §6). 为此重要的是掌握停时 τ (§3) 和事件 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_\tau$ (§5) 的概念. 希望对 Brown 运动重对数定律的证明 (§11) 进行剖析, 为此要求掌握由 §10 推论 1 所得到的结果的论述, 它描述了 Wiener 过程在区间 $[0,T]$ 上极大值的分布.

下面的结果说明了 Brown 运动轨道的构造是多么的不正规.

定理 1 (佩利 (Paley) – 维纳 (Wiener) – 济格蒙德 (Zygmund)). 以概率 1, Brown 运动 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 的轨道在半轴 $[0,\infty)$ 上, 无论哪一点 t 都不可微.

证. 研究区间 $[k,k+1)$, 这里 $k\in\{0,1,\cdots\}$. 假如在一点 $s\in[k,k+1)$ 对 $\omega\in\Omega, W(\cdot,\omega)$ 可微, 由此可得在这点 s 从右可微, 而这样就存在 $q,l\in\mathbb{N}(q=q(s,\omega),l=l(\omega,s,q(s,\omega)))$, 使得对所有的 $t\in[s,s+q^{-1})\subset[k,k+1)$ 有

$$|W(t,\omega)-W(s,\omega)|\leqslant l(t-s). \tag{1}$$

对 $l,n,i\in\mathbb{N}$ (和固定 k) 引入事件

$$A_{l,n,i}=\left\{\omega:\left|W\left(k+\frac{j}{n},\omega\right)-W\left(k+\frac{j-1}{n},\omega\right)\right|\leqslant\frac{7l}{n},\ 当\ j=i+1,i+2,i+3\right\}.$$

研究在 (1) 式中的 l 和 q. 如果 $4/n < 1/q$ 和 $i = i(s,n)(i \in \{1, \cdots, n\})$, 选取那样的 s 使得 $k + (i-1)/n \leqslant s < k + i/n$, 则对 $j = i+1, i+2, i+3$ 和 ω, 满足 (1) 式 (参见, 图 10), 得到

$$\begin{aligned}
&\left|W\left(k+\frac{j}{n},\omega\right) - W\left(k+\frac{j-1}{n},\omega\right)\right| \\
&\leqslant \left|W\left(k+\frac{j}{n},\omega\right) - W(s,\omega)\right| + \left|W(s,\omega) - W\left(k+\frac{j-1}{n},\omega\right)\right| \\
&\leqslant l\cdot\frac{4}{n} + l\cdot\frac{3}{n} = \frac{7l}{n}.
\end{aligned}$$

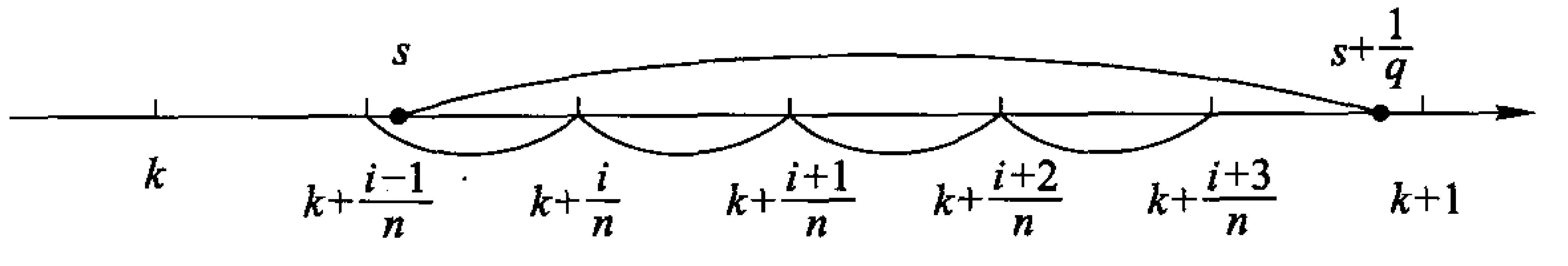


图 10

因此, 如果对 ω 性质 (1) 成立, 则 $\omega \in \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}$. 引入集合 $D_k = \{\omega : W(\cdot,\omega)$ 即便在一点 $s \in [k, k+1)$ 上可微$\}$ (如果 $s = k$, 则认为所指的是从右可微). 由所讨论的, 得到

$$D_k \subset \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}. \tag{2}$$

注意, 对任意的事件序列 $B_n \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}$ 有

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n).$$

因此, 对每个 $q, l \in \mathbb{N}$, 由于过程 W 的增量独立性, 得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\bigcap_{n>4q} \bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}\right) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{l,n,i}\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_{l,n,i}) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} n\left(\mathsf{P}\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{7l}{n}\right)\right)^3 \\
&= \liminf_{n\to\infty} n\left(\mathsf{P}\left(|W(1)| \leqslant \frac{7l}{\sqrt{n}}\right)\right)^3 \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{14l}{\sqrt{n}}\right)^3 = 0.
\end{aligned}$$

这里, 我们利用了, 当 $t \geqslant 0$, 而对 $z > 0, W(t) \sim \mathsf{N}(0,t)$

$$\mathsf{P}(|W(1)| \leqslant z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2z.$$

(现在应该明白为什么定义 $A_{n,l,i}$ 时需要研究过程 W 的增量在三个区间上: $[(j-1)/n, j/n), j = i+1, i+2, i+3$.

考虑到, 可数个 0 测度集的并集是 0 测度集和前面说过的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 的完全化, 得到对任意的 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 有 $\mathsf{P}(D_k) = 0$. 如果 D 是点 ω 的集合, 对 ω 来说, 至少有一点 $s \in [0, \infty)$ 上 $W(\cdot, \omega)$ 可微, 则 $D = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k$. 从而有 $\mathsf{P}(D) = 0$. □

前面给出的简单证明是由德沃里茨基 (Dvoretzky) – 爱尔迪希 (Erdös) – 角谷静夫 (Kakutani) 给出的.

§2. Wiener 过程的增量是 Wiener 过程.

定义 1. 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上随机函数 $X = \{X(t), t \in T\}$ 称作不依赖于 σ – 代数 $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$, 如果 σ – 代数 $\sigma\{X_t, t \in T\}$ 和 $\mathscr{E}$ 独立.

定理 2 (Wiener 过程的马氏性). 对每个数 $a \geqslant 0$, 过程 $X = \{X(t) = W(t+a) - W(a), t \geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程, 与 σ– 代数 $\mathscr{F}_a^W = \sigma\{W(s) : 0 \leqslant s \leqslant a\}$ 独立.

证. 显然, $X(0) = 0, X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 有连续轨道, 独立增量和 $X(t) - X(s) = W(t+a) - W(s+a) \sim \mathsf{N}(0, t-s), 0 \leqslant s \leqslant t$. 因此, 过程 X 是 Wiener 过程. 现在, 验证定理的最后一个结论.

根据第一章引理 9, 只需要验证, 对任意的 $n, m \in \mathbb{N}$ 和所有的 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m \leqslant a$, 事件

$$A_1 = \{X(t_0) \in B_0, X(t_1) \in B_1, \cdots, X(t_n) \in B_n\},$$
$$A_2 = \{W(s_0) \in C_0, W(s_1) \in C_1, \cdots, W(s_m) \in C_m\}$$

独立, 这里 $B_i, C_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R})(i = 0, \cdots, n; j = 0, \cdots m)$. 类似于 (II.2) 借助于相应的向量 $\widetilde{\xi} = (X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1}))$ 和 $\widetilde{\eta} = (W(s_0), W(s_1) - W(s_0), \cdots, W(s_m) - W(s_{m-1}))$ 的线性变换向量, 可以得到向量 $\xi = (X(t_0), \cdots, X(t_n))$ 和 $\eta = W(s_0), \cdots, W(s_m)$. 由于过程 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 增量的独立性可以得到 $\widetilde{\xi}$ 和 $\widetilde{\eta}$ 的独立性. 因此, (作为独立向量的函数) ξ 和 η 独立. 从而事件 A_1 和 A_2 独立. □

§3. 自然产生这样的问题: 定理 2 中的常数是否可以改换为随机变量, 来推广定理 2? 回答是肯定的, 只不过是要针对确定的一类随机变量.

定义 2. 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间, $T \subset \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{F}_T = (\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ 是在 $\mathscr{F}$ 中的某个 σ – 代数流 ("滤基"), 即对 $s \leqslant t (s, t \in T)$ 有 $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ 和对所有的 $t \in T$ 有 $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$. σ – 代数流 $\mathscr{F}_t^X = \sigma\{X(s), s \leqslant t, s \in T\}, t \in T$ 称作过程的自然 σ – 代数流. 换句话说, 对每个 $t \in T$, σ – 代数 $\mathscr{F}_t^X$ 是由在区间 $(-\infty, t] \cap T$ 上的过程流产生的.

定义 3. 映射 $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{\infty\}$ 称作**相对于** σ - **代数流** $\mathbb{F}$ 的停时, 如果对任意的 $t \in T$ 有 $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t$. 停时称作有限停时[1], 如果几乎处处 $\tau(\omega) < \infty$.

注 1. 和前面一样, 所有的研究都是在完全的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上. 同样假设, 所有的 σ - 代数 $\mathscr{F}_t, t \in T$ 都是包含 0 概率集合类 $\mathscr{N}$ 的扩张.

作为练习, 可以证明, 如果 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 是相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}_T$ 的停时, 这里 $T = \mathbb{Z}_+$, 则下列随机变量也是相对于 σ- 代数流 $\mathbb{F}_T$ 的停时:

$$\tau(\omega) = a \in T(a = \text{常数}), \quad \min_{1 \leqslant n \leqslant m} \tau_n, \quad \max_{1 \leqslant n \leqslant m} \tau_m, \quad \sum_{n=1}^{m} \tau_n (m \in \mathbb{N}), \tag{3}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \tau_n, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n, \quad \liminf_{n \to \infty} \tau_n, \quad \limsup_{n \to \infty} \tau_n. \tag{4}$$

如果 τ 是相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}_T$ 的停时, 这里 $T = [0, \infty)$, 则对任意的 $t \geqslant 0$, 有

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} \backslash \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t, \tag{5}$$

因为对 $t > 0$ 有 $\{\tau < t\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\tau \leqslant t - k^{-1}\} \in \bigcup\limits_{k \geqslant 1/t} \mathscr{F}_{t-k^{-1}} \subset \mathscr{F}_t$ (如果 $t - k^{-1} < 0$, 则 $\{\tau \leqslant t - k^{-1}\} = \varnothing$).

当离散情形时, 相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ 定义停时, 显然等价于, 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 有 $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$.

注 2. 设 τ 是相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}_T$ 的停时, 而 $\sigma : \Omega \to T \bigcup \{\infty\}$, 且几乎处处 $\tau = \sigma$. 这时, 由于注 1, 随机变量 σ 同样是相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}_T$ 的停时.

设 $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$ 是离散时间实随机过程, $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_n^X)_{n \geqslant 0}$ 是自然 σ - 代数流. 这时, 对任意的 Borel 集 B,

$$\tau(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 : X_n(\omega) \in B\} \tag{6}$$

将是停时, 因为 $\{\tau = 0\} = \{X_0 \in B\} \in \mathscr{F}_0^X$, 而对 $n \geqslant 1$,

$$\{\tau = n\} = \{X_0 \notin B, \cdots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathscr{F}_n^X.$$

§4. 类似于 (6) 式, 但对连续时间的过程, 下面定理给出较复杂停时的例子.

定理 3. 设 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 是 (对每个 $t \geqslant 0$) 取值于距离空间 (S, ρ) 的随机函数. 设 X 几乎处处的轨道是连续的. 这时, 对任意的闭集 $F \subset \mathsf{S}$, 时刻

$$\tau_F(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 : X(t, \omega) \in F\} \tag{7}$$

是相对于过程 X 自然 σ - 代数流 $\mathbb{F}^X$ 的停时 (规定, 如果对所有的 $t \geqslant 0, X(t, \omega) \notin F$ 则有 $\tau_F(\omega) = \infty$).

---

[1] 这里停时 (stopping time) 在俄文原著中是 "马尔可夫时", 而有限停时就是在俄文原著中的 "停时" —— 译者注.

证. 设对点 $\omega \in \widetilde{\Omega}, X$ 的轨道连续, 这里 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ 和 $\mathsf{P}(\widetilde{\Omega})=1$. 取任意的点 $x_0 \in \mathsf{S}$ 定义过程

$$\widetilde{X}(t,\omega)=\begin{cases} X(t,\omega), & \text{如果 } t \geqslant 0, \omega \in \widetilde{\Omega}, \\ x_0, & \text{如果 } t \geqslant 0, \omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

由于概率空间是完全的, 过程 $\widetilde{X}$ 是过程 X 的修正, 它对所有的 $\omega \in \Omega$ 有连续轨道. 利用注 1 和 2, 可以看出, 不失一般性可以认为在 $[0,\infty)$ 上所有的轨道都是连续的.

定理证明的途径是这样的. 过程 X 的轨道连续性和集合 F 的闭性, 允许我们建立

$$\tau_F(\omega)=\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega) \text{ 对所有的 } \omega, \tag{8}$$

这里 $\tau_n := \tau_{G_n} = \inf\{t \geqslant 0 : X(t,\omega) \in G_n\}$ (简化写法), 而开集 $G_n = \{x \in \mathsf{S} : \rho(x,F) < 1/n\}$ 乃是区域 F 以 $1/n$ 倍的扩充. 为了证明 τ_F 是停时, 我们不可以直接利用性质 (4) 和 (8), 因为只验证对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的 $t>0$ 有 $\{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_t^X$ (请与停时的定义进行比较). 然而这样也就达到我们的目的了, 因为当 $0<t<\infty$ 时, 我们有

$$\{\omega : \tau_F(\omega) \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega : \tau_n(\omega) < t\}, \tag{9}$$

而 $\{\omega : \tau_F \leqslant 0\} = \{X(0,\omega) \in F\}$ (意味着, 包含在 $\mathscr{F}_0^X$ 中), 这是由于 X 轨道的右连续和集合 F 的闭性.

现在进行详细的证明. 首先验证, 如果 G 是 S 的任意的开子集和 τ_G 根据 (7) 式所定义的, 只不过是将 F 换成 G, 则有 $\{\omega : \tau_G(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t^X$. 为此要验证

$$\{\tau_G < t\} = \bigcup_{r<t, r\in\mathbb{Q}_+}\{X(r) \in G\}, \tag{10}$$

这里 $\mathbb{Q}_+$ 是非负有理数集. 事实上, 如果对某个 $r<t, r\in\mathbb{Q}_+$ 有 $X(r,\omega) \in G$, 则有 $\tau_G(\omega) \leqslant r < t$. 另一方面, 设 $\tau_G(\omega) < t$. 这时, 可以找到那样的 $s = s(\omega) < t$, 使得 $X(s,\omega) \in G$. 既然 G 是开集, 而 X 的轨道是右连续的, 则对所有从右边足够接近点 s 的 u, 有 $X(u,\omega) \in G$. 在这些 u 中间有有理数点 $r<t$, 这样证明了 (10) 式.

注意, 对 $r<t$ 有 $\{X(r) \in G\} \in \mathscr{F}_r^X \subset \mathscr{F}_t^X$, 而在公式 (10) 的右边是从 $\mathscr{F}_t^X$ 中取的可数事件的并. 因此, $\{\omega : \tau_G(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t^X$ 和特别的, 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和任意的 $t \geqslant 0$ 有 $\{\omega : \tau_n(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t^X$.

现在证明

$$\tau_n(\omega) \nearrow \tau_F(\omega) \quad \text{当 } n\to\infty, \quad \omega \in \Omega. \tag{11}$$

显然, $F \subset G_{n+1} \subset G_n$, 由此可见, 对所有的 $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$ 有 $\tau_n(\omega) \leqslant \tau_{n+1}(\omega) \leqslant \tau_F(\omega)$. 因此对每个 ω 存在

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n(\omega) = \tau_\infty(\omega) \leqslant \tau_F(\omega) \in [0,\infty].$$

由此可见, 如果 $\tau_\infty(\omega)=\infty$, 则 $\tau_F(\omega)=\infty$. 验证对 $\omega\in\{\tau_\infty<\infty\}$, 有 $\tau_\infty(\omega)=\tau_F(\omega)$. 由于 X 的轨道的右连续得到 $X(\tau_n(\omega),\omega)\in[G_n], n\in\mathbb{N}$, 这里 $[\cdot]$ 表示集合的闭包. 考虑到 X 轨道的左连续和对 $n\geqslant k$ 有 $[G_n]\subset[G_k]$, 得到对 $\omega\in\{\tau_\infty<\infty\}$, 有

$$X(\tau_\infty(\omega),\omega)=\lim_{n\to\infty}X(\tau_n(\omega),\omega)\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[G_k]=F.$$

这样, 对所有 $\omega\in\Omega$ 有 $\tau_F(\omega)\leqslant\tau_\infty(\omega)$. 这与已证的不等式 $\tau_\infty(\omega)\leqslant\tau_F(\omega)$ 比较, 于是有 (11) 式.

最后, 验证性质 (9). 如果 $\tau_n(\omega)<t, n\in\mathbb{N}$, 则由于 (11) 式有 $\tau_F(\omega)\leqslant t$. 另一方面, 设 $\tau_F(\omega)\leqslant t, t>0$. 如果 $\tau_F(\omega)=0$, 则根据 (11) 式对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\tau_n(\omega)=0<t$. 对 $\omega\in\Omega'=\{\omega:0<\tau_F(\omega)\leqslant t\}$ 证明 $\tau_n(\omega)<\tau_F(\omega), n\in\mathbb{N}$.

设 $\omega\in\Omega'$, 这时 $\tau_n(\omega)\to\tau_F(\omega)>0(n\to\infty)$. 因此, 对足够大的 n 得到 $\tau_n(\omega)>0$ 和 $X(\tau_n(\omega),\omega)\in\partial G_n(\partial G_n$ 是集合 G_n 的边界). 既然在任意的点 $X(\tau_n(\omega),\omega)$ 的邻域中, 这里 $0<\tau_n(\omega)<\infty$, 可以找到 G_n 中的点, 又有点不包含在 G_n 中的点 (当 $k\to\infty$ 时, $t_{n,k}(\omega)\downarrow\tau_n(\omega)$, 对这些来说, $X(t_{n,k}(\omega),\omega)\in G_n$, 同时 $X(t,\omega)\notin G_n$, 对 $t<\tau_n(\omega)$). 考虑 $\partial G_n\subset\{x\in\mathsf{S}:\rho(x,F)=1/n\}$, 得到不等式 $\tau_n(\omega)<\tau_{n+1}(\omega)$ 对 $\omega\in\Omega'$ 和所有足够大的 n (如果 $\rho(X(\tau_n(\omega),\omega),F)=1/n$ 和 $\rho(X(\tau_{n+1}(\omega),\omega),F)=1/(n+1)$, 则 $\tau_n(\omega)\neq\tau_{n+1}(\omega)$). 因此, 因为已验证 $\{\omega:\tau_n(\omega)<t\}\in\mathscr{F}_t^X, n\in\mathbb{N}, t\geqslant 0$, 又 (9) 式成立, 于是定理证毕. □

§5. 设 τ 是相对于 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 的停时.

定义 4. 设

$$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}:A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,\ 对任意的\ t\in T\}.\tag{12}$$

集合类 $\mathscr{F}_\tau$ 是 (很容易验证) σ - 代数, 称作观测到随机时刻 τ (也包含它) 之前的事件 σ - 代数 (简称停时 σ - 代数).

下面介绍停时的简单性质, 它推广了关系式 (5). 如果 σ 是相对于 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 的停时和 $A\in\mathscr{F}_\sigma$, 则对每个 $t\in T$ 有

$$A\cap\{\sigma<t\}=\bigcup_{q=1}^{\infty}(A\cap\{\sigma\leqslant t-q^{-1}\})\in\mathscr{F}_t,\tag{13}$$

$$A\cap\{\sigma=t\}=(A\cap\{\sigma\leqslant t\})\setminus(A\cap\{\sigma<t\})\in\mathscr{F}_t.\tag{14}$$

定义 5. 称作 σ - 代数 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ (都包含在 $\mathscr{F}$ 中) 在事件 A 上重合, 如果 $A\in\mathscr{G}\cap\mathscr{H}$ 和 $A\cap\mathscr{G}=A\cap\mathscr{H}(A\cap\mathscr{G}=\{AC:C\in\mathscr{G}\})$. 类似地, 有在集合 A 上 $\mathscr{G}\subset\mathscr{H}$, 如果 $A\in\mathscr{G}\cap\mathscr{H}$ 和 $A\cap\mathscr{G}\subset A\cap\mathscr{H}$.

设 $(\tau\wedge\sigma)(\omega)=\min\{\tau(\omega),\sigma(\omega)\},\omega\in\Omega$.

引理 1. 设 τ 和 σ 是相对于 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}, T\subset\mathbb{R}$ 的停时. 这时,

1°. $\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau\leqslant\sigma\}\subset\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}=\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma$.

2°. 如果在集合 A 上有 $\tau=\sigma$, 则在集合 A 上有 $\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_\sigma$ (其中 $A\in\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma$). 特别的, 在集合 $\{\tau=t\}, t\in T$ 上有 $\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_t$.

3°. τ 是 $\mathscr{F}_\tau$ - 可测的随机变量.

证. 验证

$$\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau\leqslant\sigma\}\subset\mathscr{F}_\sigma, \tag{15}$$

即, 验证对任意 $A\in\mathscr{F}_\tau$, 和每个 $t\in T$, 集合 $C=A\cap\{\tau\leqslant\sigma\}\cap\{\sigma\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$. 显然, $C=A\cap\{\tau\leqslant t\}\cap\{\sigma\leqslant t\}\cap\{\tau\wedge t\leqslant\sigma\wedge t\}$. 而 $\tau\wedge t$ 和 $\sigma\wedge t$ 不难看出是 $\mathscr{F}_t$ - 可测. 因而 $\{\tau\wedge t\leqslant\sigma\wedge t\}\in\mathscr{F}_t$. 除此之外,$A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ 和 $\{\sigma\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$. 因此 $C\in\mathscr{F}_t$, (15) 式得证.

将 (15) 式中的 τ 和 σ 用 τ 和 $\tau\wedge\sigma$ 代替. 再有 $\{\tau\leqslant\tau\wedge\sigma\}=\{\tau\leqslant\sigma\}$, 于是得出 1° 中的第一个关系式. 现在, 将 (15) 式中的 τ 和 σ 先用 $\tau\wedge\sigma$ 和 τ 代替, 然后再用 $\tau\wedge\sigma$ 和 σ 代替, 得到 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\subset\mathscr{F}_\tau$ 和 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\subset\mathscr{F}_\sigma$ (由于 $\{\tau\wedge\sigma\leqslant\tau\}=\Omega$ 和 $\{\tau\wedge\sigma\leqslant\sigma\}=\Omega$). 这样, $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\subset\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma$. 为证明相反的包含, 取任意的事件 $A\in\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma$, 有 $D=A\cap\{\tau\wedge\sigma\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$. 考虑到 $\{\tau\wedge\sigma\leqslant t\}=\{\tau\leqslant t\}\cup\{\sigma\leqslant t\}$ 有 $D=(A\cap\{\tau\leqslant t\})\cup(A\cap\{\sigma\leqslant t\})\in\mathscr{F}_t$. 关系式 1° 证毕.

由 (15) 式得出

$$\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau=\sigma\}=\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau\leqslant\sigma\}\cap\{\tau=\sigma\}\subset\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau=\sigma\}.$$

交换 τ 和 σ 的位置, 有 $\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau=\sigma\}\subset\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau=\sigma\}$, 这样保证了等式 $\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau=\sigma\}=\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau=\sigma\}$. 除此之外, 有 $\{\tau=\sigma\}\in\mathscr{F}_\tau\cap\mathscr{F}_\sigma$, 因为 $\Omega\in\mathscr{F}_\tau$ 和

$$\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau=\sigma\}=\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau\leqslant\sigma\}\cap\{\sigma\leqslant\tau\}\subset\mathscr{F}_\sigma\cap\{\sigma\leqslant\tau\}\subset\mathscr{F}_\tau.$$

不难看出, $\mathscr{F}_\tau\cap A=\mathscr{F}_\tau\cap\{\tau=\sigma\}\cap A=\mathscr{F}_\sigma\cap\{\tau=\sigma\}\cap A=\mathscr{F}_\sigma\cap A$. 因此, 2° 得证.

为了证明 3°, 只需要验证 $\{\tau\leqslant x\wedge t\}\in\mathscr{F}_t$, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 和 $t\in T$. 事实上如果 $x\in T$ 则对所有的 $x\geqslant t$, 还有当 $x<t$ 该式都成立. 现在设 $x\notin T, x<t$. 如果, 集合 $B_x=\{s\in T: s<x\}=\varnothing$, 则 $\{\tau\leqslant x\}=\varnothing\in\mathscr{F}_t$. 如果 $B_x\neq\varnothing$, 设 $x'=\sup\{s: s\in B_x\}$. 当 $x'\in T$ 时, 有 $\{\tau\leqslant x\}=\{\tau\leqslant x'\}\in\mathscr{F}_{x'}\subset\mathscr{F}_t$. 如果 $x'\notin T$, 则 $\{\tau\leqslant x\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\tau\leqslant t_n\}$, 这里 $t_n\in T, t_n\uparrow x'$, 当 $n\to\infty$ 时. 因此, $\{\tau\leqslant x\}\in\mathscr{F}_t$. □

§6. 研究 Wiener 过程 (Brown 运动) 马氏性的一种重要推广.

定理 4 (强马氏性). 设 τ 是相对于 Wiener 过程 $W=\{W(t), t\geqslant 0\}$ 的自然 σ - 代数流 $\mathbb{F}^W=(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ 的有限停时. 这时, 过程 $Y=\{Y(t)=W(t+\tau)-W(\tau), t\geqslant 0\}$

是 Wiener 过程, 且独立于 σ - 代数 $\mathscr{F}_\tau^W$ (根据 (12) 式对 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ 所构造的).

证. 首先对 $\omega \in \{\tau(\omega)=\infty\}$ 定义过程 Y. 设

$$Y(t,\omega)=\begin{cases} W(t+\tau(\omega),\omega)-W(\tau(\omega),\omega), & \text{对 } \omega\in\Omega_\tau=\{\tau<\infty\},\\ 0, & \text{对 } \omega\notin\Omega_\tau. \end{cases} \tag{16}$$

则 Y 是随机过程 (即随机变量族), 因为根据第一章, 习题 27 和 28 (过程 W 是可测的, 作为过程具有几乎处处连续轨道: 下面我们将直接看到对每个 $t\geqslant 0, Y(t)\in \mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$).

构造下面的随机变量序列 $\tau_n=\tau_n(\omega)$ 来逼近 $\tau=\tau(\omega)$:

$$\tau_n(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n}\mathbf{1}_{A_{k,n}},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

这里 $A_{1,n}=\{\tau\leqslant 2^{-n}\}, A_{k,n}=\{(k-1)2^{-n}<\tau(\omega)\leqslant k2^{-n}\}$ 对 $k\geqslant 2$. 显然, 当 $n\to\infty$ 时, 对所有的 $\omega\in\Omega_\tau$ 有 $\tau_n(\omega)\downarrow\tau(\omega)$. 除此之外, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 随机变量 τ_n 是相对于 σ - 代数流 $\mathscr{F}_t^W$ 的停时, 因为对任意的 $t\geqslant 0$, 有

$$\{\tau_n\leqslant t\}=\{\tau\leqslant k2^{-n}\}\in\mathscr{F}_{k2^{-n}}^W\subset\mathscr{F}_t^W,\quad \text{这里}\quad k=\max\{l: l2^{-n}\leqslant t\}.$$

由于 Brown 运动的轨道几乎处处连续, 当 $n\to\infty$ 时, 对每个 $t\geqslant 0$, 几乎处处有

$$W(t+\tau_n(\omega),\omega)\longrightarrow W(t+\tau(\omega),\omega), \tag{18}$$

对所有的 $n\in\mathbb{N}, t\geqslant 0, z\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega$, 考虑到 (5) 式, 有

$$\{\omega: W(t+\tau_n(\omega),\omega)\leqslant z\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega: W(t+k2^{-n},\omega)\leqslant z,\quad \tau_n(\omega)=k2^{-n}\}\in\mathscr{F}. \tag{19}$$

由 (18) 和 (19), 利用第一章引理 6 和注 1 得到, 对每个 $t\geqslant 0, Y(t)$ 是随机变量. 显然同样对随机过程 Y 的轨道也是几乎处处连续的.

现在证随机过程 Y 独立于 σ - 代数 $\mathscr{F}_\tau$, 且是 Wiener 过程.

正如在定理 2 的证明, 只需要验证, 对任意的 $A\in\mathscr{F}_\tau, m\in\mathbb{N}, 0\leqslant t_1<\cdots<t_m, B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, 有

$$\mathsf{P}(A\cap\{\xi\in B\})=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(\xi\in B), \tag{20}$$

这里, $\xi=(Y(t_1),\cdots,Y(t_m))$. 在 (20) 式中只需要对闭集研究即可 (根据第一章, 引理 4, 对任意集 B 和任意的 $\varepsilon>0$ 都存在闭集 $F_\varepsilon\subset B$, 使得 $\mathsf{P}_\xi(B\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$). 改写 (20) 式如下

$$\mathsf{E}\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\{\xi\in B\}}=\mathsf{E}\mathbf{1}_A\cdot\mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\xi\in B\}}. \tag{21}$$

关系式 (21)将被满足, 如果对每个有界连续函数 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 有

$$\mathsf{E}\mathbf{1}_A f(\xi)=\mathsf{E}\mathbf{1}_A\cdot\mathsf{E}f(\xi). \tag{22}$$

取 $f_k(x)=\varphi(k\rho(x,B))$, 这里

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & 当\ t\leqslant 0,\\ 1-t, & 当\ t\in[0,1],\\ 0, & 当\ t\geqslant 1,\end{cases} \tag{23}$$

和 $\rho(x,B)=\inf\{\rho(x,y):y\in B\}$, ρ 是欧氏距离. 连续和有界连续函数的复合函数是有界连续函数 ($\rho(\cdot,B)$ 对闭集 B, 是连续的). 因此, 考虑到, 对 $x\in\mathbb{R}^m$, 当 $k\to\infty$ 时, 有 $f_k(x)\to\mathbf{1}_B(x)$, 于是根据 Lebesgue 控制收敛定理得到结论.

再证 (22) 式, 在利用 Lebesgue 控制收敛定理, 对任意的 $A\in\mathscr{F}_\tau$ 有

$$\mathsf{E}\mathbf{1}_A f(\xi)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\mathbf{1}_A f(\xi_n), \tag{24}$$

这里, 当 $n\to\infty$ 时, $\xi_n=(W(t_1+\tau_n)-W(\tau_n),\cdots,W(t_m+\tau_n)-W(\tau_n))\to\xi$ 几乎处处. 利用 Lebesgue 积分的可数可加性, 有

$$\mathsf{E}\mathbf{1}_A f(\xi_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\mathbf{1}_A f(\xi_n)\mathbf{1}_{\{\tau_n=k2^{-n}\}}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}}f(\xi_{n,k}), \tag{25}$$

这里 $\xi_{n,k}=(W(t_1+k2^{-n})-W(k2^{-n}),\cdots,W(t_m+k2^{-n})-W(k2^{-n}))$. 由于 (17) 式, 对 $A\in\mathscr{F}_\tau$, 有 $A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}=A\cap A_{k,n}\in\mathscr{F}^W_{k2^{-n}}$. 根据定理 2, σ – 代数 $\mathscr{F}^W_{k2^{-n}}$ 与 $\xi_{n,k}$ 独立, 除此之外, $\xi_{n,k}$ 的分布与向量 $(W(t_1),\cdots,W(t_m))$ 的分布相同. 这样 (25) 式右边部分等于下式:

$$\mathsf{E}f(W(t_1),\cdots,W(t_m))\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}}=\mathsf{E}f(W(t_1),\cdots,W(t_m))\mathsf{E}\mathbf{1}_A. \tag{26}$$

取 $A=\Omega$, 由 (24) 和 (26) 式得到对任意的有界连续函数 f, 所有的 $m\in\mathbb{N}$ 和 $0\leqslant t_1<\cdots<t_m$, 成立

$$\mathsf{E}f(Y(t_1),\cdots,Y(t_m))=\mathsf{E}f(W(t_1),\cdots,W(t_m)), \tag{27}$$

从而证明了 (22) 式.

由 (27) 式, 通过极限过渡到示性函数, 得到 Y 和 W 的有限维分布是相同的. 因此, Y 是 Wiener 过程. □

注意, 另一种强马氏性 (更复杂的公式) 将在附录 6 中研究.

§7. 利用上一节关于强马氏性的结果, 来找出某些 Brown 运动泛函的分布. 首先要介绍的是所谓的*反射原理*.

定理 4 告诉我们, 如果 $\tau=\tau(\omega)$ 是相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}^W=(F_t^W)_{t\geqslant 0}$ 的有限停时, 则从时刻 $\tau(\omega)$ 以后的过程 W 就好像是从点 $(\tau(\omega), W(\tau(\omega),\omega))$ "出发" 新的 Wiener 过程. 显然, 随机过程 $-W=\{-W(t), t\geqslant 0\}$ 同样是 Wiener 过程. 这样一来, 随机过程相对于横坐标轴 "反射" 重新是个 Wiener 过程. 因此, 自然而然地希望, 如果从点 $(\tau(\omega), W(\tau(\omega),\omega))$ 出发, 对时间 $t\geqslant\tau(\omega)$, 相对于直线 $y=W(\tau(\omega),\omega)$ 过程的轨道 $W(t,\omega)$ 进行反射, 所得到的过程也是 Wiener 过程. 为实现这个想法, 需要给出严格定义.

设 $\tau=\tau(\omega)$ 是相对于随机过程 W 自然 σ - 代数流 $\mathbb{F}^W$ 的有限停时. 对 $\omega\in\Omega_\tau=\{\tau<\infty\}(\mathsf{P}(\Omega_\tau)=1)$ 引入 **"反射过程"**

$$Z(t,\omega)=\begin{cases} W(t,\omega), & 0\leqslant t\leqslant\tau(\omega), \\ 2W(\tau(\omega),\omega)-W(t,\omega), & t>\tau(\omega) \end{cases} \tag{28}$$

和对 $\omega\in\Omega\setminus\Omega_\tau$ 设 $Z(t,\omega)=W(t,\omega)$ (参见, 图 11).

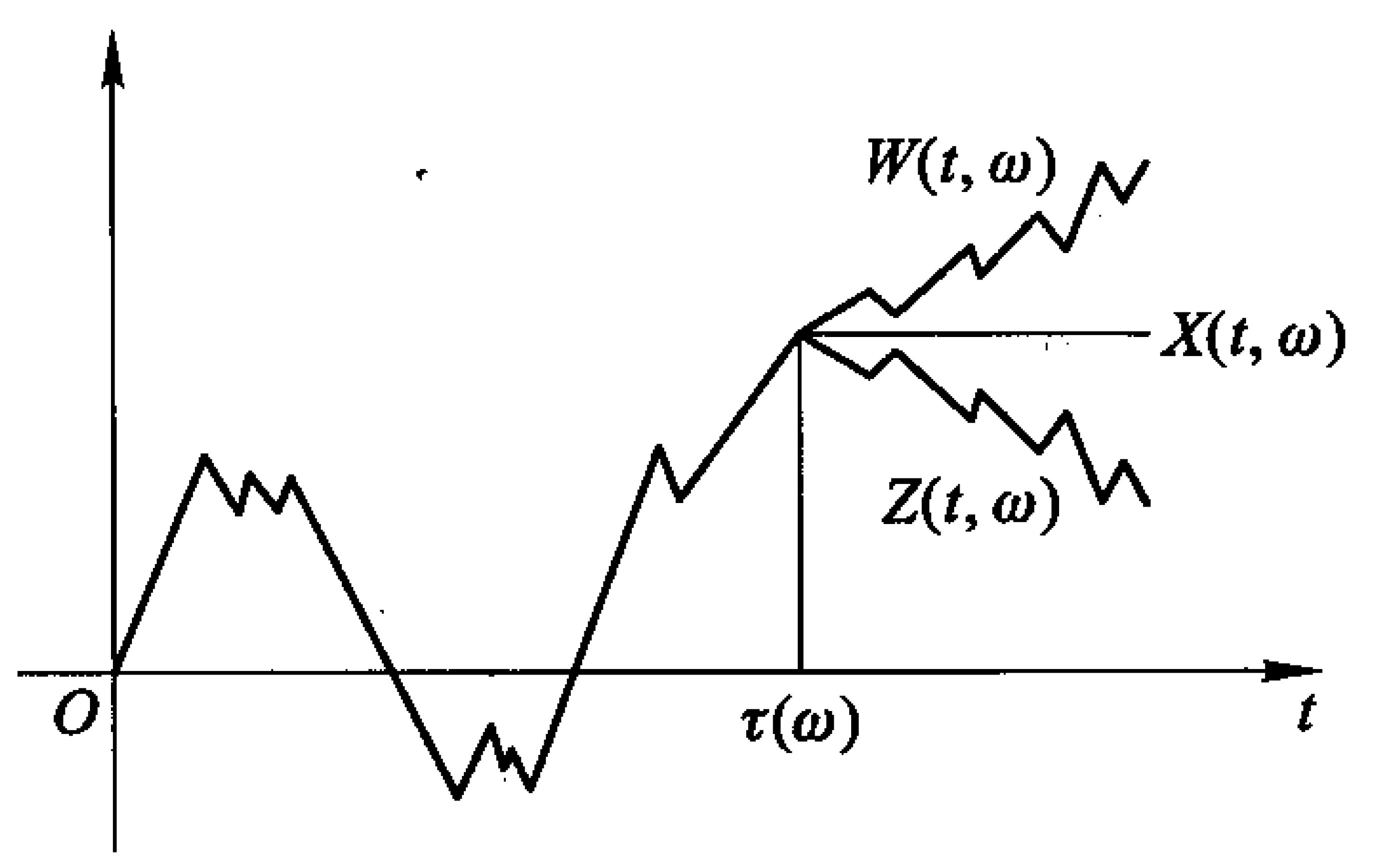


图 11

定理 5 (反射原理). 由 (28) 式所定义的过程 $Z=\{Z(t), t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程.

证. 对所有的 $t\geqslant 0$ 和 $\omega\in\Omega$ 有

$$Z(t,\omega)=W(t,\omega)\mathbf{1}_{\{\tau\geqslant t\}}+(2W(\tau(\omega),\omega)-W(t,\omega))\mathbf{1}_{\{\tau<t\}},$$

因此, $Z(t,.)$ 对每个 $t\geqslant 0$ 是一个随机变量.

$Z(\cdot,\omega)$ 的轨道几乎处处是连续的, 因此类似于第一章引理 12 的证明, 不难验证, $Z(\cdot,\omega)$ 是取值于 Polish 空间 $C_0([0,\infty))=\{f\in C([0,\infty)): f(0)=0\}$ 的随机元. 该空间赋予紧集上一致收敛的距离:

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{\sup\limits_{t\in[0,n]}|f(t)-g(t)|}{1+\sup\limits_{t\in[0,n]}|f(t)-g(t)|},\qquad f,g\in C_0([0,\infty)). \tag{29}$$

设 $Y=\{Y(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 是由公式 (16) 所定义的过程. 引入 **"停止过程"** $X=\{X(t,\omega)=W(t\wedge\tau(\omega),\omega),t\geqslant 0\}$ (对 $\omega\in\Omega\backslash\Omega_\tau$ 有 $X(t,\omega)=W(t,\omega)$). 考虑过程 W 的轨道几乎处处连续的, 可以看出 $X(\cdot,\omega)$ 是取值于空间 $C_0([0,\infty))$ 的随机元.

定义映射 (在点 b 处 **"粘接"** 函数 g 和 f) $h:\mathsf{V}\to C_0([0,\infty))$, 这里 $\mathsf{V}=[0,\infty)\times C_0([0,\infty))\times C_0([0,\infty))$, 设

$$h(b,f(\cdot),g(\cdot))(t)=f(t)\mathbf{1}_{[0,b]}(t)+(f(b)+g(t-b))\mathbf{1}_{(b,\infty)}(t).$$

注意, 对所有的 $\omega\in\Omega_\tau$ 有

$$h\left(\tau(\omega),X(\cdot,\omega),Y(\cdot,\omega)\right)=W(\cdot,\omega),$$
$$h\left(\tau(\omega),X(\cdot,\omega),-Y(\cdot,\omega)\right)=Z(\cdot,\omega).$$

考虑到注 2, 不失一般性, 以后可以假定 $\Omega_\tau\cap\widetilde{\Omega}=\Omega$, 这里 $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ 且是由那些在 $[0,\infty)$ 上 $W(\cdot,\omega)$ 有连续轨道的点 ω 所组成.

如果随机元 (τ,X,Y) 和 $(\tau,X,-Y)$ 在空间 $(\mathsf{V},\mathscr{B}(\mathsf{V}))$ 上有相同分布 (该空间是三个 Polish 空间的乘积空间上, 而距离取自三个空间距离的极大值), 于是就可证明该定理. 由于 h 是由空间 V 到空间 $C_0([0,\infty))$ 的连续映射 (以引入的距离), 这意味着, $h\in\mathscr{B}(\mathsf{V})|\mathscr{B}(C_0([0,\infty)))$ –可测的.

随机向量 (τ,X) 是 $\mathscr{F}_\tau|\mathscr{B}([0,\infty))\times\mathscr{B}(C_0([0,\infty)))$ – 可测的. 根据强马氏性, 有 $Y\perp\!\!\!\perp\mathscr{F}_\tau$, 这里 $\perp\!\!\!\perp$ 表示相互独立. 因而 $(\tau,X)\perp\!\!\!\perp Y$. 所以

$$\mathrm{Law}((\tau,X,Y))=\mathrm{Law}((\tau,X))\otimes\mathrm{Law}(Y)=\mathrm{Law}((\tau,X))\otimes\mathrm{Law}(W).$$

显然, 过程 $(-Y)$ 同样不依赖于 $\mathscr{F}_\tau$, 而因为 $(-Y)$ 也是 Wiener 过程, 则

$$\mathrm{Law}(\tau,X,-Y)=\mathrm{Law}((\tau,X))\otimes\mathrm{Law}(-Y)=\mathrm{Law}((\tau,X))\otimes\mathrm{Law}(W).$$

根据结论 1 和第一章引理 11, 为验证向量 (τ,X) 的可测性, 只需要验证它的每一坐标分量是 $\mathscr{F}_\tau$ – 可测的.

由于引理 1 的结论 3°, τ 是 $\mathscr{F}_\tau$ – 可测的随机变量.

为了证明 X 的 $\mathscr{F}_\tau$ – 可测性, 借助于构造一逼近的序列 $\mathscr{F}_\tau$ – 可测的随机元 X_n, 使得当 $n\to\infty$ 时, 有 X_n 收敛于 X.

为此引入随机变量

$$\alpha_n(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}k2^{-n}\mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(\tau(\omega))\uparrow\tau(\omega),$$

当 $n\to\infty$ 时, 对所有的 $\omega\in\Omega$.

设 $X_n(\omega)=W(t\wedge\alpha_n(\omega),\omega)$, 这里 $t\geqslant 0$ 是固定的, 而 $n\in\mathbb{N},\omega\in\Omega$. 至于验证 X_n 的 $\mathscr{F}_\tau$ – 可测性, 因为完全与定理 3 中证明一样, 在这里我们就不再去讨论了.
□

§8. 我们将看到在随机分析中反射原理是一种强有力的工具, 特别是在下面 §10 中的证明里可以体会到.

我们需要下面 Kolmogorov 的一个著名结果.

定理 6 (0 − 1 律). 设在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定一族取值于可测空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 的独立随机元 $\{X_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$, 即 $X_t : \Omega \to \mathsf{S}_t, X_t \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t, t \in T$, 记

$$\mathscr{F}^X_{\geqslant t} = \sigma\{X_s, \mathsf{S} \in T \cap [0, \infty)\}.$$

这时, “尾” σ − 代数, 即 σ − 代数 $\mathscr{G} = \bigcap_{t \in T} \mathscr{F}^X_{\geqslant t}$ 是退化. 换句话说, 对任意的 $A \in \mathscr{G}$, 概率 $\mathsf{P}(A)$ 等于 0 或 1 (如果 $T \cap [t, \infty) = \varnothing$, 则 $\mathscr{F}^X_{\geqslant t} := \varnothing$).

证. 任取一个事件 $A \in \mathscr{G}$, 并且验证 A 独立于 A. 事实上, 对每个 $t \in T$ 有 $A \in \mathscr{F}^X_{\geqslant t}$. 根据第一章引理 3, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在生成 σ − 代数 $\mathscr{F}^X_{\geqslant t}$ 的代数中的集合 A_ε, 即形如 $\{(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \in B\}$ 的集合, 这里 $B \in \mathscr{B}_{t_1, \cdots, t_n}, t \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ (所有点取自 T), $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\mathsf{P}(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$. 因此

$$|C(A, A) - C(A, A_\varepsilon)| \leqslant 2\mathsf{P}(A \triangle A_\varepsilon) < 2\varepsilon,$$

这里, 对事件 A 和 D 有 $C(A, D) = \mathsf{P}(AD) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(D)$. 由第一章引理 9 得到, σ − 代数 $\sigma\{X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}\}$ 和 $\mathscr{F}^X_{\geqslant u}$ 当 $u > t_n$ 时独立. 因此, 事件 A 和 A_ε 独立, 即 $C(A, A_\varepsilon) = 0$. 由此可得, $C(A, A) = 0$, 这意味着 $\mathsf{P}(A) - \mathsf{P}^2(A) = C(A, A) = 0$. 这样, $\mathsf{P}(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$. □

引理 2. 设 $a > 0$, Wiener 过程首次到达水平 a 的时刻是个有限停时, 即 $\tau_a(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 : W(t, \omega) = a\}$ 是相对于自然 σ− 代数流 $\mathbb{F}^W$ 是个有限停时.

证. 由定理 3 得到 τ_a 是停时. 只需要证几乎处处 $\tau_a < \infty$. 为此, 验证对实随机变量 $Y_n, n \in \mathbb{N}$ 和常数 $c \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathsf{P}(\limsup_{n \to \infty} Y_n > c) \geqslant \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}(Y_n > c).$$

事实上,

$$\mathsf{P}(\limsup_{n \to \infty} Y_n > c) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geqslant n} \{Y_m > c\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{m \geqslant n} \{Y_m > c\}\right).$$

注意, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\mathsf{P}\left(\bigcup_{m \geqslant n} \{Y_m > c\}\right) \geqslant \mathsf{P}(Y_n > c)$.

现在证 $\tau_a < \infty$. 对所有的 $c \in \mathbb{R}$ 有

$$\{W(n)/\sqrt{n} > c, \text{i.o.}\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} X_k/\sqrt{n} > c, \text{i.o.}\right\} \in \mathscr{G},$$

这里 "i.o." 表示 "**出现无穷次 (按照** n)", 而尾 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{G}$ 是由独立随机变量序列 $X_k = W(k) - W(k-1), k \in \mathbb{N}$ 构成的. 因此, 根据 Kolmogorov 的 0–1 律 (定理 6) 有

$$\mathsf{P}\{\limsup_{n\to\infty} W(n)/\sqrt{n} > c\} \in \{0,1\}.$$

对 $a > 0$ 有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\tau_a < \infty) &\geqslant \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,\infty)} W(t) > a\right) \geqslant \mathsf{P}(W(n) > a\sqrt{n}, \text{i.o.}) \\ &\geqslant \mathsf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} n^{-1/2}W(n) > a\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(n^{-1/2}W(n) > a) \\ &= \mathsf{P}(\xi > a) > 0,\end{aligned}$$

这里 $\xi \sim \mathsf{N}(0,1)$. 这样, $\mathsf{P}(\tau_a < \infty) = 1$. □

§9. 利用反射原理来找随机变量 $W(t)$ 和 $M(t,\omega) = \sup_{s\in[0,t]} W(s,\omega)$ 的联合分布, 其中 $t \geqslant 0$.

首先要注意, 对每个 $t \geqslant 0, M(t,\cdot)$ 是实随机变量. 这是由于

$$G_t f = \sup_{s\in[0,t]} f(s), \quad f \in C_0[0,\infty) \tag{30}$$

是由 $C_0[0,\infty)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射.

定理 7. 对所有的 $t, x, y \geqslant 0$ 随机变量 $W(t)$ 和 $M(t)$ 的联合分布满足关系式:

$$\mathsf{P}(W(t) < y - x, \quad M(t) \geqslant y) = \mathsf{P}(W(t) > y + x). \tag{31}$$

证. 如果 $y = 0$, 则 (31) 变成平凡的等式 $\mathsf{P}(W(t) < -x) = \mathsf{P}(W(t) > x)$. 设 $y > 0$, 根据引理 2

$$\tau_y = \inf\{s \geqslant 0, W(s) = y\}$$

是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}^W$ 的有限停时.

设 $Z = \{Z(t), t \geqslant 0\}$ 是由公式 (28) 引入的过程, 这里 $\tau = \tau_y$. 这时 $\sigma_y(\omega) = \inf\{s \geqslant 0 : Z(s,\omega) = y\}$ 是同样是对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}^Z$ 的有限停时, 因此, 对所有的 $y \geqslant 0, \omega \in \{\tau_y < \infty\}$ 有 $\sigma_y(\omega) = \tau_y(\omega)$.

注意, 对任意的 $t, y \geqslant 0$, 有 $\{\tau_y \leqslant t\} = \{M(t) \geqslant y\}$. 因此, 对所有的 $B \in \mathscr{B}(C[0,\infty)), t \geqslant 0$, 有

$$\mathsf{P}(\tau_y \leqslant t, W \in B) = \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} W(s) \geqslant y, W \in B\right) = \mathsf{P}(W \in \widetilde{B} \cap B),$$

这里, $\widetilde{B} = G_t^{-1}([y,\infty)) \in \mathscr{B}(C[0,\infty))$, 参见 (30). 利用定理 5, 可以看出

$$\mathsf{P}(\sigma_y \leqslant t, Z \in B) = \mathsf{P}(Z \in \widetilde{B} \cap B) = \mathsf{P}(W \in \widetilde{B} \cap B).$$

这样, 随机变量 (τ_y, W) 和 (σ_y, Z) 具有相同的分布.

因而, 对所有的 $x \in \mathbb{R}, t, y \geqslant 0$, 有

$$\mathsf{P}(\sigma_y \leqslant t, Z(t) < y - x) = \mathsf{P}(\tau_y \leqslant t, W(t) < y - x). \tag{32}$$

由于 W 的连续性, 对 $y \geqslant 0, \omega \in \Omega_\tau$ 有 $W(\tau_y(\omega),\omega) = y$. 因此, 对 $t \geqslant \sigma_y(\omega)$ 得到 $Z(t,\omega) = 2W(\tau_y(\omega),\omega) - W(t,\omega) = 2y - W(t,\omega)$. 这样, 对所有 $y \geqslant 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$, 由 (32) 式有

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(M(t) \geqslant y, W(t) < y - x) = \mathsf{P}(\sigma_y \leqslant t, Z(t) < y - x) \\ &= \mathsf{P}(\sigma_y \leqslant t, W(t) > y + x) = \mathsf{P}(\tau_y \leqslant t, W(t) > y + x) \\ &= \mathsf{P}(M(t) \geqslant y, W(t) > y + x). \end{aligned} \tag{33}$$

如果 $x > 0$, 则 $\mathsf{P}(M(t) \geqslant y, W(t) > y + x) = \mathsf{P}(W(t) > y + x)$ 和 (33) 式导致 (31) 式. □

§10. 由定理 7 得到区间 $[0,t]$ 上 Brown 运动极大值的分布.

推论 1 (巴舍利耶 (Bachelier)). 对所有的 $t, y \geqslant 0$ 有

$$\mathsf{P}(M(t) \geqslant y) = 2\mathsf{P}(W(t) \geqslant y) = \mathsf{P}(|W(t)| \geqslant y), \tag{34}$$

即, 对每个 $t \geqslant 0$, 有 $\mathrm{Law}(M(t)) = \mathrm{Law}(|W(t)|)$.

证. 在公式 (31) 中, 取 $x = 0$. 因为

$$\mathsf{P}(W(t) < y, M(t) \geqslant y) = \mathsf{P}(W(t) > y),$$

这样有

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(M(t) \geqslant y) = \mathsf{P}(M(t) \geqslant y, W(t) < y) + \mathsf{P}(M(t) \geqslant y, W(t) \geqslant y) \\ &= \mathsf{P}(W(t) > y) + \mathsf{P}(W(t) \geqslant y) = 2\mathsf{P}(W(t) \geqslant y) \end{aligned}$$

(考虑了, 对任意的 $y \in \mathbb{R}$ 和 $t \geqslant 0$, 有 $\mathsf{P}(W(t) = y) = 0$). □

不难发现, 与性质 $\mathrm{Law}(M(t)) = \mathrm{Law}(|W(t)|)$ 对每个 $t \geqslant 0$ 成立的同时, Levy 发现了下面关系式成立 (参见, 例如, [182, p.230]):

$$\mathrm{Law}(M - W, M) = \mathrm{Law}(|W|, L),$$

这里 $L = \{L_t(0), t \geqslant 0\}$ 是 Brown 运动在 0 点的局部时 (参见, 第八章, 习题 19). 最后的等式应理解为二维随机过程分布的重合.

推论 2. *对所有的* $y \geqslant 0$ *和* $0 \leqslant a < b < \infty$ *有*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|W(t)-W(a)|\geqslant y\right)\leqslant 4\mathsf{P}(W(b-a)\geqslant y)\equiv 2\mathsf{P}(|W(b-a)|\geqslant y). \qquad (35)$$

证. 根据定理 2, 有

$$\mathsf{P}\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|W(t)-W(a)|\geqslant y\right)\leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant b-a}W(s)\geqslant y\right)+\mathsf{P}\left(\inf_{0\leqslant s\leqslant b-a}W(s)\leqslant -y\right).$$

注意, 对所有的 $t \geqslant 0$ 和 $-W = \{-W(t), t \geqslant 0\}$ 有

$$\sup_{s\in[0,t]}(-W(s)) = -\inf_{s\in[0,t]}W(s),$$

是 Brown 运动. 由 (34) 式结论得证. □

§11. 下面的结果 (该结果属于辛钦 (Khinchin)) 是对 Wiener 过程 (Brown 运动) 轨道构造行为的研究中最著名的概率定律之一. 值得注意的是, 第一次是在对独立伯努利 (Bernoulli) 随机变量求和时, 由 Khinchin 发现重对数定律的. 在本章的补充和练习和第五章中, 将展示出, 由独立项部分和所形成的过程与 Brown 运动之间有着深层次的联系.

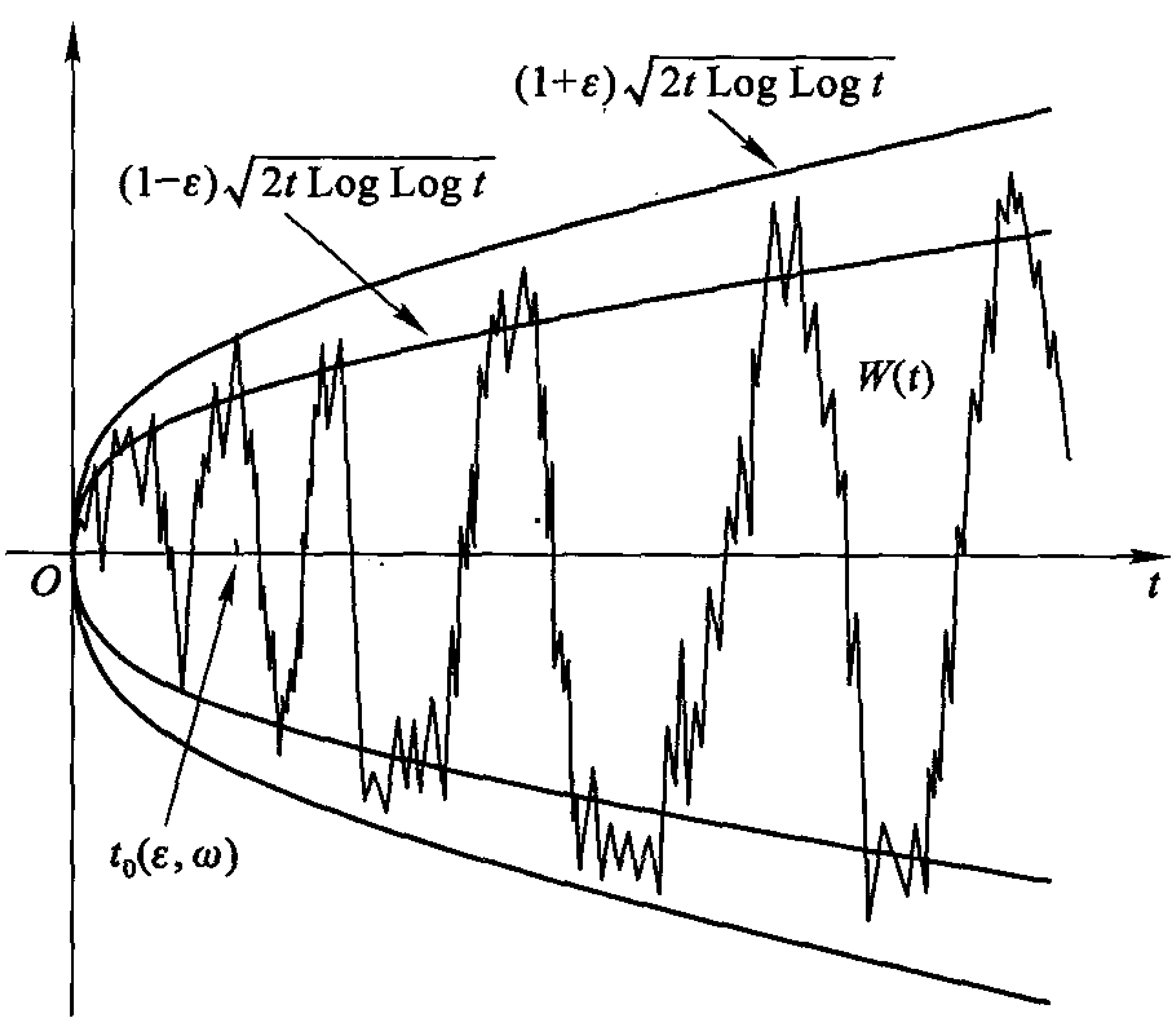


图 12

定理 8 (重对数律). *以概率 1, 有*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{W(t)}{(2t\mathrm{LogLog}t)^{1/2}}=1 \quad \text{和} \quad \liminf_{t\to\infty} f\frac{W(t)}{(2t\mathrm{LogLog}t)^{1/2}}=-1, \qquad (36)$$

这里, $\mathrm{Log}t = \ln(t\vee \mathrm{e})$, $\vee$ *表示取大值.*

从这个定理看出, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 从某个点 $t_0(\varepsilon, \omega)$ 出发, 几乎所有 Wiener 过程的轨道都是在由曲线 $\pm(1+\varepsilon)\sqrt{2t\text{LogLog}t}$ 为边界的 "筒集" 当中. 同时又以概率 1, 它们无数次地从 "筒集" 边界 $\pm(1-\varepsilon)\sqrt{2t\text{LogLog}t}$ "跳出" (参见, 图 12).

证. 证明分为两部分.

A. 设 $h(t) = (2t\text{LogLog}t)^{1/2}, V(t) = W(t)/h(t), t \geqslant 0$, 验证以概率 1, 有

$$\limsup_{t\to\infty} |V(t)| = 1.$$

取任意的 $\varepsilon > 0, c > 1$, 事件 {对无穷多个 n, 有 $|V(c^n)| > 1+\varepsilon$} 的概率为 0. 利用 (II.29) 的估计, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|V(c^n)| > 1+\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|W(1)| > (1+\varepsilon)(2\text{LogLog}c^n)^{1/2}) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}(1+\varepsilon)(\text{LogLog}c^n)^{1/2}} e^{-(1+\varepsilon)^2\text{LogLog}c^n} < \infty, \quad (37)\end{aligned}$$

因为对 $n \geqslant n_0(c)$, 即使得 $c^n \geqslant e^e$, 有 $\text{LogLog}c^n = \ln\ln c^n$ 和 $e^{-(1+\varepsilon)^2\text{LogLog}c^n} = (n\ln c)^{-(1+\varepsilon)^2}$. 根据 (37) 式的估计和 Borel – Cantelli 引理, 有

$$\mathsf{P}(|V(c^n)| > 1+\varepsilon, \text{ 无穷多次 } n) = 0.$$

设

$$A_n = \{\omega : \sup_{t\in[c^n, c^{n+1}]} |V(t,\omega) - V(c^n,\omega)| > \varepsilon\},$$

验证, 事件 A_n 发生无穷多次的概率为 0. 因为

$$|V(t) - V(c^n)| = |V(t) - W(c^n)/h(t)| + |W(c^n)/h(t) - V(c^n)|,$$

得

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A_n) \leqslant\ & \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[c^n,c^{n+1}]} |W(t) - W(c^n)| > \frac{\varepsilon}{2}h(c^n)\right) \\ &+ \mathsf{P}\left(|W(c^n)| > \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{h(c^n)} - \frac{1}{h(c^{n+1})}\right)^{-1}\right) = p_n + q_n. \quad (38)\end{aligned}$$

根据结论 2 和 (II.29), 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant n_0} p_n &\leqslant 2\sum_{n\geqslant n_0} \mathsf{P}\left(|W(c^{n+1} - c^n)| > \frac{\varepsilon}{2}h(c^n)\right) \\ &\leqslant \frac{8}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geqslant n_0} \left(\frac{c^{n+1} - c^n}{2c^n \ln\ln c^n}\right)^{1/2} \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{c^n \ln\ln c^n}{c^{n+1} - c^n}\right\} \\ &= \frac{8}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geqslant n_0} \left(\frac{c-1}{2\ln\ln c^n}\right)^{1/2} (n\ln c)^{-\varepsilon^2/(4(c-1))} < \infty, \quad (39)\end{aligned}$$

如果取 $c=c(\varepsilon)>1$, 使得 $\varepsilon^2/(4(c-1))>1$.

于是对 $y\geqslant e^e$ 有

$$\left(\frac{1}{h(y)}\right)'=-\frac{y^{-3/2}}{2\sqrt{2}}(\ln\ln y)^{-1/2}\{1+(\ln\ln y)^{-1}(\ln y)^{-1}\}.$$

因此, 利用 Lagrange 公式, 当 $n\geqslant n_0(c)$ 时, 有

$$\left(\frac{1}{h(c^n)}-\frac{1}{h(c^{n+1})}\right)^{-1}\geqslant 2c^{3n/2}(\ln\ln c^n)^{1/2}(c^{n+1}-c^n)^{-1}=\frac{2c^{n/2}}{(c-1)}(\ln\ln c^n)^{1/2}.$$

这样,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant n_0}q_n&\leqslant\sum_{n\geqslant n_0}\mathsf{P}\left(|W(1)|>\frac{\varepsilon(\ln\ln c^n)^{1/2}}{(c-1)}\right)\\&\leqslant\frac{\sqrt{2}(c-1)}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{(\ln\ln c^n)^{1/2}}(n\ln c)^{-\varepsilon^2/(2(c-1)^2)}<\infty,\end{aligned}\tag{40}$$

如果 $c=c(\varepsilon)>1$, 使得 $\varepsilon^2/(2(c-1)^2)>1$.

因此, 对每个 $\varepsilon>0$, 根据 Borel – Cantelli 引理, 由 (37) 式 ~(40) 式得出, 对几乎处处 $\omega\in\Omega$ 找到 $t_0=t_0(\varepsilon,\omega)$, 使得对所有 $t\geqslant t_0(\varepsilon,\omega)$ 有

$$|V(t,\omega)|<1+2\varepsilon.\tag{41}$$

这样, $\limsup\limits_{t\to\infty}|V(t)|\leqslant 1$ 几乎处处.

B. 现在验证, 几乎处处有

$$\limsup_{t\to\infty}V(t)\geqslant 1.$$

为此, 只需要验证对任意的 $\varepsilon\in(0,1/2)$ 和几乎处处的 ω, 从数列 $\{m^k,k\in\mathbb{N}\}$ 当中 (这里 $m=m(\varepsilon)$ 是充分大), 可以找到子列 $\{m^{k_j}\}$ (这里 $k_j=k_j(\omega)$), 使得

$$V(m^{k_j},\omega)>1-2\varepsilon,\ \text{如果}\ j>j_0(\omega,\varepsilon,m(\varepsilon)).\tag{42}$$

取事件 $B_k=\{\omega:(W(m^k)-W(m^{k-1}))/h(m^k-m^{k-1})>1+\varepsilon\},k\in\mathbb{N}$. 根据 (II.30) 有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B_k)&=\mathsf{P}(W(1)>(1-\varepsilon)(2\mathrm{LogLog}(m^k-m^{k-1}))^{1/2})\\&\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\varepsilon)(2\ln\ln(m^k-m^{k-1}))^{1/2}}(\ln(m^k-m^{k-1}))^{-(1-\varepsilon)^2},\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

因此, 对所有的 $K\geqslant K_0(\varepsilon,m)$, 有

$$\mathsf{P}(B_k)\geqslant(\ln(m^k-m^{k-1}))^{-(1-2\varepsilon)^2}\geqslant(k\ln m)^{-(1-2\varepsilon)^2}.$$

这样, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(B_k)=\infty$. 由于 Brown 运动增量的独立性, 事件 B_k 是独立的. 根据 Borel – Cantelli 引理, 以概率 1 事件 B_k 发生无穷多次, 即对几乎处处的 $\omega\in\Omega$ 可以找到子序列 $k_j=k_j(\omega,\varepsilon,m)\to\infty$, 使得对所有的 $j\in\mathbb{N}$ 有

$$(W(m^{k_j})-W(m^{k_j-1}))/h(m^{k_j}-m^{k_j-1})>1-\varepsilon,$$

即

$$V(m^{k_j})h(m^{k_j})/h(m^{k_j}-m^{k_j-1})-V(m^{k_j-1})h(m^{k_j-1})/h(m^{k_j}-m^{k_j-1})>1-\varepsilon. \quad (43)$$

注意, 当 $j\to\infty$ 时, 有

$$\frac{h(m^{k_j})}{h(m^{k_j}-m^{k_j-1})}\to\left(\frac{m}{m-1}\right)^{1/2},\quad \frac{h(m^{k_j-1})}{h(m^{k_j}-m^{k_j-1})}\to\left(\frac{1}{m-1}\right)^{1/2}. \quad (44)$$

因此, 选取足够大 $m=m(\varepsilon)$, 并考虑 (41) 式, (43) 式和 (44) 式, 得出 (42) 式. 不等式 (41), (42) 保证 (36) 式中第一关系式成立. (36) 式中第二关系式成立, 只需要取 $\{-W(t),t\geqslant 0\}$, 即可. □

§**12.** 研究 Brown 运动在 0 点邻域的行为.

推论 3 (重对数局部律 (或局部重对数律)). 以概率 1 有

$$\limsup_{t\to 0+}\frac{W(t)}{\sqrt{2t\mathrm{LogLog}(1/t)}}=1 \quad 和 \quad \liminf_{t\to 0+}\frac{W(t)}{\sqrt{2t\mathrm{LogLog}(1/t)}}=-1.$$

证. 设 $t=1/s$, 这里 $s>0$, 不难发现,

$$B(s)=\begin{cases}0, & 当\ s=0,\\ sW(1/s), & 当\ s>0,\end{cases}$$

是过程的 Brown 运动. 由定理 8 得出 $B(s)$ 在 0 点轨道的连续性, 而关于 Brown 运动其他的性质很容易验证. 由定理 8, 当 $s\to\infty$ 时, 得到该结论. □

在附录 8 中, 将进一步推广重对数定律.

补充与习题

众所周知, 对几乎处处轨道连续的 Brown 运动还有各式各样的构造. 对在第二章, 定理 8 中给出的表示式 (31) 的补充还有另一种构造, 该结果是属于 Levy.

取集合 $T_n=\{k2^{-n+1},k=0,1,\cdots,2^{n-1}\},n\in\mathbb{N}$. 设在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上给定独立标准 Gauss 随机变量族 $\{X_{n,k},k\in T_n,n\in\mathbb{N}\}$.

定义过程 $B_n = \{B_n(t), t \in [0,1]\}, n \in \mathbb{N}$. 设 $B_1(t) = tX_{1,1}, t \in [0,1]$. 进而, 在集合 T_1 上有 $B_1(0) = 0$ 和 $B_1(1) = X_{1,1}$, 对 $t \in (0,1)$ 存在 B_1 在区间 $[0,1]$ 的端点保持线性内插值. 假设过程 B_n 已经给出, 下面来构造 B_{n+1}. 设对 $t \in T_n$,

$$B_{n+1}(t) = B_n(t).$$

如果 $t = k2^{-n} \in T_{n+1} \setminus T_n$, 则假设

$$B_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(B_n(t-2^{-n}) + B_n(t+2^{-n})) + 2^{-(n+1)/2}X_{n+1,k}. \tag{45}$$

这样在集合 T_{n+1} 上给出了过程 B_{n+1}. 对于其他区间 $[0,1]$ 上的点 B_{n+1} 的定义, 将根据结点 $(t, B_{n+1}(t))$, 这里 $t \in T_{n+1}$, 利用线性内插来构造. 于是, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\omega \in \Omega$ 过程 B_n 在 $[0,1]$ 上是连续的. 注意, 在构造时, 变量 $X_{n,k}$ 部分没用上, 但是由于它们的存在, 使得公式 (45) 简化了.

显然, $\sup\limits_{t\in[0,1]} |B_1(t)| = |X_{1,1}|$, 对 $n \geqslant 1$ 有

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| = 2^{-(n+1)/2} \max_{k:k2^{-n}\in T_{n+1}\setminus T_n} |X_{n+1,k}|.$$

因此,

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+1}(t) - B_n(t)| > n2^{-(n+1)/2}\right) \leqslant 2^n \mathsf{P}(|\xi| > n),$$

这里 $\xi \sim \mathsf{N}(0,1)$. 利用 (II.28) 的估计式和 Borel – Cantelli 引理, 得到级数

$$B_1(t,\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}(B_{n+1}(t,\omega) - B_n(t,\omega))$$

在区间 $[0,1]$ 上几乎对所有的 ω 一致收敛. 根据魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理, 级数给出了在 $[0,1]$ 上几乎处处连续的函数 $B(t)$.

借助于第二章, 引理 1 很容易证明, 对每个 $n \geqslant 0$ 过程 $B_n = \{B_n(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是 Gauss 过程.

1. 试求 $\mathsf{E}B_n(t)$ 和 $\mathrm{cov}(B_n(s), B_n(t))$, 对 $s,t \in [0,1]$ 和 $n \geqslant 0$. 试证 $B(t)$ 是 Gauss 过程, 且 $\mathsf{E}B(t) = 0$ 和 $\mathrm{cov}(B(s), B(t)) = \min\{s,t\}$, 对 $s,t \in [0,1]$.

习题 1 告诉我们: $B = \{B(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Wiener 过程.

在其他 Wiener 过程的明显构造式中, 值得注意的是**维纳 (Wiener) – 佩利 (Paley)** 的结果. 他们给出了级数

$$\xi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \xi_k \sqrt{2}\frac{\sin(\pi kt)}{\pi k}, \tag{46}$$

这里 $\xi_0, \xi_1, \cdots$ 是独立同分布具有标准正态分布的随机变量. 级数在 $[0,1]$ 上几乎处处一致收敛, 且它给出了连续的随机函数乃是在 $[0,1]$ 上的 Wiener 过程.

有趣的是这个构造与**哈代 (Hardy)** 的结果 (问题是由黎曼 (Riemann) 提出的) 相比较. 该结果是函数

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2},\quad t\in\mathbb{R}$$

连续, 但是无论在哪一点上都没有导数.

别索夫 (Besov) 定理的类中的特殊情况蕴涵着上面结果, 他给出证明 (参见, [40]) 函数

$$W_{(t,\omega)}^{(n)}=\frac{t\xi_0(\omega)}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k(\omega)}{k}\sin kt$$

对某个子序列 $\{n_m\}$ 在区间 $[0,\pi]$ 上将几乎处处一致收敛到 Brown 运动 (参见, 公式 (VII.68) 和 (VII.81)).

由第二章, 定理 1 和存在连续修正的 Kolmogorov 定理 (第二章, 定理 18) 立刻得到, 原则上可以构造出在 $[0,1]$ 上连续的 Wiener 过程. 事实上, 即, 对 s 和 $t\geqslant 0$ 有

$$\mathsf{E}(W_t-W_s)^4=3(t-s)^2.$$

即估计式 (II.52) 当 $\alpha=4$ 和 $\varepsilon=1$ 是满足的.

2. 设 $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ 是正的数列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_n^{1/2}<\infty$. 试证, 当 $n\to\infty$ 时, 几乎处处有 $|W(t_n)|\to\infty$.

在对局部重对数律的补充 (参见, 推论 3) 中, 下面关于 Wiener 过程轨道的局部行为的结果是非常有益的.

3. 研究序列 $\Pi_n, n\in\mathbb{N}$ 是区间 $[0,t]$ 逐渐加细的分割 (t_m^n), 分割点以特殊的方式选取, $t_m^{(n)}=tm2^{-n}, m=0,1,\cdots,2^n$.

这时, 当 $n\to\infty$ 时, 几乎处处有

$$\sum_{m=0}^{2^n-1}(W(t_{m+1}^{(n)})-W(t_m^{(n)}))^2\to t. \tag{47}$$

4. 试验证, 关于 (47) 式几乎处处收敛不一定满足, 如果区间 $[0,1]$ 上取任意逐渐加细的分割, 即分割 $\Pi_n, n\in\mathbb{N}$, 分割点 $t_m^{(n)}, m=0,\cdots,N_n(n\in\mathbb{N})$, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\max_{0\leqslant m\leqslant N_n}(t_{m+1}^{(n)}-t_m^{(n)})\to 0.$$

(尽管如此, 但对依概率收敛是对的).

关于 (47) 式进一步推广参见, 例如, [75; 第 24 章, §3].

5. 试证, 几乎所有的 Wiener 过程的轨道是具有指标 (阶) $\gamma<1/2$ 赫尔德 (Hölder) 函数, 即在每个区间 $[a,b]\subset[0,\infty)$ 上, $s,t\in[a,b], C_\gamma=$ 常数 >0. 有

$$|W(t)-W(s)|\leqslant C_\gamma|t-s|^\gamma$$

(这个证明可以参见, 例如, [12; 定理 3, p.127]). 是否能在公式中取的 C_γ 常数不依赖于区间 $[a,b]$?

6. 试证, 以概率 1 有

$$\limsup_{t\to 0+} W(t)/t^{1/2}=\infty$$

(也就是, 在 0 点, 1/2 阶 Hölder 条件不满足).

7. 利用在证明定理 1 过程中所进行的讨论, 试证 Wiener 过程 $W=\{W(t),0\leqslant t\leqslant 1\}$ 具有几乎处处没有一点不满足 $\gamma>1/2$ 阶 Hölder 条件的轨道.

8. 试由第二章, 定理 19 求出习题 5 的结果, 和对 $q\in\mathbb{N},0\leqslant s<t<\infty$, 有

$$\mathsf{E}(W(t)-W(s))^{2q}=(2q-1)!!(t-s)^q. \tag{48}$$

用 $H_\gamma(\omega)$ 表示对 Wiener 过程的基本事件 $\omega\in\Omega$ (可以认为 $\Omega=C([0,\infty))$) 的轨道上那些点, 在该点上满足 γ 阶 Hölder 条件的集合. 习题 5 和 8 说明了, 对 $\gamma<1/2$, 有 $\mathsf{P}(H_\gamma=[0,\infty))=1$. 习题 7 说明了, 对 $\gamma>1/2$, 有 $\mathsf{P}(H_\gamma=\varnothing)=1$. 由习题 6 得到, 对每个 $t\geqslant 0$ 有 $\mathsf{P}(t\in H_{1/2})=0$, 但是**戴维斯 (Davis)** 证明了 $\mathsf{P}(H_{1/2}\neq\varnothing)=1$.

下面的结果 (参见, [73; p.313]) 可与推论 3 作有趣的比较. 为此, 先回顾一下, 随机过程称作**时齐 (齐次) 的**, 如果 $X(t+h)-X(t)$ 的分布不依赖于 t.

定理 9 (Khinchin). *如果 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是独立增量, 但不包括 Gauss 分量的时齐过程, 则几乎处处有*

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{X(t)}{\sqrt{t\ln\ln(1/t)}}=0.$$

9. 试构造具有 cadlag (右连左极) 轨道 (但不是连续的) 的实过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的例子和闭集 $F\subset\mathbb{R}$, 使得几乎处处有 $\tau_\infty<\tau_F$, 这里 τ_∞ 和 τ_F 是在定理 3 中所定义的.

10. 设 $X=\{X_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是实随机变量序列和集合 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 设 $\tau=\tau(\omega)$ 是由公式 (I.49) 所定义的, *首次到达集合* B 的时刻. 我们已经看到了 (参见, §3), τ 是相对于过程 X 的自然 $\sigma-$ 代数流的停时. 现在引入

$$\sigma(\omega)=\inf\{n\in\mathbb{N}:X_n(\omega)\notin B\} \text{ —— 首次离开集合 } B \text{ 的时刻},$$
$$\gamma(\omega)=\sup\{n\in\mathbb{N}:X_n(\omega)\in B\} \text{ —— 最末离开集合 } B \text{ 的时刻}$$

(在 τ 和 γ 的定义中, 对某个点 ω 来说, 如果在花括号中的集合是空集, 则假设在该 ω 取值为 $+\infty$). 试证, σ 是相对于过程 X 的自然 $\sigma-$ 代数流的停时. 试构造序列 X 和集合 B, 使得 γ 是相对于过程 X 的自然 $\sigma-$ 代数流停时的例子. 同时还构造序列 X 和集合 B, 使得 γ 不是相对于过程 X 的自然 $\sigma-$ 代数流停时的例子.

11. 设 $X=\{X(t),t\in T\},T\subset\mathbb{R}$ 是实随机过程和 $\mathbb{F}_T$ 是过程 X 的自然 $\sigma-$ 代数流. 设 $\tau=\tau(\omega)$ 是相对于过程 X 的自然 $\sigma-$ 代数流的停时; 如果 $\tau(\omega)=\infty$, 设

$X(\tau(\omega),\omega)=0$. 是否 $X(\tau(\omega),\omega)$ 是 $\mathscr{F}_\tau|\mathscr{B}(\mathbb{R})$– 可测的随机变量? 在 $T=\mathbb{N}$ 时, 情况又如何?

12. 假设 $\tau_a=\inf\{t>0,W(t)=a\}$, 这里 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程, $a\in\mathbb{R}$. 试证, $\tau_a\overset{\mathscr{D}}{=}a^2\tau_1$, 即随机变量 τ_a 和 $a^2\tau_a$ 的分布相重合: $\mathrm{Law}(\tau_a)=\mathrm{Law}(a^2\tau_1)$.

13. 设 U 是 Wiener 过程在 $[0,t]$ 中最大 0 点. 试证, 对随机变量U的分布 arcsin 律成立:

$$\mathsf{P}(U\leqslant x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{t}},\quad x\in[0,t].$$

回顾下面重要的概念.

定义 6. 随机变量族 $\{\xi_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ 称作一致可积的, 如果

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{\alpha\in\Lambda}\int_{\{|\xi_\alpha|\geqslant c\}}|\xi_\alpha|d\mathsf{P}=0. \tag{49}$$

由此可以得到, 对该族有

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}\mathsf{E}|\xi_\alpha|<\infty. \tag{50}$$

众所周知, (参见, 例如, [85; 第 II 章, §6]) 如果随机变量族 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 是一致可积 的和几乎处处 (或者依概率) $\xi_n\to\xi$, 则 ξ 是可积随机变量, 且当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\mathsf{E}\xi_n\to\mathsf{E}\xi,\quad \mathsf{E}|\xi_n-\xi|\to 0. \tag{51}$$

当 $\xi_n,n\geqslant 0$, 是非负可积随机变量时, $\xi_n\to\xi$ 几乎处处 (或者依概率), 这里 $\mathsf{E}\xi<\infty$. 于是有相反的结果

$$\mathsf{E}\xi_n\to\mathsf{E}\xi\Rightarrow \text{ 随机变量族 }\{\xi_n,n\geqslant 1\}\text{ 一致可积.}$$

应该特别强调的是: 在这些关系式中, 除了 (51) 式中的第二式, 几乎处处收敛 ($\xi_n\to\xi$ a.s.) 可以用依分布收敛 ($\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$) 来代替. 这个重要的事实是借助于前面所得的结果和将要证明的 Skorokhod 定理 (第五章, 定理 11).

给出一致可积明显判式如下:

定理 10 (德拉瓦莱普森 (De la Vallee Poussin) (参见, 例如, [101; p.10])). 随机变量族 $\{\xi_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ 是一致可积的当且仅当找到一个可测函数 $G:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, 即 $G\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)|\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}G(t)/t=\infty\quad\text{和}\quad\sup_{\alpha\in\Lambda}\mathsf{E}G(|\xi_\alpha|)<\infty. \tag{52}$$

由这个定理得出, 条件: 对某个 $\gamma>1$, 有

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}\mathsf{E}|\xi_\alpha|^\gamma<\infty \tag{53}$$

是 $\{\xi_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 一致可积的一个充分条件.

下面我们将描述随机变量如何能够“嵌入”到 Brown 运动中, 又如何研究随机变量和 (具有有限方差) 导致研究 Brown 运动在随机时刻的行为. 为此, 我们需要 Wald **恒等式**.

定理 11 (Wald 第一恒等式). 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ 和 τ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}, n \in \mathbb{N}$ 的停时, 且 $\mathsf{E}|\xi_1| < \infty$ 和 $\mathsf{E}\tau < \infty$. 这时,

$$\mathsf{E}S_\tau = \mathsf{E}\tau \mathsf{E}\xi_1, \tag{54}$$

这里, 对 $\omega \in \{\tau < \infty\}, S_{\tau(\omega)}(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\tau(\omega)} \xi_k(\omega)$ 和对 $\omega \in \{\tau = \infty\}$, 假设 $S_{\tau(\omega)}(\omega) = 0$.

证. 根据 S_τ 的定义, 几乎处处有

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}}. \tag{55}$$

注意,

$$\{\tau \geqslant n\} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\tau = k\} \in \mathscr{F}_{n-1}.$$

从而, 对任意的 $k \in \mathbb{N}, \xi_k$ 和 $\mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}}$ 彼此独立随机变量. 因此,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}S_\tau &= \mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_k \mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}} = \mathsf{E}\xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau \geqslant k) = \mathsf{E}\xi_1 E\tau,\end{aligned}$$

这里, 积分号与求和号交换次序是因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}|\xi_k \mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}}| = \mathsf{E}|\xi_1| \mathsf{E}\tau < \infty. \quad \square$$

从证明的过程看出, 该结果可以推广到任意的随机变量 (甚至于相关的) 序列 $\xi_1, \xi_2, \cdots$, 只要有相同的数学期望 $a \in \mathbb{R}$ 和可积的取值于自然数集的随机变量 τ, 如果对每个 $k \in \mathbb{N}, \xi_k$, 与 $\mathbf{1}_{\{\tau \geqslant k\}}$ 独立 (特别的, 如果对任意 $k \in \mathbb{N}, \xi_k$ 与 τ 独立).

14. 试证 Wald 第二恒等式: 除了定理 11 的条件外, 设 $D\xi_1 < \infty$, 这时有

$$\mathsf{E}(S_\tau - \tau \mathsf{E}\xi_1)^2 = \mathsf{E}\tau D\xi_1. \tag{56}$$

定理 12. 设 X 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的实随机变量, 且 $\mathsf{E}|X| < \infty$. 这时存在 (也可能在已知概率空间的扩张上) Brown 运动 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 和随机变量 τ, 使得

$$X \stackrel{\mathscr{D}}{=} \mathsf{E}X + W(\tau). \tag{57}$$

如果 $\mathsf{E}X^2 < \infty$, 则 τ 可以构造成 $\mathsf{E}\tau < \infty$, 且进一步有

$$\mathsf{E}\tau = DX \tag{58}$$

在证明定理之前, 首先要指出的是: 证明最困难是在于关系式 (57) 和 (58) 同时要满足.

15. 设 $X = X(\omega)$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上中心化的随机变量, 且 $\mathsf{E}X^2 < \infty$. 在概率空间 $(\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$ 上取 Brown 运动 $W = \{W(t, \omega'), t \geqslant 0\}$. 在空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) \otimes (\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$ 上根据 (I.46) 扩充定义 X 和 W. 引入 $\tau(\omega, \omega') = \inf\{t \geqslant 1 : W(t', \omega) = X(\omega)\}$. 这时, $W(\tau) = X$. 试证, 这时有 $\widetilde{\mathsf{E}}\tau = \infty$, 这里 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 为对测度 $\mathsf{P} \otimes \mathsf{P}'$ 取中值.

定理 12 的证明. 不失一般性, 可以假设, 在已知的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 不仅定义有随机变量 X, 而且还有某个 Wiener 过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$. 这样, 仅仅需要研究 $\mathsf{E}X = 0$, X 是非退化的随机变量 (否则的话, 只需要简单假设 $\tau \equiv 0$).

首先设 X 只取两个值 a 和 $b(a < 0 < b$, 因为 $\mathsf{E}X = 0)$. 如果

$$\mathsf{P}(X = a) = p, \quad \mathsf{P}(X = b) = 1 - p, \tag{59}$$

则由条件 $\mathsf{E}X = 0$ 导出

$$p = \frac{b}{b-a}, \quad 1 - p = \frac{-a}{b-a}. \tag{60}$$

由于定理 3, 量

$$\tau_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 : W(t) \in \{a, b\}\}$$

是相对于 Wiener 过程的自然 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}^W$ 的停时.

现在证, 几乎处处 $\tau_{a,b} < \infty$. 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 有

$$\{\tau_{a,b} \geqslant m\} \subset \{|W(n) - W(n-1)| \leqslant b - a, n = 1, \cdots, m\},$$

由此可得

$$\mathsf{P}(\tau_{a,b} \geqslant m) \leqslant \mathsf{P}(|W(n) - W(n-1)| \leqslant b - a, n = 1, \cdots, m) = [\mathsf{P}(|\xi| \leqslant b - a)]^m,$$

这里, $\xi \sim \mathsf{N}(0, 1)$. 这样有

$$\mathsf{P}(\tau_{a,b} = \infty) = 0 \quad \text{和} \quad \mathsf{E}\tau_{a,b}^k < \infty \quad \text{对所有的} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{61}$$

考虑到 Brown 运动的连续性, 得到以概率 1 或者 $W(\tau_{a,b}) = a$ 或者 $W(\tau_{a,b}) = b$. 因此, 如果 $p_{a,b}$ 是使得

$$\mathsf{P}(W(\tau_{a,b}) = a) = p_{a,b}, \quad \mathsf{P}(W(\tau_{a,b}) = b) = 1 - p_{a,b} \tag{62}$$

当等式

$$\mathsf{E}W(\tau_{a,b}) = 0 \tag{63}$$

成立, 则由 (62) 式可以找到 $p_{a,b}=b/(b-a)$ 和根据 (59), (60) 式对只取两值的随机变量 X 关系式 (57) 式是成立的.

值得注意的是, 借助于鞅技巧 (第四章), 利用类似对连续时间的第四章, 推论 2 的结果, 关系式 (63) 很容易得到. 但是 (63) 式也很容易的由下面的方法直接得出.

定义随机变量 $\xi_{n,m}=W(m/n)-W((m-1)/n), m,n\in\mathbb{N}$ 和设

$$\tau_{a,b}^{(n)}=\inf\{m:\xi_{n,1}+\cdots+\xi_{n,m}\notin(a,b)\}. \tag{64}$$

由于习题 10, 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 随机变量 $\tau_{a,b}^{(n)}$ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathscr{F}_k^{(n)}=\sigma\{\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,k}\},k\in\mathbb{N}$ 的停时. 类似于 (61) 式有 $\mathsf{E}\tau_{a,b}^{(n)}<\infty$. 注意, $\xi_{n,1}+\cdots+\xi_{n,\tau_{a,b}^{(n)}}=W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)$ 和 $\mathsf{E}\xi_{n,1}=0$, 根据 (54) 式找出

$$\mathsf{E}W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)=0. \tag{65}$$

关于随机变量 $\tau_{a,b}^{(n)}$ 有如下的结果.

16. 试证, 当 $n\to\infty$ 时, 几乎处处有 $\tau_{a,b}^{(n)}/n\to\tau_{a,b}$.

由于 Wiener 过程的轨道几乎处处是连续的, 所以根据这个性质, 也就当 $n\to\infty$ 时, 几乎处处有 $W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)\to W(\tau_{a,b})$.

由此可得

$$\mathsf{E}W(\tau_{a,b}^{(n)}/n)\to\mathsf{E}W(\tau_{a,b}),\quad n\to\infty. \tag{66}$$

但是还需要有下面的习题.

17. 试证, 随机变量族 $\{W(\tau_{a,b}^{(n)}/n),n\in\mathbb{N}\}$ 是一致可积的.

关系式 (66) 可以由习题 17 得到, 而 (63) 式可以由 (65) 式和 (66) 式得到. 这样, 对中心化的只取两值随机变量, 形如 (59) 式的证明了

$$X\overset{\mathscr{D}}{=}W(\tau_{a,b}). \tag{67}$$

现在研究一般情况. 设 $F(x)=\mathsf{P}(X\leqslant x)$, 考虑到 $\mathsf{E}X=0$ 和随机变量 X 是非退化的, 于是有

$$c=\int_{(-\infty,0]}(-y)dF(y)=\int_{(0,\infty)}zdF(z)\neq0. \tag{68}$$

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 是有界连续函数. 这时,

$$\begin{aligned}c\mathsf{E}f(X)&=c\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dF(x)\\&=\int_{(0,\infty)}f(z)dF(z)\cdot\int_{(-\infty,0]}(-y)dF(y)+\int_{(-\infty,0]}f(y)dF(y)\cdot\int_{(0,\infty)}zdF(z)\\&=\int_{(0,\infty)}dF(z)\int_{(-\infty,0]}(zf(y)-yf(z))dF(y).\end{aligned} \tag{69}$$

由此可得

$$\mathsf{E}f(X)=c^{-1}\int_{(0,\infty)}dF(z)\int_{(-\infty,0]}(z-y)\left\{f(y)\frac{z}{z-y}+f(z)\frac{-y}{z-y}\right\}dF(y). \tag{70}$$

在某个概率空间 $(\Omega',\mathscr{F}',\mathsf{P}')$ 上, 构造取值于 $\mathbb{R}^2$ 的随机向量 (Y,Z), 使得

$$\mathsf{P}'((Y,Z)\in B)=c^{-1}\iint_{B\cap\{(-\infty,0]\times(0,\infty)\}}(z-y)dF(y)dF(z),\quad B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^2). \tag{71}$$

因为公式 (71) 右边是非负可数可加集 B 的函数, 所以这样的构造是可行的. 至于概率测度可以由公式 (70) 得出, 只要是取函数为集合的示性函数.

如果 y 和 z 满足 $y<0<z$, 则由 (62) 式中 $p_{y,z}=z/(z-y)$ 和 (67) 式找到

$$f(y)\frac{z}{z-y}+f(z)\frac{-y}{z-y}=\mathsf{E}f(W(\tau_{y,z})). \tag{72}$$

如果对 $y\leqslant 0<z$ 设 $\tau_{0,b}=0$, 于是对 $b>0$ 这个公式是对的.

考虑到 (71) 式和 (I.25), 可以看出

$$\mathsf{E}f(X)=\int_{\mathbb{R}^2}\mathsf{E}f(W(\tau_{y,z}))d\mathsf{P}'_{(Y,Z)}(y,z). \tag{73}$$

由富比尼 (Fubini) 定理和 (I.23), 等式 (73) 可以写成

$$\mathsf{E}f(X)=\mathsf{E}\mathsf{E}'f(W(\tau_{Y,Z})), \tag{74}$$

这里, 对 $\omega\in\Omega,\omega'\in\Omega'$ 有 $\tau_{Y,Z}(\omega,\omega')=\tau_{Y(\omega),Z(\omega')}(\omega)$, 而 E' 表示对测度 P' 的积分.

取概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})=(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})\otimes(\Omega',\mathscr{F}',\mathsf{P}')$ 和对 $\widetilde{\omega}=(\omega,\omega')\in\widetilde{\Omega},t\geqslant 0$ 设

$$\widetilde{X}(\widetilde{\omega})=X(\omega),\quad \widetilde{W}(t,\widetilde{\omega})=W(t,\omega).$$

18. 试验证, 在概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 上

$$\tau(\widetilde{\omega})=\tau_{Y(\omega'),Z(\omega')}(\omega) \tag{75}$$

是随机变量, 而 $\widetilde{W}=\{\widetilde{W}(t),t\geqslant 0\}$ 是 Brown 运动.

考虑到这个习题和公式 (74), 可以看出

$$\widetilde{\mathsf{E}}f(\widetilde{X})=\widetilde{\mathsf{E}}f(\widetilde{W}(\tau)).$$

因此, 在定理 12 中所要求的关系式 (57) 可以由 $\mathrm{Law}(\widetilde{X}|\widetilde{P})=\mathrm{Law}(X|P)$ 和测度论当中的一个简单事实 (下面习题将给出) 而得到.

19. 设 P,Q 是在距离可测空间 $(\mathsf{S},\mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上的测度. 如果对任意的有界连续函数 $f:\mathsf{S}\to\mathbb{R}_+$, 有

$$\int_{\mathsf{S}}f(x)\mathsf{P}(dx)=\int_{\mathsf{S}}f(x)\mathsf{Q}(dx),$$

则在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上有 $\mathsf{P}=\mathsf{Q}$.

这样, $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 就是那个在定理 12 所叙述中的扩充概率空间. 为了完成定理的证明, 只需要验证, 在 $\mathsf{E}X^2<\infty$ 条件下有等式 (58).

20. 利用 Wald 第二恒等式 (习题 14), 试证

$$\mathsf{E}\tau_{a,b}=-ab, \tag{76}$$

再利用等式 (76), 富比尼 (Fubini) 定理和 (75) 式, 得到

$$\widetilde{\mathsf{E}}\tau=\mathsf{E}'\mathsf{E}(\tau_{Y,Z})=\mathsf{E}'(-YZ). \tag{77}$$

注意到 (71) 式和 (68) 式, 由此可得:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}\tau=E'(-YZ)&=\int_{(-\infty,0]}dF(y)(-y)\int_{(0,\infty)}dF(z)z(z-y)c^{-1}\\&=\int_{(-\infty,0]}dF(y)(-y)\left\{-y+\int_{(0,\infty)}dF(z)c^{-1}z^2\right\}\\&=\int_{(-\infty,0]}y^2dF(y)+\int_{(0,\infty)}z^2dF(z)=\mathsf{E}X^2=\widetilde{\mathsf{E}}\widetilde{X}^2.\end{aligned}$$

从而, 所要求的性质 (58) (上面是在扩充概率空间中相应的表示) 得证. □

现在, 我们需要对 Brown 运动作如下的推广.

定义 7. 随机过程 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ *称作相对于* $\sigma-$ *代数流* $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *的实 Brown 运动*, 如果满足:

1) 对每个 $t\geqslant 0$, $W(t)$ 是 $\mathscr{F}_t-$ 可测随机变量.
2) 对 $0\leqslant s<t$, 有 $W(t)-W(s)\perp\!\!\!\perp\mathscr{F}_s$ (即, $W(t)-W(s)$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立).
3) 几乎处处 $W_0=0$ 和对 $0\leqslant s<t$, 有 $W(t)-W(s)\sim\mathsf{N}(0,t-s)$.
4) 随机过程 W 的轨道几乎处处连续.

显然, 上述的定义可以推广到 $m-$ 维 Brown 运动的情况: 这时条件 3) 中要求的是, 对 $0\leqslant s<t$, 有 $W(t)-W(s)\sim\mathsf{N}(0,(t-s)I)$, 这里 I 是 m 阶单位矩阵.

不难发现, 如果 W 是相对与 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的 Brown 运动, 则它就是相对于自然 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ 的 Brown 运动. 以后, 当提到 Brown 运动, 而没涉及 $\sigma-$ 代数流时, 就自然而然地认为是相对于自然 $\sigma-$ 代数流.

设 $\mathscr{N}$ 是完全概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上的 0 概率事件集合类. 不失一般性, 可以认为在定义 7 中, 每个 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_t(t\geqslant 0)$ 都包含着所有 $\mathscr{N}$ 中的事件.

定理 13 (Skorokhod, 参见, [71]). *设* $X_1,X_2,\cdots$ *是在某个概率空间* $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ *上的中心化独立随机变量序列. 这时, 存在那样的概率空间, 在其上可以找到随机变量序列* $\{T_k\}_{k\geqslant 1}$ *和 Brown 运动* $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$, *使得*

$$\{X_k,k\in\mathbb{N}\}\overset{\mathscr{D}}{=}\{W(T_k)-W(T_{k-1}),k\in\mathbb{N}\}, \tag{78}$$

这里, 非负随机变量 $T_k - T_{k-1}, k \in \mathbb{N}(T_0 \equiv 0)$ 是独立的. 如果 $\mathsf{E}X_k^2 < \infty$, 则对所求出的序列 $\{T_k\}_{k\geqslant 1}$ 还有关系式 $\mathsf{E}(T_k - T_{k-1}) = \mathsf{E}X_k^2, k \in \mathbb{N}$.

证. 设 $\{(Y_n, Z_n)\}_{n\geqslant 1}$ 是取值于 $\mathbb{R}^2$ 上的独立随机向量序列, 且 $\{(Y_n, Z_n)\}_{n\geqslant 1} \perp\!\!\!\perp W$, 这里 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 是相对于自然 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ 的 Brown 运动. 很容易构造一个概率空间和定义在其上所有给出的随机元. 对 $t \geqslant 0$, 设 $\mathscr{H}_t = \sigma\{\mathscr{F}_t^W, \{(Y_n, Z_n)\}_{n\geqslant 1}\}$, 即是由随机变量 $W(s), s \in [0,t]$ 和 $(Y_n, Z_n)_{n\geqslant 1}$ 一起所产生的 $\sigma-$ 代数, 且都是扩充了 0 概率事件集合类. 利用下面的习题.

21. 试证, W 是相对于上题所定义的 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{H}_t)_{t\geqslant 0}$ 的 Brown 运动.

继续定理 13 的证明. 设对每个 $n \in \mathbb{N}$, 如同在公式 (64) 中所作的 X 和 (Y, Z) 分布一样, 来根据 X_n 的分布构造 (Y_n, Z_n) 的分布向量.

现在, 随机变量序列 $0 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \cdots$, 设

$$T_n = \inf\{t \geqslant T_{n-1} : W(t) - W(T_{n-1}) \in \{Y_n, Z_n\}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

不难验证, T_n 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{H}_t)_{t\geqslant 0}$ 的几乎处处有界停时. 对 Brown 运动的强马氏性的一点修正 (定理 4) 指出, 对每个 $n = 0, 1, \cdots$, 过程 $B^{(n)} = \{B_t^{(n)} = W(T_n + t) - W(T_n), t \geqslant 0\}$ 是与 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{H}_{T_n}$ 独立的 Brown 运动. 除此之外, 设 $\mathscr{A}_n := \sigma\{T_k, W(T_k); k \leqslant n\} \subset \mathscr{H}_{T_n}$. 因此, $B^{(n)} \perp\!\!\!\perp \mathscr{A}_n, n = 0, 1, \cdots$. 注意到 $(Y_{n+1}, Z_{n+1}) \perp\!\!\!\perp \sigma\{\sigma\{B^{(n)}\}, \mathscr{A}_n\}$. 所以, $((Y_{n+1}, Z_{n+1}), B^{(n)}) \perp\!\!\!\perp \mathscr{A}_n$. 由此可得, 随机变量对 $(T_{n+1} - T_n, W(T_{n+1}) - W(T_n)), n = 0, 1, \cdots$ 总起来独立. 根据定理 12 和随机变量 (Y_n, Z_n) 的构造, $W(T_{n+1}) - W(T_n)$ 的分布与 $X_n (n \in \mathbb{N})$ 的分布相重合. □

在 (78) 式中随机变量 $T_1, T_2, \cdots$ 不同构造时, 是具有某些 "极小" 性, 参见, [182]. 在该书中构造了那样的 Brown 运动 W, 使得在定理 13 中所描述的随机变量 $T_k (k \in \mathbb{N})$ 是相对于自然 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ 的有限停时.

第二章引入的 Brown 运动的进一步推广.

定义 8. 被称为指数为 $H \in (0, 1]$ 的分数 (或者是分形) Brown 运动, 如果它是中心化的 Gauss 过程 $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t), t \geqslant 0\}$, 且协方差函数为

$$R^{(H)}(s,t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s, t \geqslant 0. \tag{79}$$

当 $H = 1/2$ 时, 得到标准 Brown 运动. 常数 H 又被称作哈尔斯特 (Harst) 参数.

22. 试证, 在公式 (79) 右边的, 当且仅当 $H \in (0, 1]$ 时是协方差函数.

定义 9. 随机过程 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 称作具有平稳增量的, 如果对每个 $n \geqslant 1$, 任意的 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ 和 $h > 0$, 有

$$\begin{aligned}&(X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1}))\\&\quad \overset{\mathscr{D}}{=} (X(t_2 + h) - X(t_1 + h), \cdots, X(t_n + h) - X(t_{n-1} + h)),\end{aligned}$$

这里 $\stackrel{\mathscr{D}}{=}$ 表示依分布相等.

从下面引入的两个习题, 可以得到分数 Brown 运动是具有平稳增量的随机过程.

23. 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是 Gauss 过程, 且对所有的 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$, 有

$$\mathsf{E}(X(t)-X(s))=(t-s)c,\quad \mathsf{D}(X(t)-X(s))=f(t-s),\tag{80}$$

这里, $c\in\mathbb{R}$, 而函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$. 这时, X 是平稳增量的随机过程.

24. 试验证, 对指数为 $H\in[0,1]$ 的分数 Brown 运动有

$$\mathsf{E}(B^{(H)}(s)-B^{(H)}(t))^2=|s-t|^{2H},\quad s,t\geqslant 0.\tag{81}$$

设 (T,ρ) 是具有某个固定点 θ 的距离空间.

定义 10. 实 Gauss 过程 $B^L=\{B^L(t),t\in T\}$ 具有 0 中值和协方差函数

$$R^L(s,t)=\frac{1}{2}(\rho(s,\theta)+\rho(t,\theta)-\rho(s,t)),\tag{82}$$

称作在集合 T 上 Levy 的 Brown (实) 函数.

给出的定义中, 假设距离 ρ, 使得公式 (82) 给出是非负定的函数. 一般来说, 对任意的一个距离 ρ 这是不见得的.

25. Gauss 随机函数 $X=\{X(t),t\in T\}$ 是在集合 T 上 Levy 的 Brown 函数当且仅当几乎处处 $X(\theta)=0$ 和

$$\mathsf{E}(X(t)-X(s))^2=\rho(s,t)$$

(同时假设公式 (82) 是非负定的函数).

定义 11. 如果 $(T,\|\cdot\|)$ 是赋范空间 (特别的是 $\mathbb{R}^d$ 带有欧氏范数 $|\cdot|$), 则具有 0 中值和协方差函数

$$R(s,t)=\frac{1}{2}(\|s\|+\|t\|-\|s-t\|),\quad s,t\in T\tag{83}$$

的 Gauss 随机过程称作 Levy 的 Brown 运动.

在多维的情况, 类似公式 (79) 引入莱维 (Levy) – 申贝尔格 (Shimberg) 随机场. 它是中心化 Gauss 随机函数 $V^{(H)}=\{V^{(H)}(t),t\in\mathbb{R}_+^d=[0,\infty)^d\},H\in(0,1]$, 且协方差函数有

$$R^H(s,t)=\frac{1}{2}(|s|^{2H}+|t|^{2H}-|t-s|^{2H}),\quad s,t\in\mathbb{R}_+^d.\tag{84}$$

定义 12 (维纳 (Wiener) – 钦佐夫 (Chenzov) 随机场). 它是实 Gauss 随机函数 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}_+^d\}$ 且有

$$\mathsf{E}X(t)=0\ \text{和}\ \operatorname{cov}(X(s),X(t))=\prod_{k=1}^{d}\min\{s_k,t_k\},\tag{85}$$

这里 $t=(t_1,\cdots,t_d), s=(s_1,\cdots,s_d)\in\mathbb{R}_+^d$.

试证, 这样的随机场是存在的.

设 $W_k=\{W_k(t),t\geqslant 0\}, k=1,\cdots,d$ 是独立的 Brown 运动. 假设, 对 $t\in\mathbb{R}_+^d=[0,\infty)^d, Y(t)=W_1(t_1)\cdots W_d(t_d)$. 这时, 有

$$\mathsf{E}Y(t)=0 \quad 和 \quad \operatorname{cov}(Y(s),Y(t))=\prod_{k=1}^{d}\min\{s_k,t_k\}. \tag{86}$$

因为, $\prod\limits_{k=1}^{d}\min\{s_k,t_k\}$ 是对称非负定的函数, 所以根据第二章, 定理 3, Wiener – Chenzov 随机场是存在的.

注意, $X(t)=0$ 对点 t 几乎处处是在坐标平面中. 随机函数 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}_+^d\}$ 可以认为是指标为 "矩形" 的, 即 $X(t)=X((0,t])$, 这里, 对 $t=(t_1,\cdots,t_d)\in\mathbb{R}_+^d$ 有

$$(0,t]=(0,t_1]\times\cdots\times(0,t_d]$$

借助于 Haar 函数来构造以集合为指标的 Brown 运动, 可参见 [174].

在矩形 (平行六面体) 形如 $B=(a,b]=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_d,b_d]\subset\mathbb{R}^d$ 类上, 定义随机函数

$$X(B)=\sum(-1)^{\|\varepsilon\|}X(\varepsilon_1a_1+(1-\varepsilon_1)b_1,\cdots,\varepsilon_da_d+(1-\varepsilon_d)b_d), \tag{87}$$

这里, 求和取自所有的向量 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)$, 具有 0 或 1 的分量, 而 $\|\varepsilon\|=\sum\limits_{k=1}^{d}\varepsilon_k$ 称作随机场 $X=\{X_t,t\in\mathbb{R}^d\}$ 在 "矩形" 类上的增量.

26. 设 X 是 Wiener – Chenzov 随机场, 试证, $\{X(B),B\in\Pi\}$ 是 Gauss 随机函数, 这里 Π 是 "矩形" $B=[a,b]\subset\mathbb{R}_+^d$ 的全体. 试求它的中值和协方差函数. 试证, 对任意的 $n\geqslant 2$ 和不相交的矩形 $B_1,\cdots,B_n\in\Pi$, 随机变量 $X(B_1),\cdots,X(B_n)$ 是相互独立的. 给出以随机变量 $X(B), B\in\Pi$, 为术语的 Wiener – Chenzov 随机场定义.

定义 13. 如下随机过程被称作具有参数 $\alpha,\beta>0$ 的**奥恩斯坦 (Ornstein) – 乌伦贝克 (Uhlenbeck) 随机过程**, 如果其有如下形式:

$$V_t=e^{-\beta t}W(\alpha e^{2\beta t}),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{88}$$

这里 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是某个标准的 Brown 运动.

27. 试证, $V=\{V_t,t\in\mathbb{R}\}$ 是 Gauss 随机过程, 且求其协方差函数.

对 Brown 运动 (或更广泛的过程) 的许许多多性质可以参见, 例如, [31, 43, 48, 81, 182].

第四章
鞅．离散与连续时间

内容摘要: 鞅, 下鞅, 上鞅. 例子. 杜布 (Doob) 分解. 补偿元. 田中 (Tannaka) 公式离散变式. 滤基的扩充. 二次特征. 二次变差. Doob 的自由选择定理. 应用到随机游动 (破产问题). Doob 的下鞅极大、极小不等式. 关于穿越数引理. 下鞅收敛定理. 高尔顿 (Galton) – 沃森 (Watson) 分支过程. $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中鞅收敛定理. 莱维 (Levy) 定理. 保险数学的基本定理. 具有连续时间鞅和下鞅的一些不等式.

§1. 本章的目的是给出一系列鞅理论的基本结果, 而这些具有各式各样的应用. 在初学这一章的时候, 希望熟习 §1 中的定义和 §2 中的例子. 离散时间下鞅的构造是被 Doob 分解阐明了 (§5). 在 §6 中给出了最简单的应用. 在 §7 中解释了滤基的扩充, 即增加 0 概率事件类 $\mathscr{N}$ 的理由. 在 §9 中, 给出了在时间的随机变换下, 保持鞅 (下鞅) 性质的重要结果, 在 §11 中经典的破产问题用来举例说明它们. 在 §19 中用鞅方法 (借助 §18 中的引理) 证明保险数学的基本定理. 在复读的时候, 可以学习这章的其余部分.

首先回顾一下, 实随机变量 ξ 相对于 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$ 的条件数学期望 $\mathsf{E}(\xi|A)$ 定义为这样的函数 $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$, 使得

1) 它是 $\mathscr{A}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ – 可测的.

2) 对每个 $C \in \mathscr{A}$, 数学期望 $\mathsf{E}\zeta\mathbf{1}_C$ 和 $\mathsf{E}\xi\mathbf{1}_C$ 是确定的, 且满足 $\mathsf{E}\zeta\mathbf{1}_C = \mathsf{E}\xi\mathbf{1}_C$.

根据拉东 (Radon) – 尼科迪姆 (Nikodym) 定理 (参见, 例如, [35; 第六章, §5]) 得到, 如果 $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, 则那样的随机变量 ζ 存在, 而且精确到等价类是唯一的 (随机变量 ζ_1 和 ζ_2 等价, 或随机等价 $(\zeta_1 \sim \zeta_2)$, 如果有 $\mathsf{P}(\zeta_1 = \zeta_2) = 1$). 在向量的情况,

$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$, 存在数学期望的分量, 根据定义设

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A})=(\mathsf{E}(\xi_1|\mathscr{A}),\cdots,\mathsf{E}(\xi_n|\mathscr{A})).$$

值得注意的是, 定义条件数学期望是对垂直投影运算的一种推广 (参见, 习题 1).

设给定一概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和某个 σ - 代数流 (滤基) $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, 这里 $T\subset\mathbb{R}$, 即非降 σ- 代数族 $\mathscr{F}_t, t\in T$, 使得当 $s\leqslant t, s,t\in T$ 时, 有 $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$.

定义 1. 随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$, 这里 $X_t:\Omega\to\mathbb{R}$, 称作鞅 (相对于 σ- 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$), 如果满足下面的条件:

1) 随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 与 σ- 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 相适应, 即对每个 $t\in T, X_t$ 是 $\mathscr{F}_t$- 可测的随机变量.

2) $\mathsf{E}|X_t|<\infty, t\in T$.

3) 对 $s,t\in T, s\leqslant t$, 几乎处处 (a.s.) 有 $\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)=X_s$.

为了在定义中强调适应性, 经常过程用 $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 来表示过程 X.

如果在定义 3) 中换成 a.s. 有 $\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\geqslant X_s$ 则称过程 $(X_t)_{t\in T}$ 是下鞅 (submartingale). 如果换成 a.s. 有 $\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\leqslant X_s$ 则称过程是上鞅 (supermartingale). 显然, 过程 $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是下鞅当且仅当 $(-X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是上鞅. 这就告诉我们为什么以后, 基本上只是研究鞅和下鞅. 自然而然, 鞅也可以理解为是下鞅或上鞅.

注意, 在给出的定义 3) 等价于, 对所有的 $s,t\in T, s\leqslant t$ 和任意的 $A\in\mathscr{F}_s$, 有

$$\int_A X_s d\mathsf{P}=\int_A X_t d\mathsf{P}. \tag{1}$$

类似地, 对下鞅在 (1) 式将 “=” 换成 “$\leqslant$”. 显然由条件 3) 可得关系式 $\mathsf{E}X_t=\mathsf{E}X_s$, 对所有的 $s,t\in T$.

如果 $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是鞅 (或下鞅) 和 σ - 代数流 $(\mathscr{G}_t)_{t\in T}$, 使得 $\mathscr{G}_t\subset\mathscr{F}_t$, 且对 $t\in T$ 有 $X_t\in\mathscr{G}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 则 $(X_t,\mathscr{G}_t)_{t\in T}$ 同样是鞅 (或下鞅). 这是由于条件数学期望的 “望远镜” 性质 (参见, [85; 第 1 卷, p.270~271]): 对 σ - 代数 $\mathscr{A}_1,\subset\mathscr{A}_2\subset\mathscr{F}$ 和可积随机变量 ξ 有

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A}_1)|\mathscr{A}_2)=\mathsf{E}(\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A}_2)|\mathscr{A}_1)=\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A}_1)\ \text{ a.s.} \tag{2}$$

特别的, 如果取 $(\mathscr{G}_t)_{t\in T}$ 是自然 σ - 代数流 $\mathscr{F}_t^X=\sigma\{X_s,s\leqslant t,s\in T\},t\in T$ 则 $(X_t,\mathscr{F}_t^X)_{t\in T}$ 还是鞅 (或下鞅). 但是如果相对于 “穷” 的 (小于 $\mathscr{F}_t^X$)σ - 代数流 $\mathscr{G}_t$, 过程 $(X_t,\mathscr{G}_t)_{t\in T}$ 将不再是鞅, 因为由于 1) 对 $t\in T,\mathscr{F}_t^X\subset\mathscr{G}_t$, 是必要的.

当概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中, 没有明确指出 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 时, 则一般来说, 过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 称作鞅, 自然是相对于自然 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in T}$ 的. 但是经常将 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 直接写入到概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中, 即写成 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in T},\mathsf{P})$, 并称做滤化的概率空间, 或者说随机基. 除此之外, 如果在同一个可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 与一族概率 $\mathscr{P}=\{\mathsf{P}\}$ 有关系, 则说关于滤化的随机实验 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in T},\mathscr{P})$. 如果只是

与这概率族 $\mathscr{P}$ 中的某个具体概率 P 有关系, 则代替 "$(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是鞅", 有时用 "$(X_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})_{t\in T}$ 是鞅" 来表示, 且对 3) 成立写成 P – a.s.3) 成立.

鞅定义推广到取值于 $\mathbb{R}^m$ 向量随机过程的情况时, 要求条件 1),2),3) 对每个分量都满足.

对 $T = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \cdots\}$ 时, 在条件 3) 中, 只需要研究 $t = s + 1$ 的情况. 换句话说, 充分 (且必要) 要求 a.s. 有

$$\mathsf{E}(\Delta X_n | \mathscr{F}_{n-1}) = 0 \quad \text{这里} \quad \Delta X_n = X_n - X_{n-1}, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

定义 2. 序列 $\{\xi_n, \mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, 这里随机变量 ξ_n 是可积的, 并与 σ – 代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的, 称作*鞅差*, 如果对 $n \geqslant 0$, a.s. 有 $\mathsf{E}(\xi_n | \mathscr{F}_{n-1}) = 0$.

这样, 由 3) 看出, 过程 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅当且仅当 $(\Delta X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅差 ($\Delta X_0 := 0$).

§2. 例子

例 1. 设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的独立增量过程, 这里 $T \subset \mathbb{R}_+, X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^m)$, 且对所有的 $t \in T$, 有 $\mathsf{E}X_t = a$. 这时, $(X_t)_{t\in T}$ 是鞅 (相对于自然 σ– 代数流).

事实上, 对 $s, t \in T (s \leqslant t)$ 和自然 σ – 代数流 $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in T}$, a.s. 有

$$\mathsf{E}(X_t | \mathscr{F}_s^X) = \mathsf{E}(X_t - X_s + X_s | \mathscr{F}_s^X) = \mathsf{E}(X_t - X_s) + X_s = X_s. \tag{4}$$

特别是, m – 维 Wiener 过程是鞅. 过程 $\{N_t - \mathsf{E}N_t, t \geqslant 0\}$, 这里 $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ 是 Poisson 过程同样是鞅.

序列 $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \in \mathbb{N}$, 这里 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的独立向量, 是鞅当且仅当对 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\mathsf{E}\xi_n = 0$. 注意, 对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\sigma\{S_1, \cdots, S_n\} = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$.

关系式 (4) 说明, 可以用任意的 σ – 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 来代替自然 σ – 代数流, 只要 X_t 是 $\mathscr{F}_t$ – 可测的, 当 $t \geqslant s$ 时, $X_t - X_s$ 是独立于 $\mathscr{F}_s$, 和对所有的 $t \in T$ 有 $\mathsf{E}X_t = a \in \mathbb{R}^m$.

例 2. 设 $n \in \mathbb{N}, \zeta_n$ 是实独立随机变量, 且对所有的 n 有 $\mathsf{E}\zeta_n = 1$. 假设 $X_n = \prod_{k=1}^{n} \zeta_k, \mathscr{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}, n \in \mathbb{N}$. 这时, 有 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是鞅.

定义 3. 设在滤化的可测空间 (即, 赋有滤基的可测空间) $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in T})$ 上给定概率测度 P 和 Q. 称作测度 Q *相对于*测度 P *局部绝对连续* (记作, $\mathsf{Q} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$), 如果对每个 $t \in T$, 在 $\mathscr{F}_t$ 上测度 Q 的压缩测度 $\mathsf{Q}_t = \mathsf{Q}|_{\mathscr{F}_t}$ 相对于在 $\mathscr{F}_t$ 上测度 P 的压缩测度 $\mathsf{P}_t = \mathsf{P}|_{\mathscr{F}_t}$ 是绝对连续的. (参见, 第一章, §14).

例 3. 设 $\mathsf{Q} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$ 和 $g_t = d\mathsf{Q}_t / d\mathsf{P}_t, t \in T$. 这时, 过程 $(g_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})_{t\in T}$ 是鞅.

证. 对 $s \leqslant t$ 和 $B \in \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$, 可以看出, 由于 g_s 是 $\mathscr{F}_s$ – 可测 (相应的, g_t 是 $\mathscr{F}_t$ – 可测), 有

$$\int_B g_s d\mathsf{P} = \int_B g_s d\mathsf{P}_s = \mathsf{Q}_s(B) = \mathsf{Q}(B) = \mathsf{Q}_t(B) = \int_B g_t d\mathsf{P}_t = \int_B g_t d\mathsf{P},$$

这样结论得证 (参见 (1)). □

例 4 (鞅变换). 设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 是滤化概率空间, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 和 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅. 随机过程 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, 由 M 根据下面公式得到的

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Delta M_k, \quad n \geqslant 1, \tag{5}$$

这里, $\varphi = (\varphi_n, \mathscr{F}_{n-1})_{n\geqslant 1}$ 是可料序列, 即 φ_n 是 $\mathscr{F}_{n-1}$– 可测, 且 (为了简单) $|\varphi_n| \leqslant C$ (常数), 称作鞅变换.

类似的过程经常在赌博模型中被用来描述资本的演化 (详细可参见, [85; 第一卷, p.653]). 注意, 如果 $\varphi_n \geqslant 0$ 和 M 是下鞅 (或上鞅), 则同样对过程 X 也是.

若 $\varphi = (\varphi_k)_{k\geqslant 1}$ 是可料的, 表达式 $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k \Delta M_n$ 有时称作 **"函数 φ 对过程 M 的离散式随机积分".** 在定义 **"随机积分 $\int_0^t \varphi_s dM_s$"** 的概念 (参见, 第八章) 时候, 它自然就成为一种特殊情况.

例 5. 设 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是某个 σ – 代数流和 ξ 是可积随机变量. 假设对 $t \in T, X_t = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_t)$. 由 "望远镜" 性质 (2), 得出 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是鞅. 该过程称作 Levy 鞅.

§3. 设 $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是实独立增量随机过程, 且对某个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和所有的 $s, t \geqslant 0$, 有

$$\mathsf{E}e^{\alpha Y_t} < \infty, \quad \mathsf{E}e^{\alpha(Y_t - Y_s)} < \infty. \tag{6}$$

研究

$$Z_t = \frac{e^{\alpha Y_t}}{\mathsf{E}e^{\alpha Y_t}}, \quad t \geqslant 0. \tag{7}$$

显然, 如果 $\mathscr{F}_t = \sigma\{Y_s, s \leqslant t\}$, 则

$$\mathsf{E}(Z_t|\mathscr{F}_s) = \mathsf{E}\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{\mathsf{E}e^{\alpha Y_t}} |\mathscr{F}_s\right) = \frac{e^{\alpha Y_s}}{\mathsf{E}e^{\alpha Y_t}} \mathsf{E}e^{\alpha(Y_t - Y_s)}. \tag{8}$$

由此可知, 当 $s \leqslant t$ 时 $\mathsf{E}(Z_t/\mathscr{F}_s) = Z_s$ 当且仅当有

$$\mathsf{E}\left(\frac{e^{\alpha Y_t}}{e^{\alpha Y_s}}\right) = \frac{\mathsf{E}e^{\alpha Y_t}}{\mathsf{E}e^{\alpha Y_s}}. \tag{9}$$

这样有

引理 1. 设 $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是实独立增量随机过程, 且满足 (6) 式. 这时, 过程 $Z = \{Z_t, t \geqslant 0\}$, 这里 Z_t 是根据 (7) 式所确定的, 是鞅当且仅当 (9) 式成立.

§4. 下面的引理给出了构造更广泛下鞅例子的可能性.

引理 2. 设 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是鞅, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是凸函数且对每个 $t \in T$, 随机变量 $Y_t = h(X_t)$ 是可积的. 这时, $(Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是下鞅. 如果函数 h 是不降的, 则当 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是下鞅时, 结论依然成立.

证. 对条件数学期望利用延森 (Jensen) 不等式 (参见 [85; 第 1 卷, p.297]) 得到, 对 $s \leqslant t (s, t \in T)$ 以概率 1 有

$$h(X_s) = h(\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)) \leqslant \mathsf{E}(h(X_t)|\mathscr{F}_s). \tag{10}$$

如果 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是下鞅和 h 不降的, 则 (10) 式换成 a.s. 有 $h(X_s) \leqslant h(\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s))$.
□

§5. 下面的结果被称作 Doob 分解, 在利用鞅方法研究随机序列分析时, 它起着关键作用. 对连续时间的情况, 相对应该结果被称作杜布 (Doob) – 梅耶 (Meyer) 分解, 将在第八章的补充中给出.

定理 1 (Doob). 设在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 给定可积 (对每个 n) 与 σ – 代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的随机过程 $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$. 这时, 存在 a.s. 唯一的形如 $X = M + A$ 分解, 使得对 $n \geqslant 0$, 有

$$X_n = M_n + A_n$$

这里, $M = (M_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅和 $A = (A_n, \mathscr{F}_{n-1})_{n\geqslant 0}$ 是可料过程, 且 $A_0 \equiv 0$ 和 $\mathscr{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$. 特别的, 在表达式 $X = M + A$ 中, 过程 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是下鞅当且仅当过程 A 是不降的, 即 a.s. 有 $\Delta A_n \geqslant 0$, 对 $n \geqslant 1$.

证. 如果 X 有那样的分解, 则由于 (3) 式, 有

$$\Delta A_n = \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}) \quad \text{对所有的 } n \geqslant 1,$$

从而, 有

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta X_k|\mathscr{F}_{k-1}), \quad n \geqslant 1, \tag{11}$$

这样, 证明分解 $X = M + A$, 具有可料的随机过程 $A = (A_n, \mathscr{F}_{n-1})_{n\geqslant 0}$ 且对 $A_0 \equiv 0$ 是 a.s. 唯一的.

设 X 满足引理条件的随机过程. 现在根据 (11) 式定义可料过程 $A, n \geqslant 1$, 且设 $A_0 \equiv 0$. 这时, $M = X - A$ 是鞅, 显然满足定义 1 中的条件 1) 和 2). 同时, 对 $n \geqslant 1$,

a.s. 有

$$\mathsf{E}(\Delta M_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - \Delta A_n = 0. \tag{12}$$

也就是, 分解 $X = M + A$ 建立了.

对下鞅, 该定理的结论由公式 (11),(12) 立刻可得. □

§6. 我们将介绍, 甚至于 Doob 分解的最简单情况也导出非常有趣的结果 (例如, 下面通常是利用组合方法所建立的关系式 (19)).

例 6. 设 $S_0 = 0, S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$, 这里 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 是独立 Bernoulli 随机变量, 使得 $\mathsf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathsf{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2, n \in \mathbb{N}$. 由于引理 2 随机过程 $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$, 其中 $X_n = |S_n|$ 是下鞅 (相对于 σ – 代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, 其中 $\mathscr{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$, 对 $n \geqslant 1$ 和 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$). 试求其 Doob 分解.

我们有 $\Delta X_n = |S_n| - |S_{n-1}|, n \geqslant 1$. 这时, 有

$$\begin{aligned}\Delta M_n = \Delta X_n - \Delta A_n &= \Delta X_n - \mathsf{E}(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}) \\ &= |S_n| - \mathsf{E}(|S_n||\mathscr{F}_{n-1}), \quad n \geqslant 1.\end{aligned} \tag{13}$$

注意,

$$|S_n| = |S_{n-1}+\varepsilon_n| = (S_{n-1}+\varepsilon_n)\mathbf{1}_{\{S_{n-1}>0\}} + \mathbf{1}_{\{S_{n-1}=0\}} - (S_{n-1}+\varepsilon_n)\mathbf{1}_{\{S_{n-1}<0\}}, \tag{14}$$

这里, 1_B 是集合 B 的示性函数. 因此,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(|S_{n-1}+\varepsilon_n||\mathscr{F}_{n-1}) &= \mathsf{E}((S_{n-1}+\varepsilon_n)\mathbf{1}_{\{S_{n-1}>0\}}|\mathscr{F}_{n-1}) \\ &+\mathsf{E}(\mathbf{1}_{\{S_{n-1}=0\}}|\mathscr{F}_{n-1}) - \mathsf{E}((S_{n-1}+\varepsilon_n)\mathbf{1}_{\{S_{n-1}<0\}}|\mathscr{F}_{n-1}) \\ &= S_{n-1}\mathbf{1}_{\{S_{n-1}>0\}} + \mathbf{1}_{\{S_{n-1}=0\}} - S_{n-1}\mathbf{1}_{\{S_{n-1}<0\}}, \quad n \geqslant 1,\end{aligned} \tag{15}$$

我们这里考虑到 $\mathsf{E}(\varepsilon_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}\varepsilon_n = 0$. 由 (13)~(15) 得到

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sgn} S_{k-1})\Delta S_k$$

这里

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases} \tag{16}$$

根据 (11)

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(\Delta X_k|\mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{E}(|S_{k-1}+\varepsilon_k||\mathscr{F}_{k-1}) - |S_{k-1}|).$$

由 (15) 看出, 对 $k \geqslant 1$, 有 $\mathsf{E}(\Delta X_k|\mathscr{F}_{k-1}) = \mathbf{1}_{\{S_{k-1}=0\}}$, 因此 $A_n = L_n(0)$, 这里 $L_n(0) = \#\{k, 1 \leqslant k \leqslant n : S_{k-1} = 0\}$, 即 $L_n(0)$ 是序列 $(S_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ 为 0 的数目. 这样,

$$|S_n| = \sum_{k=1}^{n}(\text{sgn } S_{k-1})\Delta S_k + L_n(0), \tag{17}$$

正是对 Brown 运动绝对值的著名田中 (Tannaka) 公式 (参见, 例如, [86; 第 2 卷, p.375]) 的离散变式.

由 (17) 式得到

$$\mathsf{E}L_n(0) = \mathsf{E}|S_n| \tag{18}$$

利用中心极限定理 (关于随机变量 $S_n/\sqrt{n}$ 分布弱收敛于标准正态律 $N(0,1)$), 由 (18) 找到

$$\mathsf{E}L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}n}, \quad \text{当 } n \to \infty \tag{19}$$

关于 (19) 式的证明可以在第五章, 例 2 中找到. 而对一般弱收敛定理的问题将放在下一章和它的补充和习题中.

§7. 解释, 一般对 σ – 代数流所附加的条件.

注 1. 在定理 1 中, 我们要求的是 $A_0 \equiv 0$ 来代替 a.s. $A_0 = 0$. 虽然对随机变量来说所有的等式与不等式都理解为 a.s. 成立. 问题在于, 这并不保证 $A_1 = \mathsf{E}(\Delta X_1|\mathscr{F}_0) + A_0$ 是 $\mathscr{F}_0$ – 可测的. 为了避免类似此事发生, 经常假设给定的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是完全的, 且滤基 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 也是扩充的, 即每个 σ – 代数 $\mathscr{F}_t$ 包含着 P–0 概率集合类 $\mathscr{N} \in \mathscr{F}$ (为了简单只研究在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上一种测度).

下面的结果说明, 对扩充的滤基来说不仅是方便的, 而且也不影响对一般的讨论.

引理 3. 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是鞅 (下鞅), $T \subset \mathbb{R}$. 这时, 随机过程 $\overline{X} = \{X_t, \overline{\mathscr{F}}_t\}_{t\in T}$, 这里 $\overline{\mathscr{F}}_t = \sigma\{\mathscr{F}_t, \mathscr{N}\}, t \in T$, 同样是鞅 (下鞅).

证. 显然, $(X_t, \overline{\mathscr{F}}_t)_{t\in T}$ 满足定义 1 中的 1) 和 2) 条件 (考虑到 $\mathscr{F}_t \subset \overline{\mathscr{F}}_t, t \in T$) 取 $s \leqslant t (s, t \in T)$ 和验证 a.s. 有 $\mathsf{E}(X_t|\overline{\mathscr{F}}_s) = X_s$. 事实上, $X_s \in \overline{\mathscr{F}}_s|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和对任意的 $A \in \overline{\mathscr{F}}_s$, 可以找到 $B \in \mathscr{F}_s$ 和 $C \in \mathscr{N}$ 使得 $A = B \cup C$ (这样, 由于 $\mathscr{F}$ 是完全的, 可以认为 $B \cap C = \varnothing$). 根据 (1), 有

$$\int_A X_s d\mathsf{P} = \int_B X_s d\mathsf{P} = \int_B X_t d\mathsf{P} = \int_A X_t d\mathsf{P}, \tag{20}$$

这里利用了, 如果存在 $\mathsf{E}\xi$ 和 $\mathsf{P}(C) = 0$, 则 $\mathsf{E}\xi\mathbf{1}_C = 0$. 对下鞅来说, 将 (20) 式中的第二个等号换成不等号 "$\leqslant$". □

§8.　鞅和下鞅的一系列重要特征.

定义 4. 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是下鞅. 在 Doob 分解中的不降可料序列 $A = \{A, \mathscr{F}_{n-1}\}_{n\geqslant 0}(A_0 = 0, \mathscr{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\})$ 称作随机过程 X 的补偿元 (“补偿”, 即将 X 变成 $X - A$, 也就是说将下鞅变成鞅).

设 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是平方可积鞅, 即 $\mathsf{E}M_n^2 < \infty, n \geqslant 0$. 这时, 由于引理 2 可得 $M^2 = (M_n^2, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是下鞅. 根据 Doob 分解定理有 $M_n^2 = m_n + \langle M\rangle_n$, 这里 $m = (m_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅, 而 $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_n, \mathscr{F}_{n-1})_{n\geqslant 0}$ 是补偿元, 在这种情况下, 它又称鞅 M 的二次 (平方) 特征. 由 (11) 式, 对 $n \geqslant 0$ 可以找到

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathsf{E}(\Delta M_k^2|\mathscr{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \mathsf{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2|\mathscr{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathsf{E}((\Delta M_k)^2|\mathscr{F}_{k-1}) \end{aligned} \tag{21}$$

这里, 我们对任意的 $k \geqslant 1$ 利用了 $\mathsf{E}(M_k M_{k-1}|\mathscr{F}_{k-1}) = M_{k-1}\mathsf{E}(M_k|\mathscr{F}_{k-1}) = M_{k-1}^2$.

二次特征, 自然而然的可以看作类似方差, 是当 $M_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \geqslant 1$ 和 $M_0 = 0$, 这里 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立中心化的随机变量, 且 $\mathsf{E}\xi_k^2 < \infty (k \geqslant 1)$, 公式 (21) 给出 $\langle M\rangle_n = \sum\limits_{k=1}^n \mathsf{D}\xi_k = \mathsf{D}M_n, k \geqslant 1$.

定义 5. 被称作随机过程 $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$ 的二次变差是随机过程 $[X] = ([X]_n)_{n\geqslant 0}$, 这里

$$[X]_n = \sum_{k=1}^n (\Delta X_k)^2, \quad n \geqslant 1 \quad 和 \quad [X]_0 = 0. \tag{22}$$

§9.　介绍在时间的随机变换下, 保持鞅 (下鞅) 性质的一些非常有用的结果. 为此, 我们还需要数学期望的一个简单性质 (回顾在第三章, §5 中所给出的在某个事件上 σ – 代数相重合的定义).

引理 4 (条件数学期望的局部性质). 设给定子 σ – 代数 $\mathscr{G}, \mathscr{H} \subset \mathscr{F}$ 和随机变量 $\xi, \eta \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 并且在某个事件 A ($\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$ 当中的) 上有 $\mathscr{G} = \mathscr{H}$ 和 $\xi = \eta$ (几乎处处在 A 上). 这时, a.s. 在 A 上有

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) = \mathsf{E}(\eta|\mathscr{H}) \tag{23}$$

证. 函数 $\mathbf{1}_A\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G})$ 和 $\mathbf{1}_A\mathsf{E}(\eta|\mathscr{H})$ 是 $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$ – 可测的, 因而, $D = A \cap \{\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) > \mathsf{E}(\eta|\mathscr{H})\} \in \mathscr{G} \cap \mathscr{H}$. 于是

$$\mathsf{E}(\mathbf{1}_D\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G})) = \mathsf{E}(\mathbf{1}_D\xi) = \mathsf{E}(\mathbf{1}_D\eta) = \mathsf{E}(\mathbf{1}_D\mathsf{E}(\eta|\mathscr{H})).$$

如果, 几乎处处 $\zeta \geqslant 0$ 和 $\mathsf{E}\zeta = 0$, 则 a.s. 有 $\zeta = 0$, 因此, a.s. 在 A 上, 有 $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) \leqslant \mathsf{E}(\eta|\mathscr{H})$. 同理可证, 在 A 上, 有 $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{G}) \geqslant \mathsf{E}(\eta|\mathscr{H})$.　□

设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是随机序列, 即相对于某个 σ – 代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 适应的随机过程 $\{X_n, n\geqslant 0\}$. 停时 τ 称作有界的, 如果对某个自然数 k, a.s. 有 $\tau\leqslant k$. 如果 $\tau(\omega)=\infty$ (对有限 τ 有 $\mathsf{P}(\tau=\infty)=0$), 则假设 $X_{\tau(\omega)}(\omega)=0$.

定理 2 (Doob 自由选择定理或者停止定理). 设随机序列 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 具有 $\mathsf{E}|X_n|<\infty, n\geqslant 0$ 这时, 下面的条件是等价的:

1) $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅 (下鞅);

2) 对任意的有界停时 τ 和任意的停时 σ, 有 $\mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=(\geqslant)X_{\tau\wedge\sigma}$;

3) 对任意的有界停时 τ 和 σ, 且 a.s. 有 $\tau\geqslant\sigma$, 这时有 $\mathsf{E}X_\tau=(\geqslant)\mathsf{E}X_\sigma$. 在给出的公式里和即将证明中, 符号 “$(\geqslant)$” 都是当对下鞅研究时用的.

证. 1)⇒2). 设 a.s. 有 $\tau\leqslant k$, 这里 $k\in\mathbb{N}$. 这时,

$$\mathsf{E}|X_\tau|\leqslant\sum_{n=0}^{k}\mathsf{E}|X_n|<\infty$$

从而相对于任意的子 σ – 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$ 的条件数学期望 $\mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{A})$ 是存在的.

现证, 在集合 $\{\tau\geqslant\sigma\}$ 上, 有 $\mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=(\geqslant)X_\sigma$. 只要证, 对任意的 $A\in\mathscr{F}_\sigma$ 设 $B=A\cap\{\sigma=m\}, m\geqslant 0$, 有 $\mathsf{E}X_\tau\mathbf{1}_{B\cap\{\tau\geqslant m\}}=(\geqslant)\mathsf{E}X_m\mathbf{1}_{B\cap\{\tau\geqslant m\}}$. 事实上,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_m\mathbf{1}_{B\cap\{\tau\geqslant m\}}&=\mathsf{E}X_m\mathbf{1}_{B\cap\{\tau=m\}}+\mathsf{E}X_m\mathbf{1}_{B\cap\{\tau>m\}}\\&=(\leqslant)\mathsf{E}X_\tau\mathbf{1}_{B\cap\{\tau=m\}}+\mathsf{E}(\mathsf{E}(X_{m+1}|\mathscr{F}_m)\mathbf{1}_{B\cap\{\tau>m\}})\\&=\mathsf{E}X_\tau\mathbf{1}_{B\cap\{\tau=m\}}+\mathsf{E}X_{m+1}\mathbf{1}_{B\cap\{\tau\geqslant m+1\}}\\&=(\leqslant)\cdots=(\leqslant)\mathsf{E}X_\tau\mathbf{1}_{B\cap\{\tau\geqslant m\}}.\end{aligned}\tag{24}$$

根据第三章, 引理 1 集合 $\{\tau\leqslant\sigma\}$ 包含在 $\mathscr{F}_\sigma$ 中, 在该集合上, 由于引理 4, 有

$$\mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=\mathsf{E}(X_{\tau\wedge\sigma}|\mathscr{F}_\sigma)=X_{\tau\wedge\sigma},\tag{25}$$

这里, 我们利用了 $X_{\tau\wedge\sigma}$ 是 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$ – 可测的量, 而 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}\subset\mathscr{F}_\sigma$. 由 (24) 式,(25) 式得 2).

2)⇒3). 由于当 a.s. $\tau\geqslant\sigma$ 时, a.s. 有 $X_{\tau\wedge\sigma}=X_\sigma$. 显然有

$$\mathsf{E}X_\tau=(\geqslant)\mathsf{E}X_{\tau\wedge\sigma}=\mathsf{E}X_\sigma$$

3)⇒1). 设 τ 和 σ 是停时, 且 a.s. 有 $\tau\leqslant k$, 这里 k 是某个自然数. 设 $\alpha=\tau\wedge\sigma$, 并且取任意的集合 $A\in\mathscr{F}_\alpha$. 很容易看出,

$$\alpha_A=\alpha\mathbf{1}_A+\infty\mathbf{1}_{\overline{A}},\quad \tau_A=\tau\mathbf{1}_A+\infty\mathbf{1}_{\overline{A}},\quad \beta=\alpha_A\wedge k,\quad \delta=\tau_A\wedge k$$

是停时和对所有的 $\omega \in \Omega$ 有 $\beta \leqslant \delta \leqslant k$ (认为 $\infty \cdot 0 = 0, \infty \cdot 1 = \infty$). 因此, $\mathsf{E}X_\delta = (\geqslant)\mathsf{E}X_\beta$. 从而,

$$\mathsf{E}X_\tau \mathbf{1}_A + \mathsf{E}X_k \mathbf{1}_{\overline{A}} = (\geqslant)\mathsf{E}X_\alpha \mathbf{1}_A + \mathsf{E}X_k \mathbf{1}_{\overline{A}}.$$

这样,

$$\mathsf{E}X_\tau \mathbf{1}_A = (\geqslant)\mathsf{E}X_{\tau\wedge\sigma}\mathbf{1}_A.$$

考虑到, $X_{\tau\wedge\sigma}$ 是 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$ - 可测的量, 而公式 (1) 后的注, 导致

$$\mathsf{E}(X_\tau | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) = (\geqslant)X_{\tau\wedge\sigma} \tag{26}$$

取 $\tau \equiv n$ 和 $\sigma \equiv m$, 这里 $0 \leqslant m \leqslant n (m, n \in \mathbb{Z}_+)$. 这时 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathscr{F}_m$, 根据第三章引理 1 和 (26) 式变为条件 1). □

由已证的定理立刻得到

推论 1. 随机序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅 (下鞅) 当且仅当所有随机变量 X_n 是可积的, 且对任意不降有界的停时 τ_n 序列 (即, 对 $n \geqslant 1$, a.s. 有 $\tau_n \leqslant \tau_{n+1}$, 和对某个自然数 k_n, a.s. 有 $\tau_n \leqslant k_n$), 随机序列 $(X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n})_{n\geqslant 0}$ 是鞅 (下鞅).

推论 2. 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅. 设 τ 是有限停时, 使得对某个非负常数 c 和所有的 $n \geqslant 0$ a.s. $|X_{t\wedge n}| \leqslant c$. 这时有 $\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_0$.

事实上, 当 $n \to \infty$ 时, a.s. 有 $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau$ (如同一般, 在 0 概率集合 $\{\tau = \infty\}$ 上, 设 $X_\tau = 0$). 根据 Lebesgue 控制收敛定理, 随机变量 X_τ 是可积的, 且当 $n \to \infty$ 时, 有 $\mathsf{E}X_{\tau\wedge n} \to \mathsf{E}X_\tau$. 由于定理 2 的 3), 有 $\mathsf{E}X_{\tau\wedge n'} = \mathsf{E}X_0$. 由此可得需要的结果.

§10. 已证的定理 2 中最有用的结果当然是 1)⇒2). 我们将引入一些条件, 以便保证对不是有界停时的情况下这种蕴涵关系依然成立.

推论 3. 设 $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅 (下鞅), τ 是有限停时, 使得

$$\mathsf{E}|X_\tau| < \infty \tag{27}$$

和

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}|X_n|\mathbf{1}_{\{\tau > n\}} = 0. \tag{28}$$

这时, 对任意的停时 σ 有

$$\mathsf{E}(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) = (\geqslant)X_{\tau\wedge\sigma} \tag{29}$$

特别的, 如果 σ 是有限停时, 且 a.s. 有 $\sigma \leqslant \tau$ 和 $\mathsf{E}|X_\sigma| < \infty$, 则

$$\mathsf{E}X_\tau = (\geqslant)\mathsf{E}X_\sigma. \tag{30}$$

证. 根据定理 2, 对有界停时 $\tau_N = \tau \wedge N$, 对 $N \geqslant 1$ 有

$$\mathsf{E}(X_{\tau\wedge N}|\mathscr{F}_\sigma) = (\geqslant) X_{\tau\wedge N\wedge\sigma}.$$

显然, 当 $N \to \infty$ 时, a.s. 有 $X_{\tau\wedge N\wedge\sigma} \to X_{\tau\wedge\sigma}$. 因此, 只需要证对某个子序列 $\{n_k\}, n_k \to \infty (k \to \infty)$ 成立关系式, 即当 $k \to \infty$ 时, a.s. 有

$$\mathsf{E}(X_{\tau\wedge n_k}|\mathscr{F}_\sigma) \to \mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) \tag{31}$$

条件 (28) 等价于存在序列 $\{m_j\}, m_j \to \infty (j \to \infty)$, 使得

$$\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}|X_{m_j}|\mathbf{1}_{\{\tau>m_j\}} = 0 \tag{32}$$

这时, 由于 (32) 式, 当 $j \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}|\mathsf{E}(X_{\tau\wedge m_j}|\mathscr{F}_\sigma) - \mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)|\\ &\leqslant \mathsf{E}|X_{\tau\wedge m_j} - X_\tau| \leqslant \mathsf{E}|X_{m_j}|\mathbf{1}_{\{\tau>m_j\}} + \mathsf{E}|X_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau>m_j\}} \to 0\end{aligned} \tag{33}$$

因为根据 Lebesgue 控制收敛定理 (a.s. 有 $\tau < \infty$, 因此当 $m_j \to \infty$ 时, a.s. 有 $\mathbf{1}_{\{\tau>m_j\}} \to 0$) 有 $\mathsf{E}|X_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau>m_j\}} \to 0 (j \to \infty)$.

现在从序列 $\{m_j\}$ 中取子列 $\{n_k\}$, 使得 (31) 式成立 (由在 L^1 空间中收敛的序列经常可以提取 a.s. 收敛的子列).

X_σ 的可积性和 (29) 式的成立保证 (30) 式的成立. □

引理 5. *设随机变量族 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是下鞅, 且 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 一致可积, 则对任意的有限停时 τ (即对停时 τ 有 $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$) 满足条件 (27) 和 (28).*

证. 既然, 当 $n \to \infty$ 时有 $\mathsf{P}(\tau > n) \to 0$, 则由在 [85; 第1卷, p.236] 中引理 2 得到条件 (28). 除此之外, 由于 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的一致可积得出

$$\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty \tag{34}$$

对有界停时 $\tau_N = \tau \wedge N$, 这里, $N \in \mathbb{N}$, 根据定理 2 (第三点) 有 $\mathsf{E}X_{\tau_N} \geqslant \mathsf{E}X_0$. 因此

$$\mathsf{E}|X_{\tau_N}| = 2\mathsf{E}X^+_{\tau_N} - \mathsf{E}X_{\tau_N} \leqslant 2\mathsf{E}X^+_{\tau_N} - \mathsf{E}X_0. \tag{35}$$

由于引理 2, 序列 $X^+ = (X^+_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是下鞅. 再一次用定理 2 (第三点), 得到 $\mathsf{E}X^+_{\tau_N} \leqslant \mathsf{E}X^+_N \leqslant \mathsf{E}|X_N|$.

注意, 当 $N > \tau(\omega)$ a.s. 有 $\tau_N(\omega) = \tau(\omega)$. 从而, 当 $N > \tau(\omega)$ a.s. 有 $X_{\tau_N} = X_\tau$. 考虑到 $|X_{\tau_N}| \geqslant 0$, 利用 (34) 式, (35) 式, 根据法图 (Fatou) 引理 (参见, [85; 第 1 卷, p.233]) 得出

$$\mathsf{E}|X_\tau| = \mathsf{E}\liminf_N |X_{\tau_N}| \leqslant \liminf_N \mathsf{E}|X_{\tau_N}| \leqslant \sup_N \mathsf{E}|X_{\tau_N}| \leqslant 3\sup_N \mathsf{E}|X_N| < \infty. \quad \square$$

§11. 作为在时间的随机变换下保持鞅性质结果的解释, 我们来研究经典的关于破产问题.

例 7. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立同分布 Bernoulli 随机变量:

$$\mathsf{P}(\xi_1 = 1) = p, \quad \mathsf{P}(\xi_1 = -1) = q = 1 - p \ \ (0 < p < 1).$$

设 $S_n = x + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, 这里 x 是固定的整数, $n \geqslant 1$. 利用赌博来解释, x 是某个赌徒的初始资本, 而 S_n 是在时刻 n 他的资本.

取整数 a 和 b (“边界”) $a < b$, 使得 $x \in (a, b)$. 试问, 以多少概率随机游动 $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$, 走出边界 a 早于边界 b (走出水平 a 意味着赌徒的破产, 而走出水平 b 意味着赌徒胜出).

设

$$\tau_a = \inf\{n \geqslant 1 : S_n = a\}, \tau_b = \inf\{n \geqslant 1 : S_n = b\}, \tau = \inf\{n \geqslant 1 : S_n \notin (a, b)\}.$$

随机变量 τ_a, τ_b, τ 是相对于 σ - 代数族 $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 1}$ 的停时, 这里 $\mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$, 且根据第二章习题 15, τ 是有限停时.

注意, $X_n = (q/p)^{S_n}, n \geqslant 0$ 是相对于 σ - 代数族 $(\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 的鞅 (这里 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$) 由于定义 1 中的 1) 和 2), 显然, 对 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\mathsf{E}(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) = (q/p)^{S_{n-1}} \mathsf{E}((q/p)^{\xi_n}) = X_{n-1}.$$

对任意的 $n \geqslant 0$ 随机变量 $S_{\tau \wedge n}$ 的值是位于 a 和 b 之间. 因此, 对所有的 $n \geqslant 0$, 有 $\mathsf{E}|X_{\tau \wedge n}| \leqslant c$, 这里常数 $c = c(a, b, p)$.

利用推论 2, 得到

$$\mathsf{E}X_0 = (q/p)^x = \mathsf{E}X_\tau = (q/p)^a \mathsf{P}(S_\tau = a) + (q/p)^b \mathsf{P}(S_\tau = b).$$

值得注意的是

$$\mathsf{P}(S_\tau = a) + \mathsf{P}(S_\tau = b) = 1$$

(因为 $\tau < \infty$ a.s.), 当 $p \neq q$ 时, 有

$$\mathsf{P}(S_\tau = a) = \mathsf{P}(\tau_a < \tau_b) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^b}{(q/p)^a - (q/p)^b}.$$

如果 $p = q = 1/2$, 则解更简单. 显然, 可以取 $a - x$ 和 $b - x$ 来代替 a 和 b, 这时, 认为初始资本为 0. Wald 第一恒等式 (参见, 第三章定理 11) 给出, 对 $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \notin (a - x, b - x)\}$, 有

$$\mathsf{E}S_\tau = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{E}\tau = 0.$$

因此,

$$(a-x)\mathsf{P}(S_\tau=a-x)+(b-x)\mathsf{P}(S_\tau=b-x)=0,$$

考虑到 $\mathsf{P}(S_\tau=a-x)+\mathsf{P}(S_\tau=b-x)=1$, 由此可得

$$\mathsf{P}(S_\tau=a-x)=(b-x)/(b-a).$$

这样, 对随机游动, 初试始点为 $x\in\mathbb{Z}$, 在 $n=0$ 时, 当 $p=q=1/2$ 和边界 $a<b(a,b\in\mathbb{Z},x\in(a,b))$, 有

$$\mathsf{P}(\tau_a<\tau_b)=(b-x)/(b-a).$$

§12. 对鞅和与鞅相近的过程建立一系列重要不等式时, 定理 2 表现出非常有效.

定理 3 (Doob 极大和极小概率不等式). 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant0}$ 是下鞅. 这时, 对任意的 $N\in\mathbb{N}$ 和所有的 $u>0$, 有

$$u\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant n\leqslant N}X_n\geqslant u\right)\leqslant \mathsf{E}X_N\mathbf{1}_{\{\max_{0\leqslant n\leqslant N}X_n\geqslant u\}}\leqslant \mathsf{E}X_N^+, \tag{36}$$

$$u\mathsf{P}\left(\min_{0\leqslant n\leqslant N}X_n\leqslant -u\right)\leqslant -\mathsf{E}X_0+\mathsf{E}X_N\mathbf{1}_{\{\min_{0\leqslant n\leqslant N}X_n\leqslant -u\}}\leqslant -\mathsf{E}X_0+\mathsf{E}X_N^+ \tag{37}$$

证. 定义停时 $\tau=\min\{n\geqslant0:X_n\geqslant u\}\wedge N$. 这时,

$$\mathsf{E}X_N\geqslant \mathsf{E}X_\tau=\mathsf{E}X_\tau\mathbf{1}_A+\mathsf{E}X_\tau\mathbf{1}_{\overline{A}}=u\mathsf{P}(A)+\mathsf{E}X_N\mathbf{1}_{\overline{A}},$$

这里 $A=\left\{\max_{0\leqslant n\leqslant N}X_n\geqslant u\right\}$. 因此,

$$u\mathsf{P}(A)\leqslant \mathsf{E}X_N-\mathsf{E}X_N\mathbf{1}_{\overline{A}}=\mathsf{E}X_N\mathbf{1}_A\leqslant \mathsf{E}X_N^+.$$

(37) 式的证明是类似的, 只需要利用停时 $\tau=\min\{n\geqslant0,X_n\leqslant -u\}\wedge N$. □

下面的定理是推广了 Kolmogorov 关于上面估计概率 $\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant n\leqslant N}|S_n|>u\right)$ 的经典结果 (参见, 例如, [85; 第 2 卷, p.535]), 这里, 是对具有有限的二阶矩的独立中心化随机变量 $\xi_0,\cdots,\xi_N$ 部分和 $S_n=\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_n(n\leqslant N)$.

定理 4 (Doob). 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant0}$ 是鞅和对某个 $p\geqslant1$, 任意的 $n\geqslant0$, 有 $\mathsf{E}|X_n|^p<\infty$. 这时, 对所有的 $u>0$ 和自然数 N 有

$$\mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant n\leqslant N}|X_n|\geqslant u\right)\leqslant u^{-p}\mathsf{E}|X_N|^p. \tag{38}$$

证. 对下鞅 $\{|X_n|^p,\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0}$ 应用不等式 (36), 且考虑到有

$$\left\{\max_{0\leqslant n\leqslant N}|X_n|\geqslant u\right\}=\left\{\max_{0\leqslant n\leqslant N}|X_n|^p\geqslant u^p\right\}. \quad \square$$

除了上述 (36) 式和 (38) 式 **"极大概率不等式"** 以外, 在随机分析中下面的 **"极大 L^p – 不等式"** 起着重要的作用.

定理 5 (Doob 极大 L^p – 不等式). 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅或是非负下鞅. 设 $\mathsf{E}|X_n|^p<\infty$, 这里 $p\in(1,\infty)$ 和 $n\leqslant N$. 这时

$$\left\|\max_{0\leqslant n\leqslant N}|X_n|\right\|_p\leqslant (p/(p-1))\|X_N\|_p, \tag{39}$$

这里 $\|\xi\|_p=(\mathsf{E}|\xi|^p)^{1/p}$.

证. 不失一般性 (考虑到引理 2) 可以认为, 对 $n\leqslant N$ 有 $X_n\geqslant 0$ a.s.. 设 $M_N=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N}X_n$. 为了计算非负随机变量 p 阶矩 (参见, 例如, [85; 第1卷, p.258]) 不断地利用不等式 (36), Fubini 定理和赫尔德 (Holder) 不等式, 得到

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(M_N^p)&=p\int_0^\infty u^{p-1}\mathsf{P}(M_N>u)du\leqslant p\int_0^\infty u^{p-2}\mathsf{E}(X_N\mathbf{1}_{\{M_N\geqslant u\}})du\\&=p\mathsf{E}\left(X_N\int_0^{M_N}u^{p-2}du\right)=\frac{p}{p-1}\mathsf{E}(X_NM_N^{p-1})\\&\leqslant\frac{p}{1-p}(\mathsf{E}X_N^p)^{1/p}(\mathsf{E}M_N^p)^{(p-1)/p}.\quad\square\end{aligned}$$

需要强调的是, 极大不等式 (39) 对 $1<p<\infty$ 是成立. 而当 $p=1$ 时, 需要特别研究 (参见习题 23).

§13. 在研究下鞅收敛性的问题时 (§14), 我们需要估计在时间区间 $[0,N]$ 中下鞅 "自下而上" 穿越区域 (a,b) 的次数 $\beta_N(a,b)$.

为此引入必要的表示. 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是下鞅和 (a,b) 是某个区间 $a<b$. 定义停时 $\tau_k,k\geqslant 0$, 且设 $\tau_0=0$ 和

$$\tau_{2m-1}=\min\{n:n>\tau_{2m-2},X_n\leqslant a\},\tau_{2m}=\min\{n:n>\tau_{2m-1},X_n\geqslant b\},m\in\mathbb{N}.$$

通常假设, τ_k 和 $\tau_j,j>k$, 如果相应的花括号集合是空集, 则认为等于无穷. 设

$$\beta_N(a,b)=\begin{cases}0, & \text{如果 } \tau_2>N,\\ \max\{m:\tau_{2m\leqslant N}\}, & \text{如果 } \tau_2\leqslant N.\end{cases}$$

不难发现, 这个量正是在时间由 0 到 N 中, 随机过程 "自下而上" 穿越区域 (a,b) 的 "**穿越次数**" (这个思想, 完全由图 13 可以看明白).

引理 6 (Doob 关于穿越次数). 设 $(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是下鞅和给定数 $a,b(a<b)$. 这时, 穿越次数的平均数有下面的不等式:

$$\mathsf{E}\beta_N(a,b)\leqslant\frac{\mathsf{E}(X_{N-a})^+}{b-a}\leqslant\frac{\mathsf{E}X_N^++a}{b-a}. \tag{40}$$

证. 对随机序列 $(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 来说, 量 $\beta_N(a,b)$ 等于对随机序列 $((X_n-a)^+,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的量 $\beta_N(0,b-a)$, 因此, 我们以后认为 $a=0$ 和 $X_n\geqslant 0,n\geqslant 0$.

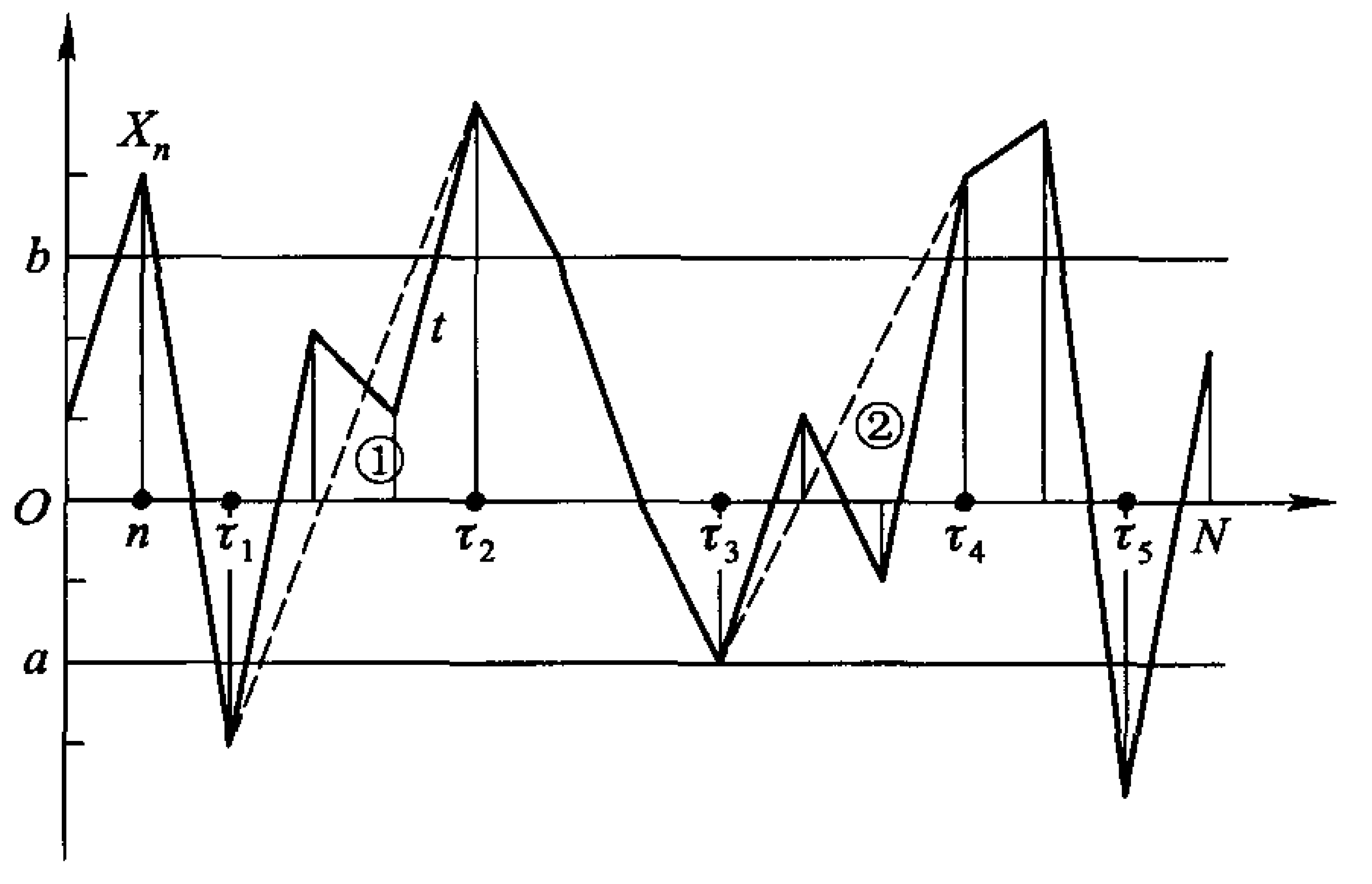


图 13

假设 $X_0 = 0, \mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ 和对 $i \geqslant 0$,

$$\phi_i = \mathbf{1}_{\{\tau_m < i \leqslant \tau_{m+1},\ \text{对某些不可数的 } m\}}.$$

这时, 显然有 $b\beta_N(0,b) \leqslant \sum_{i=1}^{N}(X_i - X_{i-1})\phi_i$.

$$\text{注意, } \{\phi_i = 1\} = \bigcup_{m \text{ 为不可数}} (\{\tau_m < i\} \setminus \{\tau_{m+1} < i\}) \in \mathscr{F}_{i-1}, i \geqslant 1.$$

因此,

$$\begin{aligned} b\mathsf{E}\beta_N(0,b) &\leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}[(X_i - X_{i-1})\phi_i] = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}[\phi_i(\mathsf{E}(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1})] \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N}(\mathsf{E}X_i - \mathsf{E}X_{i-1}) = \mathsf{E}X_N, \end{aligned}$$

这样就证明了不等式 (40). □

§14. 下面关于下鞅收敛的结果自然而然是经典分析中关于有界递增数列存在极限定理的类比.

定理 6 (Doob). 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是下鞅, 有 $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$, 这时, 以概率 1 存在 $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$, 且 $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$.

证. 反证法. 若 $\underline{X} = \liminf_{n\to\infty} X_n, \overline{X} = \limsup_{n\to\infty} X_n$ 且 $\mathsf{P}(\underline{X} < \overline{X}) > 0$. 因为

$$\{\underline{X} < \overline{X}\} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \{\underline{X} < a < b < \overline{X}\},$$

这里 $\mathbb{Q}$ 是有理数全体, 则存在某两个有理数 $a<b$, 使得

$$\mathsf{P}(\underline{X}<a<b<\overline{X})>0. \tag{41}$$

由于引理 6, 对任意的自然数 N, 有

$$\mathsf{E}\beta_N(a,b)\leqslant(\mathsf{E}X_N^+ + |a|)/(b-a).$$

而序列 $\beta_N(a,b)$ 是不降的, 所以存在极限, 用 $\beta_\infty(a,b)=\lim\limits_{N\to\infty}\beta_N(a,b)$ 来表示. 这时,

$$\mathsf{E}\beta_\infty(a,b)\leqslant\left(\sup_N \mathsf{E}X_N^+ + |a|\right)/(b-a).$$

注意到, 因为对下鞅 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant1}$ 有关系式 $\mathsf{E}X_n^+\leqslant\mathsf{E}|X_n|=2\mathsf{E}X_n^+-\mathsf{E}X_n\leqslant 2\mathsf{E}X_n^+-\mathsf{E}X_1$, 则

$$\sup_n \mathsf{E}X_n^+<\infty \Leftrightarrow \sup_n \mathsf{E}|X_n|<\infty. \tag{42}$$

这样 a.s. 有 $\mathsf{E}\beta_\infty(a,b)<\infty$.

但是, 假设 $\mathsf{P}(\underline{X}<\overline{X})>0$, 即存在某两个有理数 a 和 b, $a<b$ 满足 (41) 式. 这就意味着, 在集合 $\{\omega:\underline{X}<a<b<\overline{X}\}$ 上, 穿越次数 $\beta_\infty(a,b)$ 等于无穷. 既然, 这个集合的概率是严格正的, 所以 $\mathsf{E}\beta_\infty(a,b)=\infty$, 矛盾. 于是由假设 $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n|<\infty$ 得到 $\mathsf{P}(\underline{X}<\overline{X})=0$, 即 $\mathsf{P}(\underline{X}=\overline{X})=1$, 也就是以概率 1 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(=X_\infty)$.

最后, 根据 Fatou 引理, 有

$$\mathsf{E}|X_\infty|=\mathsf{E}(\liminf_{n\to\infty}|X_n|)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathsf{E}|X_n|\leqslant\sup_n \mathsf{E}|X_n|<\infty. \quad \square$$

自然而然, 定理 6 可以应用到鞅和上鞅 (前面已经指出过, 鞅也是个下鞅, 如果 $(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant1}$ 是上鞅, 则 $(-X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant1}$ 是下鞅). 值得注意的是条件 $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n|<\infty$ 对非负上鞅来说自然满足的.

推论 4. *设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant1}$ 是非负下鞅, 对某个 $p\in(1,\infty)$ 有 $\sup\limits_n \mathsf{E}X_n^p<\infty$ 这时, 以概率 1 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_\infty$ 也在 L^p 收敛的意义下.*

证. 因为 $(X_n^p,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant1}$ 是下鞅 (参见, 引理 2), 则根据假设 $\sup\limits_n \mathsf{E}X_n^p<\infty$ 和定理 6, 有以概率 1 存在 X_n^p 的极限, 也就是说 X_n 的极限 (由于随机变量 $X_n, n\geqslant1$ 的非负性) 存在.

由定理 5, 得

$$\mathsf{E}\sup_n X_n^p\leqslant(p/(p-1))^p\sup_n \mathsf{E}X_n^p<\infty. \tag{43}$$

因此, 如果 $X_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}X_n$, 则

$$|X_n-X_\infty|^p\leqslant2^{p-1}(X_n^p+X_\infty^p)\leqslant2^p\sup_n X_n^p, \tag{44}$$

这样, 随机变量 $|X_n - X_\infty|^p, n \geqslant 1$ 被可积随机变量 $2^p \sup\limits_n X_n^p$ 所控制. 由于以概率 1 收敛 $X_n \to X_\infty$, 根据 Lebesgue 控制收敛定理有 $\mathsf{E}|X_n - X_\infty|^p \to 0$, 即在 L^p 意义下收敛 $(X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty)$. □

§15. 下面例子说明了, 应用定理 6 去研究分支随机过程的渐进行为的可能性.

例 8 (高尔顿 (Galton) – 沃森 (Watson) 分支过程). 设质量 $\{\xi_k^{(n)}, k, n \geqslant 1\}$ 是取值于非负整数的独立同分布随机变量, 且 $\mathsf{E}\xi_1^{(1)} = \mu > 0$. 假设 $S_0 = 1, S_1 = \xi_1^{(1)}$ 和对 $n \geqslant 2, S_n = \sum\limits_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)} \left(\sum\limits_{k=1}^{0} \xi_k^{(n)} := 0, n \geqslant 1\right)$. 这样构造的序列 $S = \{S_n, n \geqslant 0\}$ 称作分支随机过程. 它描述了某种受普及数量的演化趋势, 其数量是以下面的形式发展. 最初时刻 $n = 0$ 有 1 个受普及的代表, 他可普及一个随机数量 $\xi_1^{(1)}$ (可以取值于 $0, 1, 2, \cdots$) 的人群, 这一代受普及人群中的每一个代表, 又以同样的方式, 彼此之间相互独立地又普及一个随机数量的人群, 它的分布如同前面的 $\xi_1^{(1)}$. 这个复制过程就发生了, 假设中的最后一代, 就是意味着这一代还没有产生新的受普及者.

引入随机变量

$$X_n = S_n/\mu^n, n \geqslant 1,$$

验证它构成一个相对于自然 σ – 代数流 $\mathscr{F}_n = \sigma\{X_0, \cdots, X_n\}, n \geqslant 0$ 的鞅.

由于随机变量 $\{\xi_k^{(n)}, k \geqslant 1\}$ 独立于 "历史" $(S_0, S_1, \cdots, S_{n-1})$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) &= \mu^{-n}\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)} \middle| X_0, \cdots, X_{n-1}\right) \\
&= \mu^{-n}\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{S_{n-1}} \xi_k^{(n)} \middle| S_0, \cdots, S_{n-1}\right) \\
&= \mu^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left(\mathbf{1}_{\{S_{n-1}=j\}}\sum_{k=1}^{j} \xi_k^{(n)} \middle| S_0, \cdots, S_{n-1}\right) \\
&= \mu^{-n}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{\{S_{n-1}=j\}}\sum_{k=1}^{j}\mathsf{E}(\xi_k^{(n)}|S_0, \cdots, S_{n-1}) \\
&= \mu^{-n+1}\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{1}_{\{S_{n-1}=j\}} = S_{n-1}/\mu^{n-1} = X_{n-1},
\end{aligned}$$

这样就证明了鞅性.

不难看出, $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n| = \sup\limits_n \mathsf{E}X_n = 1$. 因此, 根据定理 6 得到当 $n \to \infty$ 时, 有 $X_n \to X_\infty$ a.s. 和 $\mathsf{E}X_\infty < \infty$ 由此可得, 如果 $\mu < 1$ 则当 $n \to \infty$ 时, 有 $S_n \to 0$ a.s..

换句话说, 在 $\mu < 1$ 时, 以概率 1 普及数量退化 (为 0).

利用生成函数的方法 (参见, 例如, [68; §36]) 可以证明, 当 $\mu=1$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(S_n=0)=1$ 和当 $\mu>1$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(S_n=0)<1$.

分支过程详细内容在, 例如, 小册子 [67, 139]. 作为这个方面领域的初步, 可以阅读 [61] 中的 §4.

§16. 推论 4 是关于 (非负下鞅, 特别是鞅) L^p – 收敛 (当 $p>1$) 结果之一. 下面的定理将对 $p=1$ 时研究鞅收敛的问题.

定理 7. 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅. 下面一些条件是等价的:

1) $X_n=\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n), n\geqslant 1$ 这里 ξ 是某个可积的随机变量;

2) 族 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是一致可积的;

3) 存在可积随机变量 X_∞, 使得有 L^1 – 收敛, 即当 $n\to\infty$ 时, $\mathsf{E}|X_\infty-X_n|\to 0$;

4) $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n|<\infty$ 和 $X_k=\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_k), X_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}X_n, k\geqslant 1$ (a.s. 极限存在且由于定理 6 是可积的).

证. 1)⇒2). 对 $n\geqslant 1$ 和任意的 $a>0, b>0$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\leqslant \mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\\
&=\mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a,|\xi|\leqslant b\}}+\mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a,|\xi|>b\}}\\
&\leqslant b\mathsf{P}(|X_n|>a)+\mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|\xi|>b\}}\leqslant \frac{b}{a}\mathsf{E}|X_n|+\mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|\xi|>b\}}\\
&\leqslant \frac{b}{a}\mathsf{E}|\xi|+\mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|\xi|>b\}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{a\to\infty}\sup_n \mathsf{E}|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\leqslant \mathsf{E}|\xi|\mathbf{1}_{\{|\xi|>b\}}.$$

注意, $b>0$ 是任意取的, 且可以取极限 $b\to\infty$. 这时由于 $\mathsf{E}|\xi|<\infty$, 上边不等式右边趋于 0. 这就证明了 2).

2)⇒3). 由于族 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 的一致可积性, 得到 $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n|<\infty$. 根据定理 6, 有 a.s. 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_\infty$. 再一次利用族 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 的一致可积性, 得到 (参见, (III.51)) $\mathsf{E}|X_n-X_\infty|\to 0$ 即在 L^1 中收敛.

3)⇒4). 由 3) 可得 $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n|<\infty$. 因此根据定理 6, a.s. 存在 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=Y$, 且 $\mathsf{E}|Y|<\infty$. 条件 3) 说明 a.s. $Y=X_\infty$, 其中 X_∞ 在条件 3) 中说明. 剩下只需验证 $X_k=\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_k), k\geqslant 1$.

对任意的 $n\geqslant 1, k\geqslant 1$ 有

$$\mathsf{E}|\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k)-\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_k)|\leqslant \mathsf{E}|X_n-X_\infty|.$$

因为, 当 $n \to \infty$ 时有 $\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \to 0$ 和对 $n \geqslant k$ a.s. 有 $\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k) = X_k$, 则对 $k \geqslant 1$ a.s. 有 $X_k = \mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_k)$.

4)⇒1). 蕴涵是显然. □

定理 7 给了构造出不一致可积鞅简单例子的可能性.

例 9. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量, 且 $\mathsf{P}(\xi_1 = 0) = \mathsf{P}(\xi_1 = 2) = 1/2$. 假设 $X_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k, n \geqslant 1$. 则序列 $X = \{X_n, n \geqslant 1\}$ 是不一致可积鞅.

事实上, 因为它是例 2 特殊情况, 所以序列 X 是鞅. 注意 $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}, \mathsf{P}(X_n \neq 0) = 2^{-n}, n \geqslant 1$, 因此当 $n \to \infty$ 时, a.s. 有 $X_n \to 0$. 假设, 族 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一致可积的, 这时, 由于定理 7 中的 2)⇒3) 就得出当 $n \to \infty$ 时, $\mathsf{E}X_n \to 0$. 但是 $\mathsf{E}X_n = 1, n \geqslant 1$. 从而 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 不是一致可积的.

§17. 设在 (完全的) 滤化的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathsf{P})$ 上, 给定随机变量 ξ, 且 $\mathsf{E}|\xi| < \infty$. 这个随机变量 "伴随" 产生了一个一致可积 Levy 鞅

$$X = (X_n, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathsf{P}), \quad X_n = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n).$$

根据定理 7 以概率 1, 甚至于在 L^1 - 收敛意义下, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$. 这个极限给出了极其重要的自然表示. 下面的结果, 一般称作 Levy 定理, 它是最早的有关鞅收敛定理中的一个, 是在 20 世纪 30 年代中得到的 (延森 (Jensen) 1934, 莱维 (Levy) 1935). 当时, 研究的是由某些随机变量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 所产生的 σ - 代数 $\mathscr{F}_n$, 而作为随机变量 ξ 取的是集合 $B \in \mathscr{F}$ 的示性函数 $\mathbf{1}_B$.

设 $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 表示包含所有 σ - 代数 $\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N}$ 的最小 σ - 代数.

定理 8 (Levy). *当 $n \to \infty$ 时, 以概率 1 有*

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n) \to \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty). \tag{45}$$

这里的收敛同样可以是 L^1 - 收敛.

证. 根据定理 7, 以概率 1 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n) = X_\infty,$$

并且, 对所有的 $n \geqslant 1$, 有

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n) = \mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n). \tag{46}$$

验证 a.s. $X_\infty = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)$. 显然, $X_n = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n) \in \mathscr{F}_n|\mathscr{B}(\mathbb{R}), n \geqslant 1$. 由于 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_\infty$, 随机变量 X_n 是 $\mathscr{F}_\infty$ - 可测的 $(n \geqslant 1)$. 根据第一章引理 6 有 $X_\infty \in \overline{\mathscr{F}}_\infty|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 由于第一章引理 7 可以找到 $\mathscr{F}_\infty$ - 可测随机变量 Z_∞, 使得 a.s. $Z_\infty = X_\infty$ 这样, 只需要验证 a.s. $Z_\infty = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)$. 为此, 要证对任意的集合 $A \in \mathscr{F}_\infty$, 有

$$\mathsf{E}Z_\infty \mathbf{1}_A = \mathsf{E}\xi \mathbf{1}_A.$$

因为 a.s. $Z_\infty = X_\infty$, 最后的等式等价于, 对每个 $A \in \mathscr{F}_\infty$, 有

$$\mathsf{E}X_\infty \mathbf{1}_A = \mathsf{E}\xi \mathbf{1}_A \tag{47}$$

根据 (46) 式关系式 (47) 对每个包含在代数 $\mathscr{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 中的事件 A 成立 (从而组成 π - 系). 很容易看出, 所有满足 (47) 式 $\mathscr{F}$ 中的集合 A 组成 λ - 系. 根据单调类定理, $\sigma\{\mathscr{A}\}$ 包含在 λ - 系中. 显然, $\sigma\{\mathscr{A}\} = \mathscr{F}_\infty$, 因此对所有的 $A \in \mathscr{F}_\infty$, (47) 式成立. □

§**18.** 对连续时间鞅或下鞅的研究要比离散时间的复杂. 但是, 有一系列的结果确是较简单地转换 (在一定的条件下) 为连续时间的情况.

由于引理 3, 在研究鞅或下鞅 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 时, 认为 σ - 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是扩充的.

定义 6. 相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}$, τ 称作可选时 (停时), 如果函数 $\tau : \Omega \to [0, \infty]$, 使得对每个 $t \geqslant 0$, 有 $\{\omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathscr{F}_t$.

引理 7. *设 $X = (X_\tau, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是具有 a.s. 右连续轨道的鞅. 设 σ 和 τ 是相对于 σ - 代数流 $\mathbb{F}$ 的可选时, 且 a.s. 有 $\sigma \leqslant \tau \leqslant c$, 这里 c 是正常数. 这时,*

$$\mathsf{E}X_\tau = \mathsf{E}X_\sigma \tag{48}$$

(在 0 概率集合 $\{\sigma = \infty\}$ 和 $\{\tau = \infty\}$ 上, 假设 $X_\sigma = 0$ 和 $X_\tau = 0$).

证. 引入集合 $T_n = 2^{-n}\mathbb{Z}_+ = \{k2^{-n}, k \in \mathbb{Z}_+\}, n \in \mathbb{N}$. 显然, $(X_u, \mathscr{F}_u)_{u\in T_n}$ 是鞅. 定义 $\tau(n) = 2^{-n}[2^n\tau + 1]$ 和 $\sigma(n) = 2^{-n}[2^n\sigma + 1]$, 这里 $n \in \mathbb{N}$, $[\cdot]$ 是数的整数部分. 显然, $\tau(n), \sigma(n) \in T_n$ 和当 $n \to \infty$ 时, 对几乎所有的 $\omega \in \Omega, \tau(n) \downarrow \tau, \sigma(n) \downarrow \sigma$. 除此之外, a.s. $\sigma(n) \leqslant \tau(n), n \in \mathbb{N}$. 注意, $\tau(n), \sigma(n)$ 是相对于 σ- 代数流 $(\mathscr{F}_u)_{u\in T_n}$ 的停时, 因为对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$ 有 $\{\tau(n) \leqslant k2^{-n}\} = \{\tau < k2^{-n}\} \in \mathscr{F}_{k2^{-n}}$. (类似对 $\sigma(n), n \in \mathbb{N}$). 这时, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有估计式 a.s. $\tau(n) \leqslant c + 1$. 因此, 由于定理 2 (在这定理中研究的是参数集 $\mathbb{Z}_+$, 而不是 T_n, 这不影响), 对 $n \in \mathbb{N}$, a.s. 有

$$\mathsf{E}(X_{\tau(n)} | \mathscr{F}_{\sigma(n)}) = X_{\sigma(n)}. \tag{49}$$

根据同一定理, 对 $m \in \mathbb{Z}_+$, a.s. 有

$$\mathsf{E}(X_{c(m)} | \mathscr{F}_{\sigma(n)}) = X_{\sigma(n)}, \quad n \geqslant m \tag{50}$$

这里 $c(m) = 2^{-m}[2^m c + 1]$. 在定理 7 的证明过程中说明了, 对任意的 σ - 代数族 $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{F}, \alpha \in \Lambda$ (ξ 是可积随机变量), 随机变量 $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A}_\alpha)$ 全体是一致可积的. 考虑到 $t \in \mathbb{R}_+, X_t$ 的轨道是右连续的, 同时 (由 (50) 所推出的) 族 $\{X_{\sigma(n)}\}$ 是一致可积的,

得出当 $n \to \infty$ 时 a.s. $X_{\sigma(n)} \to X_\sigma$ 和在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中 L^1 – 收敛. 这样, X_σ 是可积随机变量. 因为, 对 $n \geqslant m$ 有 a.s. $\mathsf{E}(X_{c(m)}|\mathscr{F}_{\tau(n)}) = X_{\tau(n)}$, 类似地得出当 $n \to \infty$ 时 a.s. $X_{\tau(n)} \to X_\tau$ 和在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中 L^1 – 收敛. 根据第三章引理 1, 对 $n \geqslant m$ 有 $\mathscr{F}_{\sigma(n)} \subset \mathscr{F}_{\sigma(m)}$. 因此, 对每个 $m \in \mathbb{N}$ 随机变量 $X_{\sigma(n)}$ 是 $\mathscr{F}_{\sigma(m)}$ – 可测的. 由第一章引理 6, 可以看出对任意的 $m \in \mathbb{N}, X_\sigma$ 是 $\overline{\mathscr{F}}_{\sigma(m)}$ – 可测随机变量, 即 X_σ 是 $\mathscr{G}$ – 可测随机变量, 这里

$$\mathscr{G} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathscr{F}}_{\sigma(m)}. \tag{51}$$

现证明

$$\mathsf{E}(X_\tau|\mathscr{G}) = X_\sigma \quad \text{a.s.} \tag{52}$$

为此, 只需要对每个 $A \in \mathscr{G}$, 有

$$\mathsf{E}X_\tau \mathbf{1}_A = \mathsf{E}X_\sigma \mathbf{1}_A \tag{53}$$

既然, 对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathscr{G} \subset \overline{\mathscr{F}}_{\sigma(n)}$, 由 (49) 式和第一章引理 7 得到, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathsf{E}X_{\tau(n)}\mathbf{1}_A = \mathsf{E}X_{\sigma(n)}\mathbf{1}_A$. 等式两边让 n 趋于无穷, 且利用已证的 $X_{\tau(n)}L^1$ – 收敛到 X_τ 和 $X_{\sigma(n)}L^1$ – 收敛到 X_σ, 导出 (53) 式. 关系式 (52) 显然的导出了 (48) 式. □

§19. 利用鞅方法非常简单的就得到**克拉默 (Cramer) – 卢恩伯格 (Luenberger) 保险模型** (第一章例 3) 中的基本结果 (定理 9). 为此, 设

$$\psi(v) = \mathsf{E}e^{v\eta_1} < \infty, \text{ 对 } v > 0. \tag{54}$$

对有有限 “支付” 量 η_j 来说, 这个条件显然是满足的, 也是非常现实的. 因为 a.s. $\eta_1 \geqslant 0$, 则对 $v \leqslant 0$, (54) 式成立. 经过完全类似于 (II.5) 的计算, 对 $0 \leqslant s < t$ 和 $v \in \mathbb{R}$ 得到

$$\mathsf{E}e^{-v(Y_t - Y_s)} = e^{(t-s)g(v)}, \text{ 这里 } g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - vc. \tag{55}$$

由 (55) 式, 注意到 $Y_0 = y_0$, 有 $\mathsf{E}e^{-vY_t} = e^{tg(v) - vy_0}, t \in \mathbb{R}_+$. 因此关系式 (9) 成立, 且对每个 $v \in \mathbb{R}$ 过程

$$Z = \{Z_t = e^{-vY_t - tg(v)}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

是相对于 σ – 代数流 $\mathscr{F}_t = \sigma\{Z_s, 0 \leqslant s \leqslant t\} \equiv \sigma\{Y_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}, t \in \mathbb{R}_+$ 的鞅.

引入 “破产” 时

$$\tau = \inf\{t > 0 : Y_t < 0\} \equiv \inf\{t > 0 : Y_t \in (-\infty, 0)\}. \tag{56}$$

因为 $\{Y_t, t \geqslant 0\}$ 有 a.s. 右连续轨道, 而集合 $(-\infty, 0)$ 是开集, 类似于第三章定理 3 得到 (作为练习试验证), τ 是可选时, 即对任意的 $t \in \mathbb{R}_+$ 有 $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$. 由于引理

7 ($\sigma = 0 \leqslant \tau \wedge t \leqslant t$; 显然,0 和 $t \wedge \tau$ 是有界可选时) 对 $t, v \in \mathbb{R}_+$ 考虑到不等式 a.s. $Y_\tau \leqslant 0$ 有

$$\begin{aligned} e^{-vy_0} &= \mathsf{E}Z_0 = \mathsf{E}Z_{t\wedge\tau} \geqslant \mathsf{E}\exp\{-vY_{t\wedge\tau} - (t\wedge\tau)g(v)\}\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \\ &\geqslant \mathsf{E}\exp\{-vY_\tau - \tau g(v)\}\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \\ &\geqslant \mathsf{E}e^{-\tau g(v)}\mathbf{1}_{\{\tau\leqslant t\}} \geqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant t} e^{-sg(v)}\mathsf{P}(\tau\leqslant t). \end{aligned} \tag{57}$$

这样, 对 $v \geqslant 0$ 和 $t \geqslant 0$ 有

$$\mathsf{P}(\tau \leqslant t) \leqslant e^{-vy_0} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} e^{sg(v)}. \tag{58}$$

设

$$c > \lambda a, \text{ 这里 } a = \mathsf{E}\eta_1 < \infty. \tag{59}$$

这时 $g'(v) = \lambda\psi'(v) - c$ 和 $g'(0) = \lambda a - c < 0$, 除此之外, 因为 $\psi''(v) = \mathsf{E}\eta_1^2 e^{v\eta_1}$ (由条件 $\mathsf{E}\eta_1 > 0$ 推出 $\mathsf{E}\eta_1^2 > 0$), 所以对 $v \geqslant 0$ 有 $g''(v) = \lambda\psi''(v) \geqslant \lambda\mathsf{E}\eta_1^2$. 因此存在唯一的数 $v_0 > 0$, 使得 $g(v_0) = 0$. 取 $v = v_0$, 由 (58) 式对所有的 $t \in \mathbb{R}_+$ 得到 $\mathsf{P}(\tau \leqslant t) \leqslant e^{-v_0 y_0}$. 由此有

$$\mathsf{P}(\tau < \infty) \leqslant e^{-v_0 y_0}. \tag{60}$$

这样, 就证明了下面关于保险数学中的基本结果:

定理 9. 设由具有强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程 (I.10) 所描述的 Cramer – Luenberger 保险模型 (I.11); 随机变量 $\eta_j, j \in \mathbb{N}$ 满足条件 (54) 和不等式 (59). 这时, "破产" 概率 $\mathsf{P}(\tau < \infty)$ 可以用公式 (60) 式来估计, 这里, y_0 是初始 (原始) 资本, $v_0 > 0$ 是方程 $g(v) = 0, v \in \mathbb{R}_+$ (唯一的) 的根, 而函数 g 是由 (55) 式给出的.

§20. 以后我们还需要下面的结果 (参见, 例如 (36)). 在这一节里 T 表示某个正数.

推论 5. 设 $(X_s, \mathscr{F}_s)_{0\leqslant s\leqslant T}$ 是具有连续轨道的下鞅. 这时, 对任意的 $c > 0$ 有

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} X_s \geqslant c\right) \leqslant \mathsf{E}X_T^+/c. \tag{61}$$

证. 考虑到 $X_t, 0 \leqslant t \leqslant T$ 的连续轨道, 有

$$\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T} X_s > u\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k:0\leqslant k2^{-n}\leqslant T} \{X_{k2^{-n}} > u\} \cup \{X_T > u\}$$

在证明 (36) 式的过程中 (用 $X_{s_1}, \cdots, X_{s_m}, S_1 < \cdots < S_m$ 来代替 $X_0, \cdots, X_N$) 给出不等式

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{0\leqslant k2^{-n}\leqslant T} \{X_{k2^{-n}} > u\} \cup \{X_T > u\}\right) \leqslant \mathsf{E}X_T^+/u.$$

由于, 当 $N \to \infty$ 时有 $\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \to \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, 再对 u 取极限, 得到不等式 (61). □

推论 6 (Doob). 设 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是具有 a.s. 连续轨道的平方可积鞅 (即, 对 $t\in[0,T]$ 有 $\mathsf{E}X_t^2<\infty$). 这时, 对所有的 $c>0$ 有

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t|\geqslant c\right)\leqslant c^{-2}\mathsf{E}X_T^2. \tag{62}$$

证. 考虑到 $(X_s^2, \mathscr{F}_s)_{s\in[0,T]}$ 是下鞅, 由不等式 (61) 直接可得. □

补充与习题

1. 设随机变量 $\xi\in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和 σ - 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$. Pr_H 是垂直投影到子空间 $H=L^2(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})\subset L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的算子. 试证 $E(\xi|\mathscr{A})=\mathrm{Pr}_H\xi$.

注意, 因为空间 $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 在空间 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中稠密, 所以算子 Pr_H 根据连续性能够延拓到空间 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上.

2. 设 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个 σ - 代数流. 试证, τ 是相对于 σ - 代数族 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的可选时当且仅当 τ 是相对于 σ - 代数流 $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$ 的停时, 这里 $\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s, t\geqslant 0$. 引入 σ - 代数

$$\mathscr{F}_{\tau+}=\{A\in\mathscr{F}: A\cap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t, \text{对每个 } t\geqslant 0\}.$$

3. 在关系式 (51) 中, 是否有 σ - 代数 $\mathscr{G}=\mathscr{F}_{\sigma+}$?

4. 设 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是可积随机变量序列, $\mathscr{F}_n=\sigma\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}, X_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k, n\in\mathbb{N}$. 试证, $(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅, 当且仅当 $\mathsf{E}\xi_{n+1}f_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$, 对任意有界 Borel 函数 $f_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和所有的 $n\geqslant 1$.

非常有趣的是上面的结果与下面简单验证过的结论进行比较:

实随机变量 (不一定可积) $\xi_k, k\geqslant 1$ 是独立当且仅当对所有的 n 和任意有界 Borel 函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $f_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 有 $\mathrm{cov}(g(\xi_{n+1})f_n(\xi_1,\cdots,\xi_n))=0$.

5. 试证, 如果 $(\xi_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是独立中心化随机变量序列, $\mathscr{F}_n=\sigma\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$, $n\geqslant 1$, 则过程 $(S_{n,m},\mathscr{F}_n)_{n\geqslant m}$ 其中

$$S_{n,m}=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m}, \quad n\geqslant m,$$

对每个 $m\geqslant 1$ 是具有 0 中值的鞅.

6. 设罐中装有 a 个白球和 b 个黑球. 从罐中每次地随机提取一个球, 并且在返回该球到罐中的时候, 再加入与取出球同样颜色的 d 个球. 用 $X_n (n\geqslant 1)$ 表示罐中在 n 次取出、返回后, 白球数与总球数之比 $(X_0:=a/(a+b))$. 试证 $X=\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是鞅.

7. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})=([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\text{mes})$, mes 是 Lebesgue 测度. 设 $\{T_n,n\geqslant 1\}$ 是区间 $[0,1]$ 上加细分割序列, 即 T_n 是由点 $0=t_{n,0}<t_{n,1}<\cdots<t_{n,m_n}=1$ 组成, 且 $T_n\subset T_{n+1},n\geqslant 1,m_n\geqslant 2$. 引入 $[0,1]$ 上 σ - 代数 $\mathscr{F}_n$, 它是由集合 $\Delta_{n,1}=[0,t_{n,0}],\Delta_{n,k}=(t_{n,k-1},t_{n,k}],2\leqslant k\leqslant m_n,n\geqslant 1$ 所生成的. 对函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 假设 $n\geqslant 1$, 有

$$X_n(\omega)=\sum_{k=1}^{m_n}\frac{f(t_{n,k})-f(t_{n,k-1})}{t_{n,k}-t_{n,k-1}}\mathbf{1}_{\Delta_{nk}}(\omega),$$

试证, $(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅.

8. 设在上面习题中函数 f 满足利普希茨 (Lipschitz) 条件, 即对 $x,y\in[0,1]$ 和某个常数 $L>0$, 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$. 设分割 T_n 使得当 $n\to\infty$ 时, 有 $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant m_n}(t_{n,k}-t_{n,k-1})\to 0$. 试证, $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n(:=\sigma\{\mathscr{F}_n,n\in\mathbb{N}\})=\mathscr{B}([0,1])$ 和族 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是一致可积的. 这时根据定理 7, 当 $n\to\infty$ 时, 随机变量 $X_n\to X_\infty$ a.s. 和 L^1 - 收敛, 这里 $X_\infty\in\mathscr{B}([0,1])|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 因此, 对任意的 $[a,b]\subset[0,1]$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_a^b X_n dt=\mathsf{E}X_n\mathbf{1}_{[a,b]}\to\mathsf{E}X_\infty\mathbf{1}_{[a,b]}=\int_a^b X_\infty dt. \tag{63}$$

因为当 $n\to\infty$ 时有 $\int_a^b X_n dt\to f(b)-f(a)$ (请解释为什么?), 则从 (63) 式得出, 函数 f 是绝对连续的, 且它的密度 (相对于 Lebesgue 测度) 可以作为随机变量 $X_n,n\to\infty$ 的极限来找到.

9. 设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上的实随机变量序列, 并设 $f_n^0(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $f_n^1(x_1,\cdots,x_n)$ 是在 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ 上 $(n\geqslant 1)$ 某个相对于 Lebesgue 测度的概率密度. 研究似然比

$$L_n(\omega)=\frac{f_n^1(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))}{f_n^0(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))},\quad n\geqslant 1$$

如果 $f_n^0(z)=0$, 假设 $f_n^1(z)=0$ (这时 $L_n(z):=0$), $z\in\mathbb{R}^n$. 试证 $(L_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅, 这里, $\mathscr{F}_n=\sigma\{X_1,\cdots,X_n\},n\geqslant 1$.

10. 设 $T\subset\mathbb{R}_+$ 和 $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是复值鞅, 即 $((\operatorname{Re}X_t,\operatorname{Im}X_t),\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是取值于 $\mathbb{R}^2$ 的鞅, 它的每一个分量 (根据定义) 是鞅. 这时, 对 $s\leqslant t,s,t\in T$, 有 a.s. $\mathsf{E}(X_t|\mathscr{F}_s)=X_s$ (这里 $\mathsf{E}(Y+iZ|\mathscr{A}):=\mathsf{E}(Y|\mathscr{A})+i\mathsf{E}(Z|\mathscr{A})$ 对可积随机变量 Y,Z, 和 σ - 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$). 设对 $t\in T$ 有 $\mathsf{E}|X_t|^2<\infty$. 试证 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是具有不相关增量的过程, 即对 $v<u\leqslant s<t,u,v,s,t\in T$ 有 $\mathsf{E}(X_t-X_s)\overline{(X_u-X_v)}=0$ (进而, 平方可积鞅是处于具有常数中值的独立增量过程与不相关增量过程之间).

11. 设 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 是独立实随机变量序列. 并设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k,n\geqslant 1$. 利用鞅方法试证, 对级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 下面结果是等价的:

1) 级数 a.s. 收敛;

2) 级数依概率收敛;

3) 级数依分布收敛.

注意, 根据 Kolmogorov "0 – 1" 律 (第三章定理 6), 该级数收敛与发散都是以概率 1 成立的.

12. 设 $Y = \{Y_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$ 是 (复值) 独立增量过程, 且 $\mathsf{E}|Y_t|^2 < \infty, t \in T$. 试证, 存在非随机函数 $h: T \to \mathbb{R}$, 使得 $X_t = |Y_t|^2 - h(t)$ 相对于 σ – 代数 $\mathscr{F}_t = \sigma\{Y_s, s \leqslant t, s \in T\} = \sigma\{\operatorname{Re} Y_s, \operatorname{Im} Y_s, s \leqslant t, s \in T\}, t \in T$ 是鞅, 当且仅当

$$\mathsf{E}|Y_t - Y_s|^2 = h(t) - h(s), \quad s \leqslant t, \quad s, t \in T. \tag{64}$$

设 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 相对于自然 σ – 代数族 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 的 Brown 运动.

13. 试找出所有的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 使得过程 $X = \{\exp\{\alpha W_t + \beta t\}, t \geqslant 0\}$ 是鞅.

14. 设 τ 是有限停时 (相对于 σ– 代数族 $\mathbb{F}$). 试证 $(W_{t\wedge\tau}, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是鞅.

15. 对 $\alpha, x \in \mathbb{R}$ 和 $t \geqslant 0$ 定义函数 $h(\alpha, x, t) = \exp\{\alpha x - \alpha^2 t/2\}$. 设

$$h_k(x,t) = \left.\frac{\partial^k h(\alpha, x, t)}{\partial \alpha^k}\right|_{\alpha=0}, \quad k \geqslant 1.$$

试证, 对每个 $k \geqslant 1, (h_k(W_t, t), \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是鞅 (注意, 根据习题 13, 对每个 $\alpha \in \mathbb{R}$ 过程 $\{h(\alpha, W_t, t), t \geqslant 0\}$ 是鞅). 这样, 过程 $W_t, W_t^2 - t, W_t^3 - 3tW_t, W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2, \cdots$ 是鞅 $(t \geqslant 0)$.

16. 试证, 对 $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0 : |W_t| = a\}, a > 0$ 有 $\mathsf{E}\tau_a^2 = 5a^4/3$.

17. 设 $X_t = \gamma t + \sigma W_t, t \geqslant 0$ 和 $R_a = \inf\{t : X_t = a\}$. 试证, 如果 $\gamma > 0, \sigma \neq 0$ 和 $a < 0$, 则

$$\mathsf{P}(R_a < \infty) = e^{2\gamma a/\sigma^2}.$$

18. 如果,

a) $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程,

b) $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是 Poisson 过程, 是否满足条件 (9)?

19. (参见, [12; p.166]). 设 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动且 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的连续上调和函数, 即对任意点 $x \in \mathbb{R}^m, f(x)$ 不小于该函数在以点 x 为中心, 任意长为半径球上的积分. 试证, 随机过程 $X = \{X_t = f(W_t), t \geqslant 0\}$ 如果对所有的 $t \geqslant 0$ 有 $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, 则它是相对于由 Brown 运动所产生的自然 σ – 代数流的上鞅.

下面是一个与定理 6 有关的, 且有趣的结果.

20 (克里科伯格 (Krickeberg) 分解). 鞅 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 具有性质 $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$ 当且仅当存在非负鞅 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 和 $Z = (Z_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$, 使得 $X_n = Y_n - Z_n, n \geqslant 0$.

21 (里斯 (Riesz) 分解). 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 是一致可积上鞅. 这时存在表示 $X_n = M_n + R_n$, 这里 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 是一致可积鞅, 而 $R = (R_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 是位势, 即一致可积非负上鞅, 且当 $n \to \infty$ 时, a.s. $R_n \to 0$.

22. 设 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 是不降凸函数和 $(X_n,\mathscr{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ 是下鞅. 试证, 对任意的 $u\in\mathbb{R}$ 和 $t>0$ 有

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant n\leqslant N}X_n\geqslant u\right)\leqslant \mathsf{E}h(tX_N)/h(tu). \tag{65}$$

23. 设 $(X_n,\mathscr{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ 是鞅或是非负下鞅. 试证

$$\mathsf{E}\max_{1\leqslant n\leqslant N}|X_n|\leqslant\frac{e}{e-1}(1+\mathsf{E}|X_N|\log^+|X_N|), \tag{66}$$

这里, 对 $x\geqslant 1,\log^+x=\log X$, 和对 $x<1,\log^+x=0$.

对独立随机变量和来说, 估计 (66) 式可以更精确, 有下面的结果.

定理 10 (Doob). 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 是独立实随机变量, 且 $\mathsf{E}\xi_k=0,k=1,\cdots,N$. 设 $X_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k,n=1,\cdots,N$ 这时, 有

$$\mathsf{E}\max_{1\leqslant n\leqslant N}|X_n|\leqslant 8\mathsf{E}|X_N|. \tag{67}$$

介绍伯克霍尔德 (Burkholder), 戴维斯 (Davis) 和甘吉 (Gundy) 的一些结果, 它们推广了对独立随机变量求和, 著名的辛钦 (Khinchin) 和马钦凯维奇 (Marcinkiewicz) – 济格蒙德 (Zygmund) 经典不等式. 详细关于这些不等式的内容可以参见 [51].

定理 11 (Burkholder). 设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅, 且 $X_0=0$. 这时, 对每个 $p>1$ 可以找到常数 A_p 和 B_p 不依赖于 X, 使得

$$A_p\|\sqrt{[X]_n}\|_p\leqslant\|X_n\|_p\leqslant B_p\|\sqrt{[X]_n}\|_p,\quad n\geqslant 0, \tag{68}$$

这里, $[X]_n$ 是 X 的二次 (平方) 变差 (参见 (22)). 在 (68) 式中可以取

$$A_p=[18p^{3/2}(p-1)]^{-1},\quad B_p=18p^{3/2}(p-1)^{1/2}.$$

除此之外, (由于定理 5) 当 $p>1$ 对 $X_n^*=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|$ 有

$$A_p^*\|\sqrt{[X]_n}\|_p\leqslant\|X_n^*\|_p\leqslant B_p^*\|\sqrt{[X]_n}\|_p, \tag{69}$$

这里, $A_p^*=A_p,B_p^*=(p/(p-1))B_p$ (参见, 例如, [85; 第 2 卷, p.678]).

24. 试构造一个例子 (参见, [85; 第 2 卷, p.678]), 使得当 $p=1$ 时, 双边不等式 (68) 不一定成立.

但是 Gundy 给出了例子, 当 $p=1$ 时, 不等式 (69) 依然成立 (只是带有某个 **"万能"** 的常数 A_1^*,B_1^* 不依赖鞅 X).

对矩来说, 比阶的更一般形式有下面的结果

定理 12 **(Burkholder – Davis – Gundy; (参见, 例如, [106; p.425])).** 设 $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ 是非降函数, 且在 $[0,\infty)$ 上有界和凸的, 使得对所有的 $t > 0$ 和某个 $c > 0$, 有 $\Phi(2t) \leqslant c\Phi(t)$, 且 $\Phi(0) = 0, \Phi(\infty-) = \Phi(\infty)$. 这时, 可以找到常数 $0 < A < B < \infty$, 仅依赖于 C, 使得对任意的鞅 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 有

$$A\mathsf{E}\Phi(S_\infty) \leqslant \mathsf{E}\Phi(X^*) \leqslant B\mathsf{E}\Phi(S_\infty),$$

这里 $X^* = \sup_n |X_n|, S_\infty = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta X_k)^2\right)^{1/2}, \Delta X_k = X_k - X_{k-1}, X_0 = 0, k \in \mathbb{N}$.

25. 设 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动. 试证 $(\|W_t\|, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是下鞅 (a.s. 连续轨道), 这里 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的欧氏范数. 利用习题 22 (带有函数 $h(x) = e^{tx}$ 和适当的值 $t > 0$), 试证对每个 $s > 0$ 和所有的 $x > \sqrt{ms}$ 不等式

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,s]}\|W_t\| \geqslant x\right) \leqslant \left(\frac{sd}{ex^2}\right)^{-m/2} e^{-x^2/(2s)}. \tag{70}$$

成立. (过程 $(\|W_t\|, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称作维数为 m 的贝塞尔 (Bessel) 过程.)

26. (参见, [12; p.182]). 设 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动, 这里 $m \geqslant 3$. 试证, 当 $t \to \infty$ 时, a.s. 有 $\|W_t\| \to \infty$. 且试证, 无论在什么有限时间内, 过程 W 以概率 1 不会回到 0 点. 试解释一下, 为什么当 $m = 1$ 时, 该结论是不对的. 当 $m = 2$ 时, 能看出相应的什么样结果?

借助于鞅论的方法和倒向时间的思想在随机分析中可以得到一系列重要结果.

定义 7. 设 $(\mathscr{G}_t)_{t\in T}$ 是在 $\mathscr{F}$ 上递降 σ – 代数族, 即当 $s < t, s, t \in T \subset \mathbb{R}$ 时有 $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{G}_s \subset \mathscr{F}$ 且设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 是相对于 σ – 代数族 $(\mathscr{G}_t)_{t\in T}$ 的实适应随机过程. 随机过程 $\overline{X} = (X_t, \mathscr{G}_t)_{t\in T}$ 称作倒向鞅 (倒向下鞅, 倒向上鞅), 如果 (倒向的) 随机过程 $(X_u, \mathscr{G}_u)_{u\in U}$, 当 $U = -T = \{-t : t \in T\}$ 是鞅 (下鞅, 上鞅).

特别的, 如果 $\mathsf{E}(X_n|\mathscr{G}_{n+1}) = X_{n+1}, n \geqslant 0$, 随机序列 $\overleftarrow{X} = (X_n, \mathscr{G}_n)_{n\geqslant 0}$ 是倒向鞅. 在最后的等式中 “=” 换成 “⩾”, 得到倒向下鞅 (“⩽”: 倒向上鞅). 倒向鞅的概念可以扩充到取值于 $\mathbb{R}^m (m \geqslant 1)$ 的随机过程.

27. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的独立同分布随机向量 $(m \geqslant 1)$, 且 $\mathsf{E}\|\xi_1\| < \infty$, 这里 $\|\cdot\|$ 是欧氏范数. 假设 $X_n = (1/n)\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \mathscr{G}_{n,N} = \sigma\{X_1, \cdots, X_N\}$, 试证, $(X_n, \mathscr{G}_{n,N})_{1\leqslant n\leqslant N}$ 是倒向鞅.

定义 8. 实随机变量序列 $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 称作可置换的, 如果对每个 $N \geqslant 1$ 和任意的一个集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 的置换 $(i_1, \cdots, i_N)$ 都有 $(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_N}) \overset{\mathscr{D}}{=} (\xi_1, \cdots, \xi_N)$.

设 $m \geqslant 1$ 和 $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是 Borel 函数. 研究如下面形式的 U – 统计序列:

$$U_{n,m} = (C_n^m)^{-1} \sum_{1\leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} g(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_m}), \quad n \geqslant m,$$

这里 $C_n^m = n!/m!(n-m)!$. 且设 $\mathscr{G}_{n,m} = \sigma\{U_{k,m}, k \geqslant n\}, n \geqslant m$.

28. 试证, 对 U – 统计序列 $(U_{n,m}, \mathscr{G}_{n,m})_{n\geqslant m}$ **是倒向鞅**.

下面的结果是类似定理 6.

定理 13. 设 $(X_n, \mathscr{G}_n)_{n\geqslant 0}$ 是倒向下鞅. 这时 a.s. 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty \in [-\infty, \infty)$ 此外, 如果存在

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}X_n = c > -\infty, \tag{71}$$

则 $X_\infty \in (-\infty, \infty)$ 和在空间 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中, 当 $n \to \infty$ 时有 $X_n \to X_\infty$. 如果对 $n \geqslant 0$ a.s. $X_n \geqslant 0$, 和对某个 $p \in (1, \infty)$ 有 $\mathsf{E}X_0^p < \infty$ 则在空间 $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中当 $n \to \infty$ 时有 $X_n \to X_\infty$.

证. 对非空区间 $(a,b), N \geqslant 1$, 设 $\beta_N(a,b)$ 表示鞅 $(X_N, \mathscr{G}_N), \cdots, (X_0, \mathscr{G}_0)$ "自下而上" 穿越区域 (a,b) 的次数 (参见, §13). 这时根据引理 6 有 $\mathsf{E}\beta_N(a,b) \leqslant \mathsf{E}(X_0 - a)^+/(b-a)$ 因此 a.s. 有

$$\beta_\infty(a,b) := \lim_{N\to\infty} \beta_N(a,b) < \infty$$

正如在定理 6 的证明中所得 a.s. 存在极限 $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$. 注意到 $(X_n^+, \mathscr{G}_n)_{n\geqslant 0}$ 是倒向下鞅. 因此,

$$\mathsf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n^+\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}X_n^+ \leqslant \mathsf{E}X_0^+ < \infty.$$

由此可见, $\mathsf{P}(X_\infty = \infty) = 0$. 第一个结论证毕.

设条件 (71) 满足. 因为对 $n \geqslant 0$ 有 $\mathsf{E}X_n \geqslant \mathsf{E}X_{n+1}$ 和 $\mathsf{E}X_n^+ \geqslant \mathsf{E}X_{n+1}^+$, 则

$$\mathsf{E}|X_n| = 2\mathsf{E}X_n^+ - \mathsf{E}X_n \leqslant 2\mathsf{E}X_n^+ - c \leqslant 2\mathsf{E}X_0^+ - c, \quad n \geqslant 0.$$

因此 $\sup\limits_n \mathsf{E}|X_n| = C_0 < \infty$.

现证族 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的一致可积性. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 取 $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得对 $n \geqslant m$ 时有 $c - \varepsilon < \mathsf{E}X_n < c + \varepsilon$. 这时, 对任意的 $\alpha > 0$ 和 $n \geqslant m$ (类似 (1) 式考虑对下鞅) 得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|\geqslant\alpha\}} &= \mathsf{E}X_n\mathbf{1}_{\{X_n\geqslant\alpha\}} - \mathsf{E}X_n\mathbf{1}_{\{X_n\leqslant-\alpha\}} \\
&= \mathsf{E}X_n\mathbf{1}_{\{X_n\geqslant\alpha\}} + \mathsf{E}X_n\mathbf{1}_{\{X_n>-\alpha\}} - \mathsf{E}X_n \\
&\leqslant \mathsf{E}X_m\mathbf{1}_{\{X_n\geqslant\alpha\}} + \mathsf{E}X_m\mathbf{1}_{\{X_n>-\alpha\}} - c + \varepsilon \\
&\leqslant \mathsf{E}|X_m|\mathbf{1}_{\{|X_n|\geqslant\alpha\}} + \mathsf{E}X_m - c + \varepsilon \\
&\leqslant \mathsf{E}|X_m|\mathbf{1}_{\{|X_n|\geqslant\alpha\}} + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

对任意的 γ 有

$$\mathsf{E}|X_m|\mathbf{1}_{\{|X_n|\geqslant\alpha\}} \leqslant \mathsf{E}|X_m|\mathbf{1}_{\{|X_m|\geqslant\gamma\}} + \gamma\mathsf{P}(|X_n| \geqslant \alpha).$$

由于**切比雪夫 (Chebyshev) 不等式**和已证明对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有估计 $\sup_n \mathsf{E}|X_n| \leqslant C_0$ 有

$$\mathsf{P}(|X_n| \geqslant \alpha) \leqslant \alpha^{-1}\mathsf{E}|X_n| \leqslant C_0\alpha^{-1}.$$

取 $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, 使得 $\mathsf{E}|X_m|\mathbf{1}_{\{|X_m|\geqslant\gamma\}} < \varepsilon$. 这时

$$\sup_{n\geqslant m} \mathsf{E}|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|\geqslant\alpha\}} \leqslant 3\varepsilon + \gamma C_0\alpha^{-1}.$$

进而, 族 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 一致可积成立. 因此, 当 $n \to \infty$ 时在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中有 $X_n \to X_\infty$. 而因为 $X_\infty \in L^1$ 则显然 a.s. 有 $|X_\infty| < \infty$.

如果对所有的 $n \geqslant 0$ a.s. 有 $X_n \geqslant 0$ 且对某个 $p \in (1, \infty)$ 有 $\mathsf{E}X_0^p < \infty$, 则根据推论 4, 对 $X_N, \cdots, X_0$ 有估计式

$$\mathsf{E}\left(\max_{0\leqslant n\leqslant N} X_n^p\right) \leqslant (p/(p-1))^p\mathsf{E}(X_0^p).$$

让 N 趋于无穷, 得到 $\mathsf{E}\left(\sup_{n\geqslant 0} X_n^p\right) < \infty$. 正如在推论 4 的证明中, 有在 $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中当 $n \to \infty$ 时有 $X_n \to X_\infty$. □

推论 2. 对任意的倒向鞅条件 (71) 是满足的.

关于 Levy 定理 (定理 8) 的倒向序列有着下面的习题.

29. 设 $\mathsf{E}|X| < \infty$ 和 $(\mathscr{G}_n)_{n\geqslant 1}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中的不增 σ – 代数序列. 且设 $\mathscr{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{G}_n$. 这时, 当 $n \to \infty$ 时 a.s. 有且在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中

$$\mathsf{E}(X|\mathscr{G}_n) \to \mathsf{E}(X|\mathscr{G}_\infty). \tag{72}$$

下面利用鞅技巧可以得到 Kolmogorov “0 – 1” 律 (第三章定理 6).

设 $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的独立随机向量序列, 对 $n \geqslant 1, \mathscr{F}_n = \sigma\{\xi_k, k \leqslant n\}, \mathscr{G}_n = \sigma\{\xi_k, k \leqslant n\}$, 且设 $A \in \mathscr{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{G}_n$. 这时, 因为 A 不依赖于 $\mathscr{F}_n$, 则 $\mathsf{E}\mathbf{1}_A = \mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_n)$. 由于 (45) 式当 $n \to \infty$ 时 a.s. 有 $\mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_n) \to \mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_\infty)$. 但是 $\mathscr{G}_\infty \subset \mathscr{F}_\infty$, 因此 $A \in \mathscr{F}_\infty$, 这意味着 a.s. $\mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_\infty) = \mathbf{1}_A$. 这样, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{E}\mathbf{1}_A = \mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_n) \to \mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_\infty) = \mathbf{1}_A \quad \text{a.s.} \tag{73}$$

从而, $\mathsf{P}(A)$ 等于 1 或 0.

对独立同分布随机变量来说, Kolmogorov “0 – 1” 律的有意义的推广将在下面的定理 14 中给出. 为此引入下面的概念.

定义 9. 一一对应映射 $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 称作有限置换 (记作 $\pi \in \Pi(\mathbb{N})$), 如果对不多于有限个 (依赖于 π) $\mathbb{N}$ 中的数 n 使得 $\pi(n) \neq n$. 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定实随

机变量序列 (即对随机元 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$), 设 $\pi\xi = (\xi_{\pi_1}, \xi_{\pi_2}, \cdots)$, 这里 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ 是集合 $\mathbb{N}$ 的置换, 且在 $\mathscr{F}$ 中定义置换事件 σ – 代数.

$$\mathscr{G} = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty) : \xi^{-1}(B) = (\pi\xi)^{-1}(B),\ \text{对所有的}\ \pi \in \Pi(\mathbb{N})\}.$$

定理 14 (休伊特 (Hewitt) – 萨维奇 (Savage) "0–1" 律). 设 $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ — 独立同分布随机变量序列. 这时, 置换事件 σ – 代数 $\mathscr{G}$ 是退化的, 即仅仅包含概率为 0 或是 1 的事件.

证明在, 例如, [85; 第2卷, p.533] 给出.

30. (习题 28 的继续). 根据定理 14 得到, 当 $n \to \infty$ 时, a.s. 有 $U_{n,m} \to U_{\infty,m}$. 借助定理 13 试证, 如果 $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ 是独立同分布随机变量序列, 则 $U_{\infty,m} = \mathsf{E}g(\xi_1, \cdots, \xi_m)$

31. 设 $(X_n, \mathscr{G}_n)_{n\geqslant 1}$ 是倒向下鞅, 且设满足条件 (71). 试证, 对 $m \geqslant 1$ 有 $X_\infty \leqslant \mathsf{E}(X_m|\mathscr{G}_\infty)$, 这里 $\mathscr{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{G}_n$ (注意, 根据定理 13, a.s. $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ 存在和在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中). 换句话说, 随机过程 $(X_n, \mathscr{G}_n)_{n\geqslant 1}$ 是倒向下鞅是 "闭的". 试证, 如果 $(X_n, \mathscr{G}_n)_{n\geqslant 1}$ 是倒向鞅, 则 $(X_n, \mathscr{G}_n)_{1\leqslant n\leqslant\infty}$ 同样是倒向鞅.

32. 在定理 13 中是否可以去掉条件 (71)?

定理 15 (Kolmogorov 强大数定律). 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是取值于 $\mathbb{R}^m$ 的独立同分布随机向量, 且 $\mathsf{E}\xi_1 = a \in \mathbb{R}^m$. 这时, 当 $n \to \infty$ 时在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中 a.s. 有

$$X_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \to a.$$

证. 不失一般性, 可以假设 $a = 0 \in \mathbb{R}^m$. 由于习题 27, 随机过程 $(X_n, \mathscr{G}_{n,N})_{1\leqslant n\leqslant N}$

$$(\mathscr{G}_{n,N} = \sigma\{X_n, \cdots, X_N\} = \sigma\{S_n, \cdots, S_N\}, S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n = 1, \cdots, N)$$

是倒向 (向量的) 鞅. 这样, 利用 Levy 定理 (对每一个分量运用), 对 $n = 1, 2, \cdots, N$, a.s. 有 $X_n = \mathsf{E}(X_1|\mathscr{G}_{n,N})$ 假设 $N \to \infty$ 得到 a.s. $X_n = \mathsf{E}(X_1|\mathscr{G}_n)$ 这里 $\mathscr{G}_n = \sigma\{S_k, k \geqslant n\}$. 设 $\mathscr{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{G}_n$. 根据倒向序列的 Levy 定理得到 (参见 (72)), 当 $n \to \infty$ 时和在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中 a.s. 有 $\mathsf{E}(X_1|\mathscr{G}_n) \to \mathsf{E}(X_1|\mathscr{G}_\infty)$. 由 Kolmogorov 的 "0–1" 律有 σ – 代数 $\mathscr{G}_\infty$ 是退化的. 因此, $\mathsf{E}(X_1|\mathscr{G}_\infty) = \mathsf{E}X_1 = 0$. 但是, $X_n = \mathsf{E}(X_1|\mathscr{G}_n)$ 即在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中 a.s. 有 $X_n \to 0$. □

关于 Kolmogorov 定理推广到相关的随机变量 (特别的, 两两独立的) 由埃杰曼德 (Etemund) 给出, 可以参见, 例如, [101; p.66].

下面的结果一方面既包含了Levy 定理, 另一方面也包含了在条件数学期望符号下取极限的定理 (包含 Lebesgue 控制收敛定理)

定理 16 (布莱克韦尔 (Blackwell) – 丢宾斯 (Dubins)). 设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的实随机变量序列, 且当 $n\to\infty$ 时, a.s. 有 $X_n \to X_\infty$ 和 $\mathsf{E}(\sup|X_n|)<\infty$. 且设 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是 $\mathscr{F}_\infty$ 中 σ – 代数族, 它或是递增的或是递减的 (对应的是 $\mathscr{F}_\infty = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 或 $\mathscr{F}_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$). 这时, a.s. 和在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中有

$$\lim_{n,k\to\infty}\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k) = \mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_\infty). \tag{74}$$

证. 记作

$$U_m = \sup_{k,n\geqslant m}\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k),\quad V_m = \inf_{k,n\geqslant m}\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k),\quad m\geqslant 1.$$

这时 a.s. 存在 $U = \lim\limits_{m\to\infty}U_m$ 和 $V = \lim\limits_{m\to\infty}V_m$ (由于序列 $\{U_m\}$ 和 $\{V_m\}$ 的单调性).

设 $Y_m = \sup\limits_{n\geqslant m}X_n, m\geqslant 1$. 注意, $\mathsf{E}|Y_m| \leqslant \mathsf{E}\left(\sup\limits_n |X_n|\right) < \infty, m\geqslant 1$. 因此, 对每个 $m\geqslant 1$, 或是根据定理 8, 或是根据倒向序列的 Levy 定理, 当 $k\to\infty$ 时和在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 空间中 a.s. 有

$$\mathsf{E}(Y_m|\mathscr{F}_k)\to\mathsf{E}(Y_m|\mathscr{F}_\infty). \tag{75}$$

对 $n\geqslant m$ 有 $X_n\leqslant Y_m$, 则对 $n\geqslant m, k\geqslant 1$, a.s. 有

$$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_k)\leqslant\mathsf{E}(Y_m|\mathscr{F}_k)$$

这时, 由于 (75) 式得到 a.s. 有

$$U\leqslant\lim_{m\to\infty}\sup_{k\geqslant m}\mathsf{E}(Y_m|\mathscr{F}_k)\leqslant\limsup_{m\to\infty}\mathsf{E}(Y_m|\mathscr{F}_\infty).$$

由 $Y_m\downarrow X_\infty$, 当 $m\to\infty$ 时, a.s. 有 $\mathsf{E}(Y_m|\mathscr{F}_\infty)\downarrow\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_\infty)$. 这样, $U\leqslant\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_\infty)$. 类似地可以验证 $V\geqslant\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_\infty)$. 因此 a.s. 有 $U=V$.

至于 (74) 式中的 L^1 – 收敛让它作为习题. □

存在着关于 Doob 鞅和下鞅收敛定理 (定理 6) 的各种各样的推广. 例如, 如果 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是具有二次特征 $\langle M\rangle = (\langle M\rangle_n, \mathscr{F}_{n-1})_{n\geqslant 1}$ 的平方可积鞅 (参见 (21)), 则 $\{\langle M\rangle_\infty<\infty\}\subseteq\{M\to\}$, 即在集合 $\{\langle M\rangle_\infty<\infty\}$ 上. 这里序列 $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ a.s. 收敛到有限的极限, 记作 $\{M\to\}$. 除此之外, 当 $n\to\infty$ 时, 对所有的函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, 且有

$$\int_0^\infty(1+f(t))^{-2}dt<\infty$$

成立. 而 $M_n = o(f(\langle M\rangle_n))$.

(特别是 $f(t) = t^{1/2}(\log^+ t)^\alpha$, 这里 $\alpha>1/2$); 详细参见 [101; p.53].

33. 设 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是在完全概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中的不降 $\sigma-$ 代数流 (不一定完全的). 这时, $\overline{\mathscr{F}}_{t+} = \overline{\mathscr{F}_{t+}}$, 即扩充 0 概率集合类的运算与 $\sigma-$ 代数流右连续闭运算可以相互交换 (参见习题 2).

34. 对 Brown 运动的自然 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 对所有的 $t \geqslant 0$ 是否有 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ 成立?

定义 10. 鞅 (下鞅) $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称作满足通常化条件, 如果 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是扩充 0 概率集合类的, 且是右连续的.

35. 设 $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是具有 a.s. 右连续轨道的下鞅 (鞅). 且设对每个 $t \in \mathbb{R}_+$, 存在 $\delta = \delta(t) > 0$, 使得

$$\mathsf{E}\left(\sup_{s\in[t,t+\delta]} |X_s|\right) < \infty \tag{76}$$

试验证, $\overline{X}(X_t, \overline{\mathscr{F}}_{t+})$ 是下鞅 (鞅) (提示: 利用定理 16).

同时验证对 Wiener 过程和 Poisson 过程公式 (76) 成立 (注意, Wiener 过程的轨道是 a.s. 连续的, 而 Poisson 过程的轨道是 a.s. 右连左极的).

与最后两个习题有关的是下面的基本结果, 即对下鞅存在具有 "好" 性质轨道的修正.

定理 17 (参见, [148; p.16]). 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是下鞅, 且 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 满足通常化条件.

a) 随机过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 有右连续轨道的修正 $(\widetilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ 当且仅当函数 $t \to \mathsf{E}X_t$ 是由 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}$ 右连续的.

b) 如果右连续轨道的修正存在, 则它可以使得在每一点 $t \in (0, \infty)$ 左极限存在, 且与 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 相适应. 此时, $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是下鞅.

注 3. 在随机过程的一般理论中, 经常是假设: $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 满足通常化条件, 而鞅 (下鞅, 上鞅) 的轨道是在 Skorokhod 空间 $D([0, \infty))$ 中, 即在每一点 $t \geqslant 0$ 上右连续, 且在点 $t > 0$ 上存在左极限.

对鞅的概念有许多不同的推广. 其中最重要的是局部鞅 (下鞅, 上鞅) 的概念.

定义 11. 轨道是在空间 $D = ([0, \infty))$ 中随机过程 $M = (M_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称作局部鞅 (**局部下鞅, 局部上鞅**), 如果找到非降停时序列 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}$, a.s. $\tau_n \uparrow \infty$ 使得对每个 n 终止随机过程 $M^n = (M_{t\wedge\tau_n}, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 (一般的) 鞅 (下鞅, 上鞅).

借助局部鞅的概念引入半鞅的概念, 它是一个非常基本的随机过程与随机计算的发展有着密切相关 (参见, 例如, [46]).

定义 12. 轨道是在空间 $D=([0,\infty))$ 中随机过程 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称作半鞅，如果这个过程能够表示 (一般来说，不见得唯一) 成

$$X=X_0+M+A,$$

这里，$M=(M_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是具有 $M_0=0$ 的局部鞅，$A=(A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是轨道具有有界变差的随机过程 (在每个区间 $(0,t]$ 上，$t>0$)，且 $A_0=0$.

与鞅过程相近的有拟鞅 (参见 [168])，微信号 (参见 [162])，同时还有多指标鞅 ([119, 195]). 对于今后学习鞅和它的应用可参见书 [26, 46, 95, 138, 146, 148, 182, 184, 197].

在半鞅概念和随机计算基础上建立起的随机模型，非常好的被应用到金融数学 (现代随机过程理论中一个蓬勃发展的方向分支) 当中. 在各章节金融数学部分中，作为引言我们来介绍一个最简单的离散时间金融市场模型.

在金融市场演化 (evolution of financial market) 中，无风险 (资产) 价格 (rickless asset) B (银行账户) 和风险 (资产) 价格 (rick asset) S (股票) 用不同的方程来描述 $(n\geqslant 1)$

$$\Delta B_n=r_nB_{n-1}, \tag{77}$$

$$\Delta S_n=\rho_nS_{n-1}, \tag{78}$$

这里，一般假设 $\Delta X_n=X_n-X_{n-1}$. 除此之外，还假设 B_n,S_n,r_n,ρ_n 是给定的滤化的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant N},\mathsf{P})$ 上的随机变量，这里 $\mathscr{F}_N=\mathscr{F},N<\infty$. 对 $n=1,\cdots,N$ 设

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}r_k,\quad V_n=\sum_{k=0}^{n}\rho_k \tag{79}$$

这里 $\{r_n\}$ 和 $\{\rho_n\}$ 是随机序列，即对每个 n，它们是 $\mathscr{F}_n|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测的. 且 $\mathscr{F}_0=\{\phi,\Omega\}$ 和对 $n\geqslant 1$ 有 $\mathscr{F}_n=\sigma\{S_0,\cdots,S_n\}$.

定义 13. 上面所描述的模型称作 (B,S) – 价格过程 (price process) (或市场 (market)).

36. 试证，方程 (77) 和 (78) 的解可以写成如下随机幂的形式 (离散的)，即

$$B_n=B_0\mathscr{E}_n(U),\quad S_n=S_0\mathscr{E}_n(V),$$

这里，

$$\mathscr{E}_n(X)=\prod_{k=1}^{n}(1+\Delta X_k),\quad n\geqslant 1,\quad \mathscr{E}_0(X)=1.$$

定义 14. 被称作投资策略 (投资组合) (trading process) 是二维随机变量序列 $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, 使得对所有的 n 有

$$\beta_n \in \mathscr{F}_n | \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad \gamma_n \in \mathscr{F}_{n-1} | \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

被称作投资策略 (投资组合) π 的价值过程 (value process) 是随机序列 $X^\pi = \{X_n^\pi\}$, 这里

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

随机变量 β_n 和 γ_n 相应地被解释为在时刻 n 投资 B 和 S 的数量.

定义 15. 在所有时刻 $n = 1, \cdots, N$, 具有性质 $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0$, 的投资策略类称作自融资 (自筹) 策略 (self – financing trading strategies) 类, 且用 SF 表示.

37. 试验证, 自融资策略的价值过程可以表示成下面的形式:

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=0}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k),$$

这里 $\Delta B_0 = \Delta S_0 = 0$.

定义 16. 在自融资策略类 SF 中可以找出套利策略 (arbitrage strategy) 子类 SF_{arb} (它可能是空的), 它是由那样的 π 组成, 使得对 $n \leqslant N$, P-a.s. 有 $X_0^\pi = 0, X_n^\pi \geqslant 0$ 和以正概率有 $X_n^\pi > 0$.

这样, 这个概念在经济意义上的思想是无风险而获得利润. 与这个定义相关的是下面的.

定义 17. 概率测度 P^* 等价于概率 P (即 $\mathsf{P}^* \ll \mathsf{P}$ 和 $\mathsf{P} \ll \mathsf{P}^*$) 称作鞅测度 (martingale measures), 如果在给定的滤化的空间上, 则 $\{S_n/B_n\}_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 是相对于概率测度 P^* 的鞅.

$\mathbb{P}^*$ 表示所有鞅测度 P^* 全体.

定理 18. 设在价格过程 (市场) 模型 (B, S) 中, 随机变量 $\{r_n\}_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 是可料的 (即 $r_n \in \mathscr{F}_{n-1} | \mathscr{B}(\mathbb{R})$), 和 $r_n > -1$. 这时, $\mathsf{P}^* \in \mathbb{P}^*$ 等价于 $\{V_n - U_n\}_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 是相对于测度 P^* 的鞅, 这里 U_n 和 V_n 是根据 (79) 式所定义的.

定理 19 (金融数学的基本定理). 设在价格过程 (市场) 模型 (B, S) 中 $\{r_n\}_{1 \leqslant n \leqslant N}$ 是一组确定的数, 使得对 $1 \leqslant n \leqslant N$ 有 $r_n > -1$. 这时,

$$\mathsf{P}^* \neq \varnothing \Leftrightarrow SF_{\text{arb}} = \varnothing.$$

由于市场的重要特征，即它是完全的，在不同的金融计算中，可以得到的准确公式.

定义 18. 市场 (B,S) 称作完全的 (complete)，如果对任意的函数 $f\in\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 都可以找到自融资策略 $\pi\in SF$ 使得 $X_N^{\pi}(\omega)=f(\omega),\omega\in\Omega$.

从数学的观点看完全的市场性质是保障所有作为市场上资产的准入和减少对这些资产投资的限制.

定理 20 (关于 (B,S) 市场是完全的). 设 $\mathbb{P}^*\neq\varnothing$. 这时，下面的结论是等价的：

1) (B,S) 市场是完全的；

2) $\mathbb{P}^*$ 包含着唯一的元素 P^*；

3) 任意的鞅 $(M_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P}^*)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 都表示成

$$M_n=M_0+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\Delta m_k,\quad n=1,\cdots,N,$$

这里 $\gamma_k\in\mathscr{F}_{k-1}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和

$$\Delta m_k=\frac{S_k}{B_k}-\frac{S_{k-1}}{B_{k-1}}.$$

注 4. 既然 $\Delta m_k=S_{k-1}B_k^{-1}(\rho_k-r_k)$，对随机变量 $\{M_n\}$ 有下面的等价的表示：

$$M_n=M_0+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\gamma}_k(\rho_k-r_k),\tag{80}$$

这里 $\widetilde{\gamma}_k=\gamma_kS_{k-1}B_k^{-1}\in\mathscr{F}_{k-1}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

我们还需要一些概念.

定义 19. 具有期满日 N 的未定权益 (contingent claim) 是 (f,N)，这里非负随机变量 $f\in\mathscr{F}_N|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 市场的投资者或经济人应该履行给定的义务，选择自己的投资策略，使得 $X_N^{\pi}\geqslant f$. 建立这样投资策略 π 的程序称作对冲 (hedge)，而策略本身称对冲策略 (hedging strategy).

与未定权益的对冲相关的重要问题之一是期权 (option) 定价问题. 想象在金融市场上证券发行所，提交、发行一些资产的有价证券 (对买方，卖方等等). 为了成为这些证券的持有者，需要支付证券发行所一些金额 C. 这样，购买了在时刻 N 对提交的证券有执行的权力和得到付款 f. 这样的有价证券交易称作欧氏期权 (european options) (买方，卖方等等，投资)，而契约本身 — 期权合同 (optional contract). 当证券的持有者对提交的证券，在任意的时刻 $n\in\{0,\cdots,N\}$ 有执行的权力和得到付款 f_n，这样的有价证券交易称作美氏期权 (american options). 这样的证券卖主，在卖出

时得到金额 C, 所应该组织自己的投资策略, 使得 $X_n^\pi(\omega) \geqslant f_n(\omega)$, 对所有的 $\omega \in \Omega$ 和 $n \leqslant N$.

现在回到欧氏期权.

定义 20. 设在 (B,S) 市场上给定了原始资本 $x>0$ 和未定权益 (f,N). 自融资策略 π 称作 (x,f,N) – 对冲, 如果对任意的 $\omega \in \Omega$, 有

$$X_0^\pi = x \quad 和 \quad X_N^\pi \geqslant f.$$

用 $\Pi(x,f,N)$ 表示所有 (x,f,N) 对冲的集合. 被称作未定权益 (f,N) 的投资价值是量

$$C(N) = \inf\{x>0 : \Pi(x,f,N) \neq \varnothing\} \tag{81}$$

公式 (81) 同时给出满足双方的考虑: 对卖主 (在市场上可以保证未定权益实现), 对买主 (在一定意义下, 付出最小的金额给卖主). 因此 $C(N)$ 同样称作期权的公平价格.

众所周知, 买入期权 (call options) 又称看涨期权 (期权对卖出), 卖出期权 (put options) 又称看跌期权 (期权对买入). 第一个是带有未定权益 $f=(S_N-K)^+$ 的期权, 根据它, 期权持有者可以在时刻 N 以固定的价格 K 来购买一些股票 (这时股票的市场价格是 S_N). 当然, 如果是 $S_N>K$, 期权成交, 当 $S_K \leqslant K$ 时不成交. 根据卖出期权, 期权持有者有权在时刻 N 以固定的价格 K 来出售一些股票, 这时未定权益是 $f=(K-S_N)^+$.

定理 21. 设 (S,B) 是无套利机会的和完全的市场, 且设确定的序列 r_n 使得 $r_n>-1$, 当 $n=0,1,\cdots,N$. 这时, 对带有未定权益 (f,N) 的欧氏期权满足下面的结论:

1) 公平价格是由下面的公式所确定

$$C(N) = \mathsf{E}^* \mathscr{E}_N^{-1}(U) f = \mathscr{E}_N^{-1}(U)\mathsf{E}^* f,$$

这里 E^* 表示以唯一的鞅测度取中值 (由于定理 20);

2) 存在最小的 $(C(N),f,N)$ 对冲 $\pi^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)_{n\leqslant N}$, 即 $X_N^* = f$, 且

$$X_n^{\pi^*} = \mathsf{E}^*(\mathscr{E}_N^{-1}(U)\mathscr{E}_n(U) f | \mathscr{F}_n),$$

$$\gamma_n^* = \frac{\widetilde{\gamma} B_n}{S_{n-1}} \in \mathscr{F}_{n-1}|\mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}} \in \mathscr{F}_{n-1}|\mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

这里 $\{\widetilde{\gamma}_n\}_{n\leqslant N}$ 是对鞅, $\{\mathsf{E}^*(B_N^{-1} f|\mathscr{F}_n)\}_{n=0,\cdots,N}$, 由分解 (80) 式可料序列.

关于上面所述的结果以及许多其他金融市场的有趣模型既是离散也是连续时间的可以参见 [86], 在那里有很多的参考书.

第五章
测度的弱收敛. 不变原理

内容摘要: 度量空间上的测度弱收敛. 依分布随机元的收敛. 测度的弱收敛准则. 在连续映射下测度弱收敛的保守性. 在空间 $C(T,S)$ 中测度的弱收敛. 测度族的相对紧性 (弱列紧性) 和胎紧性. 普罗霍洛夫 (Prokhorov) 定理. 唐斯克尔 (Donsker) – 普罗霍洛夫 (Prokhorov) 不变原理. 林德伯格 (Lindeberg) 多维中心极限定理. 独立随机变量和的极大值引理. Kolmogorov (拟合优度) 检验证明的步骤. 作为条件维纳 (Wiener) 过程的布朗 (Brown) 桥. 一个概率空间的方法, 斯科罗霍德 (Skorokhod) 定理. 弱收敛的度量化. 莱维 (Levy) – Skorokhod 距离.

§1. 本章中, 我们所涉及的只是一般教程中的问题, 是与用一些过程的概率分布来逼近其他过程的概率分布有关. 本章的基本结果是 Donsker – Prokhorov **不变原理** (§6). 在初学这一章的时候, 为掌握这个结果需要熟悉测度的弱收敛以及取值于距离空间的随机元依分布收敛的概念 (§1 和 §2). 在连续函数空间 $C([0,1])$ 上测度的弱收敛定理 (在 §5 中) 起着关键作用, 它是借助于测度的有限维分布的弱收敛和相对紧性的思想建立起来的. 多亏了 Prokhorov 的基本定理 (证明可参见附录 2), 上述的思想可以有效地进行验证. Prokhorov 定理 (§10) 是非常有用的, 它给出了在一个新的概率空间上重新定义随机元, 且具有 a.s. 收敛性的方法. 至于本章的其他结果可以在复读时再去光顾.

从测度 (概率) 的弱收敛 (weak convergence) 概念开始.

定义 1. 设 (S,ρ) 是具有 Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 的距离空间和 $\mathsf{Q},\mathsf{Q}_n(n\geqslant 1)$是 $(\mathsf{S},\mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上的测度. 称作**测度** Q_n **弱收敛到测度**Q(用 $\mathsf{Q}_n\Rightarrow\mathsf{Q}$ 来表示), 如果对任意

的函数 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$, 即有界连续函数 $f: \mathsf{S} \to \mathbb{R}$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\int_{\mathsf{S}} f(x) \mathsf{Q}_n(dx) \to \int_{\mathsf{S}} f(x) \mathsf{Q}(dx), \tag{1}$$

同样的定义, 如果在 (1) 式中取复值函数 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{C})$, 即有界连续函数 $f: \mathsf{S} \to \mathbb{C}$. 对于测度的序列可以考虑更宽的范围, 例如, 网, 即有向变量为指标的测度族, 如 $\{\mathsf{Q}_\alpha, \alpha > 0\}$.

函数 f 对测度 Q 的积分 (当被确定) 用 $\langle f, \mathsf{Q} \rangle$ 来表示.

如果弱极限存在, 则它是唯一的, 正如

引理 1. 设对所有的 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$ 有 $\langle f, \mathsf{Q} \rangle = \langle f, \widetilde{\mathsf{Q}} \rangle$, 则 $\mathsf{Q} = \widetilde{\mathsf{Q}}$.

证. 利用在 (III.22) 公式后的讨论, 可以看出, 对所有的闭集 F 有 $\mathsf{Q}(F) = \widetilde{\mathsf{Q}}(F)$. 由于第一章引理 4 得到, 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上 $\mathsf{Q} = \widetilde{\mathsf{Q}}$. □

注意, 在这个引理中, 只是 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R}_+)$ 就足够了.

回顾, 集合 $B \subset \mathsf{S}$ 的边界 ∂B 是指 S 中的那些点的全体, 使得在该点的任意邻域都有 B 和 $\mathsf{S} \backslash B$ 中的点. 对任意的集合 $B \subset \mathsf{S}$, 来说集合 ∂B 是闭集, 因此属于 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 中.

对验证弱收敛的准则, 下面的定理使用起来更方便.

定理 1 (亚历山德罗夫 (Aleksandrov)). 设 $\mathsf{Q}, \mathsf{Q}_n (n \geqslant 1)$ 是距离空间 (S, ρ) 上的测度. 这时, 弱收敛 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q} (n \to \infty)$ 等价下面的每个结果:

1°. 对任意的闭集 $F \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$, 有 $\limsup\limits_{n \to \infty} \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \mathsf{Q}(F)$;

2°. 对任意的开集 $G \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$, 有 $\liminf\limits_{n \to \infty} \mathsf{Q}_n(G) \geqslant \mathsf{Q}(G)$;

3°. 对任意的集合 $B \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$, 且 $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{Q}_n(B) = \mathsf{Q}(B)$.

证. 首先注意定义 (1) 等价于对任意的函数 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$ 有

$$\limsup_{n \to \infty} \langle f, \mathsf{Q}_n \rangle \leqslant \langle f, \mathsf{Q} \rangle. \tag{2}$$

事实上, 如果对函数 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$ 有 (2) 式成立, 则将 f 换成 $-f$, 得到 $\liminf\limits_{n \to \infty} \langle f, \mathsf{Q}_n \rangle \geqslant \langle f, \mathsf{Q} \rangle$ 从而 (1) 式满足了, 反之结论很显然.

a) 设 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$, 证明 1°. 对任意的闭集 F 和任意的 $\varepsilon > 0$, 定义函数 $f_\varepsilon^F(x) = \varphi(\rho(x, F)/\varepsilon) \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$, 这里 φ 是由 (III.23) 公式给出的. 因为 $\mathbf{1}_F \leqslant f_\varepsilon^F$ 有 $\mathsf{Q}_n(F) = \langle \mathbf{1}_F, \mathsf{Q}_n \rangle \leqslant \langle f_\varepsilon^F, \mathsf{Q}_n \rangle$. 由于 (2) 式有

$$\limsup_{n \to \infty} \mathsf{Q}_n(F) \leqslant \limsup_{n \to \infty} \langle f_\varepsilon^F, \mathsf{Q}_n \rangle \leqslant \langle f_\varepsilon^F, \mathsf{Q} \rangle$$

余下的是让 $\varepsilon \to 0$, 根据 Lebesgue 定理有 $\langle f_\varepsilon^F, \mathsf{Q} \rangle \to \langle \mathbf{1}_F, \mathsf{Q} \rangle = \mathsf{Q}(F)$.

b) 设 1° 成立. 要证 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$ 只需要对在 $0 < f(x) < 1$ 下 (经过线性变换 $af(x)+b$ 以后的, 这里, $a>0, b\in\mathbb{R}$) 验证不等式 (2) 即可. 任取 $k\in\mathbb{N}$ 和闭集 $F_i=\{x: f(x)\geqslant i/k\}, i=0,\cdots,k$. 设 $C_i=F_{i-1}\backslash F_i=\{(i-1)/k\leqslant f(x)\leqslant i/k\}, i=1,\cdots,k$. 这时, 有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{k}\mathsf{Q}(C_i)\leqslant\int_S f(x)\mathsf{Q}(dx)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\mathsf{Q}(C_i). \tag{3}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\mathsf{Q}(C_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}(\mathsf{Q}(F_{i-1})-\mathsf{Q}(F_i))=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{Q}(F_i).$$

与 (3) 式左半部分求和类似的变形同时, 有

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{Q}(F_i)\leqslant\int_S f(x)\mathsf{Q}(dx)\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{Q}(F_i). \tag{4}$$

将测度 Q 换成测度 Q_n 可以得到类似的不等式. 这样, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f,\mathsf{Q}_n\rangle\leqslant\frac{1}{k}+\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{Q}_n(F_i)\leqslant\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathsf{Q}(F_i)\leqslant\frac{1}{k}+\langle f,\mathsf{Q}\rangle.$$

由于 k 的任意性, 有不等式 (2), 即 $\mathsf{Q}_n\Rightarrow\mathsf{Q}$.

c) 条件 2° 和 1° 的等价是显然的 (只需对相应的集合取其余集来进行).

d) 验证由条件 1° 推出 3°. 用 B° 表示集合 B 的内核, 而 $[B]$ 为 B 的闭包. 这时, 由于 1° 和 2° 有

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}(B^\circ)&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n(B^\circ)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n(B)\\&\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n(B)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n([B])\leqslant\mathsf{Q}([B]).\end{aligned} \tag{5}$$

因为 $\mathsf{Q}(\partial B)=0([B]\backslash B\subset\partial B$ 和 $B\backslash B^\circ\subset\partial B)$, 所以 $\mathsf{Q}([B])=\mathsf{Q}(B)=\mathsf{Q}(B^\circ)$, 因此由 (5) 式得到条件 3°.

e) 设 3° 成立, 证 1°. 取闭集 F, 且研究集合 $F^\varepsilon=\{x\in S:\rho(x,F)<\varepsilon\}$, 这里 $\varepsilon>0$. 注意, $\partial F^\varepsilon\subset\{x:\rho(x,F)=\varepsilon\}$, 所以对 $\varepsilon\neq\delta$ 有 $\partial F^\varepsilon\bigcap\partial F^\delta=\varnothing$. 因此, 不多于可数个数 ε 的集合有 $\mathsf{Q}(\partial F^\varepsilon)>0$. 取序列 $\varepsilon_k\downarrow 0$ 使得 $\mathsf{Q}(\partial F^{\varepsilon_k})=0$, 当 $k\geqslant 1$. 这时

$$\limsup_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n(F)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n(F^{\varepsilon_k})=\mathsf{Q}(F^{\varepsilon_k}),$$

对任意的 k. 当 $k\to\infty$ 时考虑到有 $\mathsf{Q}(F^{\varepsilon_k})\to\mathsf{Q}(F)$, 从而得证. □

§2. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}),(\Omega_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P}_n)$ 是所给的概率空间,S 是距离空间, 随机元 $X:\Omega\to\mathsf{S}, X_n:\Omega_n\to\mathsf{S}$ (即相应的是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 和 $\mathscr{F}_n|\mathscr{B}(\mathsf{S})-$ 可测映射) $n\geqslant 1$.

定义 2. 随机元 X_n 称作依分布收敛到 X (记作 $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ 或 $X_n \xrightarrow{\text{Law}} X$), 如果当 $n \to \infty$ 时有 $\mathsf{P}_{X_n} \Rightarrow \mathsf{P}_X$, 这里 P_{X_n} 和 P_X 是随机元 X_n 和 X 的概率分布 (参见 (16)).

利用 (I.23) 看出, $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ 当且仅当

$$\mathsf{E}_n f(X_n) \to \mathsf{E} f(X) \tag{6}$$

对任意的函数 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$, 这里 E, E_n 表示根据测度 P, P_n 取的中值.

定理 2. 设 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S})), (\mathsf{V}, \mathscr{B}(\mathsf{V}))$ 是距离空间, h 是由 S 到 V 的连续映射. 如果 $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X(X_n, X$ 取值于 $\mathsf{S})$, 则

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathscr{D}} h(X), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

如果在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$, 则当 $n \to \infty$ 时在 $(\mathsf{V}, \mathscr{B}(\mathsf{V}))$ 上有

$$\mathsf{Q}_n h^{-1} \Rightarrow \mathsf{Q} h^{-1} \tag{8}$$

证. 取有界连续函数 $g : \mathsf{V} \to \mathbb{R}$. 这时, 函数 $g \circ h$ 属性空间 $C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$, 因为是连续和有界连续函数的复合. 因此, 当 $n \to \infty$ 时有 $E_n g(h(X_n)) \to E_g(h(X))$, 即 (7) 式得证.

注意, 如果 $X : \Omega \to \mathsf{S}$ 是 $\mathscr{F}|\mathscr{B}-$ 可测映射, 而映射 $h : \mathsf{S} \to \mathsf{V}$ 是 $\mathscr{B}|\mathscr{A}-$ 可测的 ($(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 和 $(\mathsf{V}, \mathscr{A})$ 是某个可测空间), 因为对任意的 $B \in \mathscr{B}$ 有 $\mathsf{P}_X h^{-1}(B) = \mathsf{P}_X(h^{-1}(B)) = \mathsf{P}(X \in h^{-1}(B)) = \mathsf{P}(h(X) \in B) = \mathsf{P}_{h(X)}(B)$ 则

$$\mathsf{P}_X h^{-1}(\cdot) = \mathsf{P}_{h(X)}(\cdot). \tag{9}$$

设 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$. 根据第一章引理 8, 定义随机元 X_n, X 使得 $\mathsf{Q}_n = \mathsf{P}_{X_n}, n \geqslant 1$ 和 $\mathsf{Q} = \mathsf{P}_X$. 这样, 对 $n \to \infty$ 有 $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$. 由于 (9) 式有 $\mathsf{Q}_n h^{-1} = \mathsf{P}_{h(X_n)}, \mathsf{Q} h^{-1} = \mathsf{P}_{h(X)}$. 因为已证 $\mathsf{P}_{h(X_n)}$ 弱收敛于 $\mathsf{P}_{h(X)}$, 则可得所求的结果 (8) 式. □

§3. 正如同数列一样, 在研究测度族弱收敛时, 考察测度的子序列收敛性是非常重要的.

引理 2. 当 $n \to \infty$ 时 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$ 的收敛性当且仅当从每个序列 $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ 中可以找出子序列 $\{n'_k\}$, 使得当 $k \to \infty$ 时, $\mathsf{Q}_{n'_k} \Rightarrow \mathsf{Q}$.

证. 必要性是显然的. 证明充分性. 假设从每个序列中可以找出子序列, 使得子序列收敛, 但是当 $n \to \infty$ 时 $\mathsf{Q}_n \nRightarrow \mathsf{Q}$. 这时, 存在函数 $f \in C_b(\mathsf{S}, \mathbb{R})$ 和序列 $\{m_k\}_{k \geqslant 1}$, 使得对某个 $\varepsilon > 0$, 有 $|\langle f, \mathsf{Q}_{m_k} \rangle - \langle f, \mathsf{Q} \rangle| > \varepsilon$, 对所有的 $k \geqslant 1$.

由此可见, 由序列 $\{m_k\}_{k \geqslant 1}$ 中不能找出子序列 $\{m'_k\}_{k \geqslant 1}$, 使得当 $k \to \infty$ 时, 子序列收敛 $\mathsf{Q}_{m'_k} \Rightarrow \mathsf{Q}$. 矛盾, 充分性得证. □

定义 3. 在 $(\mathsf{S},\mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上测度族 $\{\mathsf{Q}_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ 称作相对紧的 (弱列紧的) (Relatively Compact), 如果从任意的序列 $\{\mathsf{Q}_{\alpha_n}\}$ 中可以找出弱收敛的子序列 $\{\mathsf{Q}_{\alpha_{n'}}\}$ (一般地说, 收敛到的元素不一定在这族中).

显然, 任意的弱收敛序列是相对紧的. 很容易构造出相对紧的序列, 但是序列没有弱极限 (只需要取两个弱收敛于不同极限的序列, 并将它们合而为一).

下面将展示出两个概念 (即相对紧性和弱收敛性) 之间的紧密关系.

定理 3. *在距离空间 S 的 Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上测度序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant1}$ 有弱极限当且仅当同时满足下面的条件:*

1) *序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant1}$ 是相对紧的;*

2) *存在那样的函数类 $\mathscr{H}\subset C_b(\mathsf{S},\mathbb{R})$, 使得*

   2a) *对每个 $h\in\mathscr{H}$, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle h,\mathsf{Q}_n\rangle$,*

   2b) *对 $(\mathsf{S},\mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上任意的测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$, 如果对所有的 $h\in\mathscr{H}$ 有*

$$\langle h,\mathsf{Q}\rangle=\langle h,\widetilde{\mathsf{Q}}\rangle,\tag{10}$$

则在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上有 $\mathsf{Q}=\widetilde{\mathsf{Q}}$.

证. 必要性是显然的. 因为只需要取 $\mathscr{H}=C_b(\mathsf{S},\mathbb{R})$, 再利用引理 1.

证明充分性. 根据 1) 由序列 $\{n_k\}_{k\geqslant1}$ 可以找到子序列 $\{n'_k\}_{k\geqslant1}$, 当 $k\to\infty$ 时有 $\mathsf{Q}_{n'_k}\Rightarrow\mathsf{Q}$.

这时, 对所有的 $f\in C_b(\mathsf{S},\mathbb{R})$, 有 $\langle f,\mathsf{Q}_{n'_k}\rangle\to\langle f,\mathsf{Q}\rangle$. 因此由 2a) 得到关系式, 有

$$\lim_{n\to\infty}\langle h,\mathsf{Q}_n\rangle=\langle h,\mathsf{Q}\rangle,\quad 对每个\ h\in\mathscr{H}.\tag{11}$$

假设当 $n\to\infty$ 时, $\mathsf{Q}_n\not\Rightarrow\mathsf{Q}$. 这时由于 1) 和引理 2 又可以找到子序列 $\{m_k\}_{k\geqslant1}$ 使得当 $k\to\infty$ 时有 $\mathsf{Q}_{m_k}\Rightarrow\widetilde{\mathsf{Q}}$, 且 $\widetilde{\mathsf{Q}}\neq\mathsf{Q}$. 由 (11) 式, 对所有的 $h\in\mathscr{H}$ 得出 $\langle h,\mathsf{Q}\rangle=\langle h,\widetilde{\mathsf{Q}}\rangle$. 这样, 根据 2b) 有 $\mathsf{Q}=\widetilde{\mathsf{Q}}$. 与 $\widetilde{\mathsf{Q}}\neq\mathsf{Q}$ 矛盾. □

§4. 研究在某些概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和 $(\Omega_n,\mathscr{F}_n,\mathsf{P}_n)$ 上对每个 $t\in T$ 取值于可测空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)$ 的随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 和 $X^{(n)}=\{X_t^{(n)},t\in T\}$, 这里 $n\geqslant1$. 考虑第一章定理 3, 自然而然地可以定义在柱集$\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_T$ 上随机过程 $X^{(n)}$ 分布弱收敛于随机过程 X 的分布作为随机过程 $X^{(n)}$ 弱收敛于随机过程 X. 但是只对在距离 (或拓扑) 空间的 Borel $\sigma-$ 代数上测度的弱收敛给了, 可是, 一般情况下, 不能确信空间 S_T 可以距离化, 可有 $\mathscr{B}_T=\mathscr{B}(\mathsf{S}_T)$. 但是考虑到过程的轨道 (以概率 1) 是位于某个特殊 (可距离化) 空间 S_T 的子集, 在一些情况下这个困难是可以克服的.

作为那样的子集, 可以取在某个紧集 (距离空间上) T 上的连续函数空间 $C(T,S)$, 它是对每个 $t\in T$ 取值于 Polish 空间 S (赋予了一致距离 ρ_C) (参见第一章 §18). 回顾, $\mathscr{B}(C(T,S))$ 表示 $C(T,S)$ 空间中的 Borel $\sigma-$ 代数, 而 $\mathscr{B}_T(C(T,S))$ 是这个

空间的柱集 $\sigma-$ 代数, 由 "连续柱集" 所产生的, 即由形如 $\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}(B)$, 这里 $B \in \mathscr{B}(S^k), t_1,\cdots,t_k \in T, k \geqslant 1$, 映射 $\pi_{t_1,\cdots,t_k}: C(T,S) \to S^k$ 是

$$\pi_{t_1,\cdots,t_k}x = (x(t_1),\cdots,x(t_k)), \quad x \in C(T,S). \tag{12}$$

根据第一章引理 12, 有 $\mathscr{B}_T(C(T,S)) = \mathscr{B}(C(T,S))$.

定理 4. 设 $C(T,S)$ 是上面给出的空间. 这时有下面的结果:

a) 如果在 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上的测度 $\mathsf{Q},\widetilde{\mathsf{Q}}$ 所有的有限维分布重合, 即

$$\mathsf{Q}\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1} = \widetilde{\mathsf{Q}}\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}, \quad 对 t_1,\cdots,t_k \in T, \quad k \in \mathbb{N} \tag{13}$$

则在 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上 $\mathsf{Q} = \widetilde{\mathsf{Q}}$.

b) 在 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上测度序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 当 $n \to \infty$ 时有弱极限当且仅当它是相对紧的, 且对所有的有限维分布存在弱极限, 即对每一 $t_1,\cdots,t_k \in T$ 和 $k \geqslant 1$ 序列 $\{\mathsf{Q}_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\}_{n\geqslant 1}$ 有弱极限.

c) 在 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上当 $n \to \infty$ 时有 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$ 当且仅当序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是相对紧的, 且 Q_n 的所有的有限维分布弱收敛于相应 Q 的有限维分布.

证. a) 如果测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 在代数 (在 $C(T,S)$ 中 "连续柱集") 上重合, 则根据**卡拉泰奥多里 (Caratheodory) 定理**, 测度将在由它们所产生的 $\sigma-$ 代数, 即在 $\mathscr{B}_T(C(T,S))$ 上重合. 这意味着在 Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上重合.

b) 必要性是由于序列的弱收敛是相对紧的, 而由于映射 (12) 式的连续性, 定理 2 保证了有限维分布的收敛. 证明充分性利用定理 3. 由假使序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是相对紧的意味着满足定理 3 中的 1). 研究函数类

$$\mathscr{H} = \{h = g_k \circ \pi_{t_1,\cdots,t_k}, \ \text{这里}\ g_k \in C_b(S^k,\mathbb{R}), t_1,\cdots,t_k \in T, k \geqslant 1\}.$$

根据公式 (I.23), 对 $h = g_k \circ \pi_{t_1,\cdots,t_k} \in \mathscr{H}$, 有

$$\langle h, \mathsf{Q}_n\rangle = \langle g_k, \mathsf{Q}_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\rangle. \tag{14}$$

测度序列 $\{\mathsf{Q}_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\}_{n\geqslant 1}$ 的弱收敛性是由于 (14) 式满足定理 3 的 2a). 公式 (14) 中的测度 Q_n 是任意的, 用 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 代替 Q_n, 结论 a) 说明了满足定理 3 的 2b). 这样, 序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 有弱极限.

c) 如果当 $n \to \infty$ 时有 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$ 则类似于 b) 中必要性的证明可以得到所求结论. 设 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是相对紧的, 且 Q_n 的有限维分布弱收敛于 Q 有限维分布 $(n \to \infty)$. 这时, 由任意的 Q_{n_k} 序列可以找到子序列 $\mathsf{Q}_{n_k'}$ 收敛于某个测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}$. 利用弱收敛极限的唯一性 (引理 1) 看出测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 的所有的有限维分布相重合. 因此, 根据已证的 a), 测度 Q 和 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ 在 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上相重合. 由引理 2 得到 Q_n 弱收敛于 Q. □

在下面的意义下, 测度 Q_n 的相对紧性 (在 $\mathscr{B}(C(T,S))$ 上) 条件是与有限维分布的收敛性条件是 "独立的".

很容易构造一个例子 Q_n 序列是相对紧的, 但是所有有限维分布没有收敛性. 只需要取两个不同的测度 Q 和 Q', 然后, 由它们交差地构造一个新序列 $\mathsf{Q},\mathsf{Q}',\mathsf{Q},\mathsf{Q}',\cdots$ 即可.

现在再构造一个 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 序列, 它的有限维分布弱收敛于某个测度 Q 的有限维分布, 但是这个序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 不是相对紧的 (根据定理 4, 只需要当 $n\to\infty$ 时, Q_n 没有弱极限即可).

例 1. 设测度 Q_n 集中在函数 $x_n(\cdot)\in C([0,1])$ 上, 由图 14 所示, 即 $\mathsf{Q}_n=\delta_{x_n}, n\geqslant 1$ (一般来说, **"Delta − 测度"** $\delta_x(A)=\mathbf{1}_A(x)$ 是测度 "集中" 于点 x) 和 $C([0,1])=C([0,1],\mathbb{R})$.

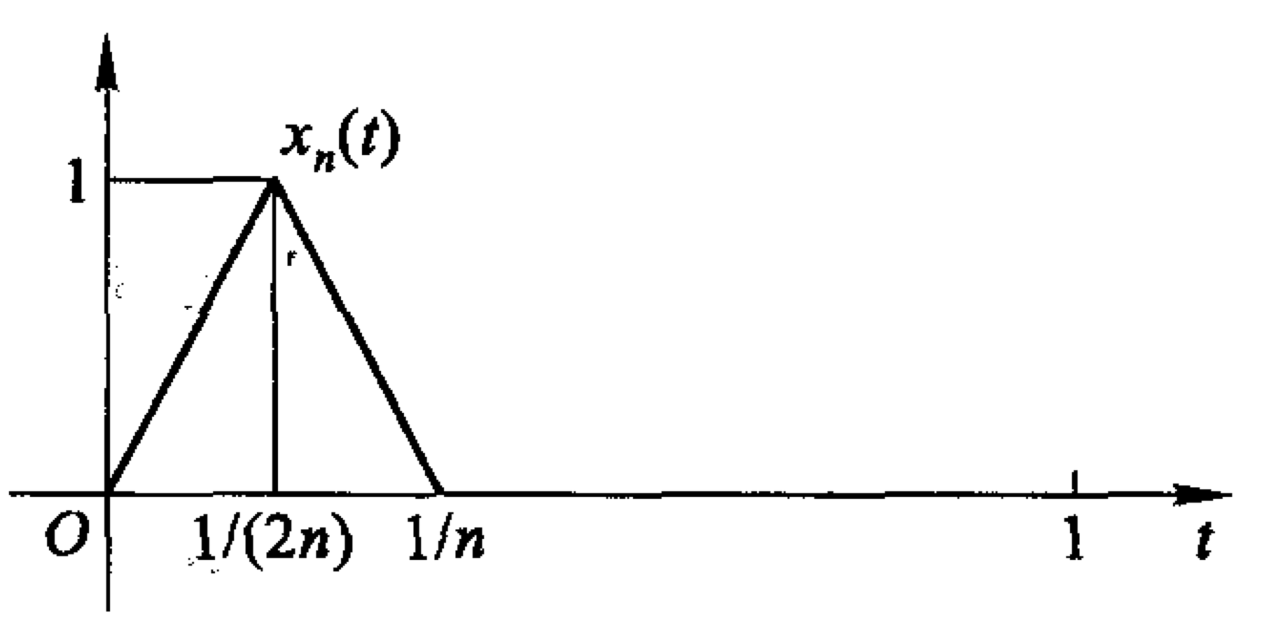


图 14

很容易看出, 对任意的 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^k), k\geqslant 1$ 和 $t_1,\cdots,t_k\in[0,1]$

$$\begin{aligned}\delta_{x_n}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}(B)&=\delta_{x_n}\{x\in C([0,1]):(x(t_1),\cdots,x(t_k))\in B\}\\&=\mathbf{1}_B(x_n(t_1),\cdots,x_n(t_k)).\end{aligned}$$

当 n 足够大时有 $x_n(t_i)=0, i=1,\cdots,k$. 因此, 对这些 n 有

$$\mathbf{1}_B(x_n(t_1),\cdots,x_n(t_k))=\mathbf{1}_B(0,\cdots,0)=\delta_{x_0}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}(B),\ \text{这里}\ x_0(t)=0, t\in[0,1].$$

因而, 当 $n\to\infty$ 时, 测度 Q_n 的有限维分布弱收敛于测度 δ_{x_0} 的有限维分布.

假设存在测度 Q, 使得在 $\mathscr{B}(C([0,1]))$ 上, 当 $n\to\infty$ 时有 $\delta_{x_n}\Rightarrow\mathsf{Q}$. 这时, 根据定理 2 (或者定理 4 的 c)) 对所有的 $k\geqslant 1$ 和 $t_1,\cdots,t_k\in T$ 有

$$\mathsf{Q}_n\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}\Rightarrow\mathsf{Q}\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k},\quad n\to\infty.$$

由于定理 4 的 a), 可得 $\mathsf{Q}=\delta_{x_0}$. 在空间 $C([0,1])$ 中取闭集 $F=\{x(\cdot):\sup\limits_{t\in[0,1]}x(t)\geqslant 1\}$. 显然, 对 $n\geqslant 1$ 有 $\delta_{x_0}(F)=0$ 和 $\delta_{x_n}(F)=1$. 根据定理 1 (1°), 当 $n\to\infty$ 时 $\delta_{x_n}\Rightarrow\delta_{x_0}$ 不可能有. 矛盾, 证明了构出的测度序列不是相对紧的.

在例 1 中的函数 x_n 在空间 $C([0,1])$ 中没有极限, 因此, 在习题 1 中, 用其他方法验证了测度 δ_{x_n} 没有弱极限.

§5. 下面有关与测度族弱相对紧的一个重要概念.

定义 4. 在距离空间 (S,ρ) 的 Borel $\sigma-$ 代数上, 测度族 $\{\mathsf{Q}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称作胎紧 (Tight) 的, 如果对任意的 $\varepsilon>0$ 可以找到紧集 K_ε, 使得对所有的 $\alpha\in\Lambda$, 有 $\mathsf{Q}_\alpha(K_\varepsilon)>1-\varepsilon$.

借助于胎紧的概念帮助描述下面关于弱收敛的基本结果, 而它的证明将在习题 2 中给出.

定理 5 (Prokhorov). 如果在距离空间 (S,ρ) 上测度族 $\{\mathsf{Q}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是胎紧的, 则它是相对紧的. 如果空间 (S,ρ) 是 Polish 空间 (即完备可分距离空间), 测度族是相对紧的, 则它是胎紧的.

定理 4 和 5 给出结果用来证明在距离空间 $C(T,\mathsf{S})$ 上测度序列 $\{\mathsf{Q}_n\}_{n\geqslant 1}$ 弱收敛于测度 Q 的一个非常有效方法. 它是借助于有限维的收敛性和胎紧性.

为此, 首先回顾一下 Polish 空间 $C([0,1])$.

定义 5. 函数

$$\Delta(f,\delta)=\sup\{|f(t)-f(s)|:s,t\in[0,1],|s-t|<\delta\},\quad \delta>0,$$

被称作函数 $f\in C([0,1])$ 的连续模.

注意, 函数 $\Delta(\cdot,\delta)$ 在空间 $C([0,1])$ 上连续, 因此它是 $\mathscr{B}(C([0,1]))-$ 可测的.

描述 $C([0,1])$ 空间中紧集的, 在函数论中有如下的结果 (参见, 例如, [32; p.302]).

定理 6 (阿尔泽拉 (Arzela)$-$ 阿斯科利 (Ascoli)). 函数族集合的闭包 $\mathscr{K}\subset C([0,1])$ 是该空间上的紧集当且仅当

$$\sup_{f\in\mathscr{K}}|f(0)|<\infty \quad 和 \quad \lim_{\delta\to 0+}\sup_{f\in\mathscr{K}}\Delta(f,\delta)=0.$$

(上面的条件等价于函数族 $\mathscr{K}$ 是一致有界和等度连续的.)

由此可得

定理 7. 在 $\mathscr{B}(C([0,1]))$ 上测度族 $\{\mathsf{Q}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是胎紧的当且仅当同时满足下面两个条件:

1°. 对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $M=M(\varepsilon)>0$, 使得对所有的 $\alpha\in\Lambda$ 有

$$\mathsf{Q}_\alpha(f:|f(0)|>M)<\varepsilon.$$

2°. 对任意的 $\varepsilon,\nu>0$, 可以找到 $\delta=\delta(\varepsilon,\nu)>0$, 使得对所有的 $\alpha\in\Lambda$ 有

$$\mathsf{Q}_\alpha(f:\Delta(f,\delta)>\nu)<\varepsilon.$$

证. 设测度族 $\{Q_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是胎紧的. 对给定的 $\varepsilon > 0$ 可以找到紧集 $K_\varepsilon \subset C([0,1])$, 使得 $\mathsf{Q}_\alpha(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ 对所有的 $\alpha \in \Lambda$. 根据定理6 (Arzela – Ascoli) 对任意的 $\varepsilon, \nu > 0$ 都存在 $M = M(\varepsilon) > 0$ 和 $\delta = \delta(\varepsilon, \nu) > 0$, 使得

$$K_\varepsilon \subset \{f : |f(0)| \leqslant M, \Delta(f, \delta) \leqslant \nu\}.$$

因此, 必要性条件 1° 和 2° 是显然的.

现在设满足条件 1° 和 2°. 对每个 $\varepsilon > 0$ 可以找到 $M = M(\varepsilon) > 0$, 使得对所有的 $\alpha \in \Lambda$ 有 $\mathsf{Q}_\alpha(B_0) < \varepsilon/2$, 这里 $B_0 = \{f : |f(0)| > M\}$. 取 $\delta_k > 0$ 那样, 使得对所有的 $\alpha \in \Lambda$ 和 $k \geqslant 1$ 有 $\mathsf{Q}_\alpha(B_k) < \varepsilon 2^{-(k+1)}$, 这里 $B_k = \{f : \Delta(f, \delta_k) > 1/k\}$. 设 $K_\varepsilon = \left[\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \overline{B}_k\right]$, 这里 $\overline{B}_k = C([0,1]) \setminus B_k$, $[\cdot]$ 表示在空间 $C([0,1])$ 中集合的闭包. 根据定理 (Arzela – Ascoli), K_ε 是紧集. 此外, $\mathsf{P}(\overline{K_\varepsilon}) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon 2^{-(k+1)} = \varepsilon$. 因此, 测度族 $\{\mathsf{Q}_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是胎紧的. □

注 1. 如果 $\Lambda = \mathbb{N}$, 则定理 7 条件 2° 可以换成下面的等价条件:

2′. 对任意的 $\varepsilon, \nu > 0$, 可以找到 $\delta = \delta(\varepsilon, \nu) > 0$ 和 $n_0 = n_0(\varepsilon, \nu, \delta)$, 使得对所有的 $n > n_0$ 有 $\mathsf{Q}_n(f : \Delta(f, \delta') > \nu) < \varepsilon$.

事实上, 根据**乌拉姆 (Ulam)** 引理 (参见, 本章补充与习题中的引理 6), 在 Polish 空间上, 任意的有限个测度族是胎紧的. 所以, 根据已证的定理 7, 对任意的 $\varepsilon, \nu > 0$ 存在 $\delta' = \delta'(\varepsilon, \nu) > 0$, 使得

$$\mathsf{Q}_n(f : \Delta(f, \delta') > \nu) < \varepsilon \text{ 对所有的 } n = 1, \cdots, n_0.$$

现在只剩下取 δ 和 δ' (在 2′ 中的) 极小, 即可.

代替 2′, 经常采用下面更方便验证的条件, 它保证 2′ 的成立.

2″. 对任意的 $\varepsilon, \nu > 0$, 可以找到 $N = N(\varepsilon, \nu) \in \mathbb{N}$, 使得对所有的 $n > n_0(\varepsilon, \nu, N)$ 有

$$\sum_{i=1}^{N} \mathsf{Q}_n \left(\sup_{(i-1)/N \leqslant s \leqslant i/N} |f(s) - f((i-1)/N)| > \nu \right) < \varepsilon.$$

事实上, 对任意的 $N \geqslant 1$ 和 $\nu > 0$ 有

$$\{f : \Delta(f, 1/N) < 3\nu\} \supset \bigcap_{i=1}^{N} \left\{ \sup_{(i-1)/N \leqslant s \leqslant i/N} |f(s) - f((i-1)/N)| < \nu \right\}.$$

因此, 由 2″ 推出 2′.

§6. 在连续函数的泛函空间中, 测度的弱收敛一般理论中一个非常著名和有意义的应用之一称作**不变原理**, 它乃是中心极限定理以泛函形式的类似 (和推广).

首先, 给出必要的定义. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 是概率空间, $X_{n,i}, i = 1, \cdots, m_n, n \geqslant 1$, 是该空间上的独立 (对每个 n) 实随机变量系列, 且 $\mathsf{E}X_{n,i} = 0, i = 1, \cdots, m_n$, 和 $\sum\limits_{i=1}^{m_n} \sigma_{n,i}^2 = 1$, 这里 $\sigma_{n,i}^2 = \mathsf{E}X_{n,i}^2$. 如果 $Y_{n,i}(i = 1, \cdots, m_n)$ 是具有有限方差的独立随机变量, 且至少有一个是非退化的, 则可以标准化, 设

$$X_{n,i} = (Y_{n,i} - \mathsf{E}Y_{n,i})/B_n, \quad B_n^2 = \sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{D}Y_{n,i}.$$

$t_{n,0} = 0, t_{n,j} = \sum\limits_{i=1}^{j} \sigma_{n,i}^2$ (这时, $t_{n,m_n} = 1$), $S_{n,0} = 0, S_{n,j} = \sum\limits_{i=1}^{j} X_{n,i}, j = 1, \cdots, m_n$.

对每个 $\omega \in \Omega$ 给出函数 $S_n(t, \omega), t \in [0, 1]$, 作为具有节点 $(t_{n,j}, S_{n,j}), j = 0, 1, \cdots, m_n$ 的连续折线, 即设对

$$S_n(t, \omega) = S_{n,i-1} + \frac{(t - t_{n,i-1})}{t_{n,i} - t_{n,i-1}} X_{n,i}, \text{ 对 } t \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}] \tag{15}$$

(参见, 图 15). 我们在这里, 以及今后都假定所有的 $\sigma_{n,i} > 0$, 换句话说, 我们除去了随机变量 a.s. $X_{n,i} = 0$. 公式 (15) 指出对每个 $t \in [0, 1], S_n(t, \omega)$, 是随机变量, 因为对所有的 $\omega \in \Omega$ 轨道 $S_n(\cdot, \omega)$ 是连续的, 则根据第一章定理 7 $S_n = \{S_n(t), t \in [0, 1]\}$ 是在空间 $C([0, 1])$ 上的随机元. 设 $\mathbb{P}_n$ 是在 $\mathscr{B}(C([0, 1]))$ 上 S_n 的概率分布.

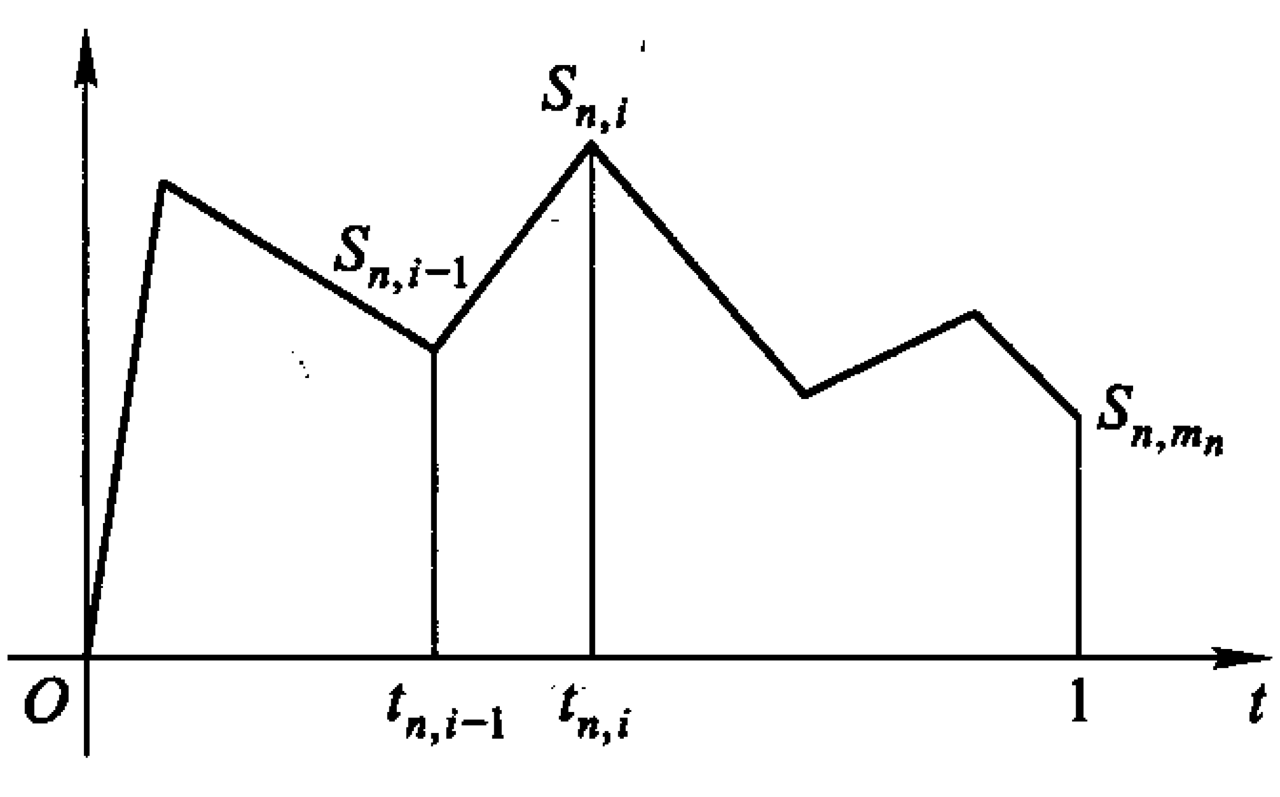


图 15

定理 8 (Prokhorov). 设上面所给出的随机变量 $X_{n,i}$, 这里 $n \geqslant 1$ 和 $i = 1, \cdots, m_n$, 满足林德伯格 (Lindeberg) 条件: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E}X_{n,i}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon\}} \to 0. \tag{16}$$

这时, $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{W}(n \to \infty)$, 这里 $\mathbb{W}$ 是 Wiener 测度. 换句话说, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $S_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W$, 这里 $W = \{W(t), t \in [0, 1]\}$ 是在 $[0, 1]$ 上的 Wiener 过程.

关于随机折线的分布弱收敛于 Wiener 测度通常称作唐斯克尔 (Donsker) – 普罗霍罗夫 (Prokhorov) 不变原理. Donsker 研究了中值为 0, 方差为 1 的独立同分布随

机变量情况. 设 $X_1, X_2, \cdots, S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geqslant 1$, 他研究了带有节点为 $(i/n, S_i/\sqrt{n}), i = 0, \cdots, n$ 的随机折线. Prokhorov 给出的定理 8 (具有 Lindeberg 条件) 包含了 Donsker 的结果.

应该特别强调的是在定理 8 的论述中包含了独立实随机变量序列满足 Lindeberg 条件的一般中心极限定理. 事实上, 泛函 $h(x(\cdot)) = x(1)$ 是 $C([0,1])$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射. 因此, 根据定理 2 有, 当 $n \to \infty$ 时, $h(S_n(\cdot)) \xrightarrow{\mathscr{D}} h(W(\cdot))$, 即

$$S_n(1) = S_{n,m_n} \xrightarrow{\mathscr{D}} W(1) \sim \mathsf{N}(0,1).$$

定理 8 的泛函性质说明了它为什么称作*泛函形式的中心极限定理*. 同时也可以理解不变原理的术语 —— *不变性*. 它应该理解为, 无论我们取什么样满足 Lindeberg 条件的独立随机变量序列, $h(S_n(\cdot))$ 的分布极限与 $h(W(\cdot))$ 是一样的 (这时, h 可以取在空间 $C([0,1])$ 上任意的连续映射).

这样, 对足够大 n, (连续有界的) 泛函 $h(S_n(\cdot))$ 的分布 "接近" Wiener 过程泛函 $h(W(\cdot))$ 的分布. 这种解释对相反问题的解决非常有帮助, 即在寻找我们所关注 Wiener 泛函的概率分布的时候, 有时可以成功地构造那样的随机游动 $S = \{S_n, n \geqslant 1\}$ 使得研究 $h(S_n(\cdot)), n \geqslant 1$ 的分布将问题变成了很简单 (参见, 习题 11 和 13).

定理 8 的证明是依靠 "有限维分布的弱收敛和胎紧性", 它们是在前面的定理 4 c), 5 和 7.

§7. 我们还需要两个辅助性结果. 第一个辅助性结果是多维中心极限定理, 它在证明过程 $S_n(\cdot), n \geqslant 1$ 的有限维分布弱的收敛起着关键作用.

为叙述该定理 (它的证明在附录 3 中给出), 研究在 $\mathbb{R}^k$ 中随机向量 $\xi_{n,i}, i = 1, \cdots, m_n$, 对任意固定的 $n \geqslant 1$ 独立 (在每一序列中), 且对所有的 n, i 有 $\mathsf{E}\xi_{n,i} = 0 \in \mathbb{R}^k$ 和 $\mathsf{E}\|\xi_{n,i}\|^2 < \infty$, 这里 $\|\cdot\|$ 是在 $\mathbb{R}^k$ 中的欧氏范数.

用 $B_{n,i}^2 = \mathsf{D}\xi_{n,i}$ 表示方差 (协方差) 矩阵, 即由向量 $\xi_{n,i}$ 的协方差组成的矩阵,

$$S_n = \sum_{i=1}^{m_n} \xi_{n,i}, \quad B_n^2 = \mathsf{D}S_n = \sum_{i=1}^{m_n} B_{n,i}^2.$$

定理 9 (Lindeberg). *设前面像大山似的那种随机向量* $\{\xi_{n,i}, i = 1, \cdots, m_n, n \geqslant 1\}$ *当* $n \to \infty$ *时, 按每个元素有*

$$B_n^2 \to B^2, \tag{17}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, *当* $n \to \infty$ *时有*

$$\sum_{i=1}^{m_n} \mathsf{E}\|\xi_{n,i}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,i}\| > \varepsilon\}} \to 0. \tag{18}$$

这时当 $n \to \infty$ 时有

$$S_n \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, B^2). \tag{19}$$

第二个辅助性结果是在估计过程 $S_n(\cdot), n \geqslant 1$ 的连续模时的极大不等式, 即在证明它们的分布族是胎紧的时候, 在下面命题中给出.

引理 3 (Kolmogorov 不等式). 设 $\zeta_1, \cdots, \zeta_m$ 是具有 $\mathsf{E}\zeta_i = 0, \sigma_i^2 = \mathsf{D}\zeta_i < \infty, i = 1, \cdots, m$ 的独立实随机变量. 设 $S_i = \sum_{j=1}^{i} \zeta_j, 1 \leqslant i \leqslant m, d_m^2 = \mathsf{D}S_m$. 这时, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立不等式

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |S_i| \geqslant \lambda d_m\right) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m). \tag{20}$$

证. 当 $\lambda \leqslant \sqrt{2}$ 时, 显然成立. 因此, 假设 $\lambda > \sqrt{2}$, 且设 $A_j = \left\{\max_{i<j}|S_i| < \lambda d_m, |S_j| \geqslant \lambda d_m\right\}$. 这时, 事件

$$A = \left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |S_i| \geqslant \lambda d_m\right\} = \bigcup_{j=1}^{m} A_j,$$

并且, 对 $i \neq j, A_i \bigcap A_j = \varnothing$. 概率

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) &= \mathsf{P}(A \textstyle\bigcap \{|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m\}) + \mathsf{P}(A \textstyle\bigcap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\}) \\ &\leqslant \mathsf{P}(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \sum_{j=1}^{m} \mathsf{P}(A_j \textstyle\bigcap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\}).\end{aligned}$$

注意, $A_m \bigcap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\} = \varnothing$. 对 $1 \leqslant j \leqslant m$ 有 $A_j \bigcap \{|S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m\} \subset A_j \bigcap \{|S_m - S_j| > \sqrt{2}d_m\}$, 因为 $|S_j| \geqslant \lambda d_m, |S_m| < (\lambda - \sqrt{2})d_m$, 得出 $|S_m - S_j| \geqslant |S_j| - |S_m| > \sqrt{2}d_m$. 事件 A_j 和 $\{|S_m - S_j| > \sqrt{2}d_m\}$ 依赖于不同的独立随机变量组, 所以是相互独立的. 利用切比雪夫 (Chebyshev) 不等式得到 (考虑到 $\sum_{j=1}^{m} \mathsf{P}(A_j) = \mathsf{P}(A)$) :

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) &\leqslant \mathsf{P}(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \sum_{j=1}^{m-1} \mathsf{P}(A_j)\frac{\sigma_{j+1}^2 + \cdots + \sigma_m^2}{2d_m^2} \\ &\leqslant \mathsf{P}(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} \mathsf{P}(A_j) \leqslant \mathsf{P}(|S_m| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})d_m) + \frac{1}{2}\mathsf{P}(A),\end{aligned}$$

由此可得所要的不等式 (20). □

§8. Prokhorov 定理 (定理 8) 的证明. 首先从有限维分布的弱收敛结果开始:

$$\mathbb{P}_n \pi_{t_1, \cdots, t_k}^{-1} \Rightarrow \mathbb{W} \pi_{t_1, \cdots, t_k}^{-1}, \quad n \to \infty,$$

即根据 (9) 式需要验证对任意的 $t_1,\cdots,t_k\in[0,1],k\geqslant 1$ (只是需 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$) 有

$$(S_n(t_1),\cdots,S_n(t_k))\xrightarrow{\mathscr{D}}(W(t_1),\cdots,W(t_k)),\quad n\to\infty. \tag{21}$$

为此, 对每个点 $t_j(j=1,\cdots,k)$ 和给定的 n, (在 §6 开始所引入的点 $t_{n,i},i=1,\cdots,m_n$ 当中) 从左边找到最接近的点 $t_j^{(n)}$. 换句话说, 设 $t_j^{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m_n}\{t_{n,i}\leqslant t_j\}$.

由于 Lindeberg 条件 (参见附录 3), 有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\sigma_{n,i}^2\to 0,\quad n\to\infty, \tag{22}$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m_n}(t_{n,i}-t_{n,i-1})\to 0$. 从而, 对每个 $j=1,\cdots,k$, 当 $n\to\infty$ 时有 $t_j^{(n)}\to t_j$. 如果 $t_j^{(n)}=t_{n,l},l=l_j(n)$, 则

$$|S_n(t_j)-S_n(t_j^{(n)})|\leqslant|S_n(t_{n,l+1})-S_n(t_{n,l})|\leqslant|X_{n,l+1}|.$$

由于 (22) 式对任意的 $j=1,\cdots,k$ 当 $n\to\infty$ 时有依概率收敛 $S_n(t_j)-S_n(t_j^{(n)})\xrightarrow{\mathsf{P}}0$.

不难验证, 利用定理 1 的 1°, 如果 Z_n,Y_n,Z 是取值于 $\mathbb{R}^k$ 的随机向量, 且 $Z_n\xrightarrow{\mathscr{D}}Z,Y_n\xrightarrow{\mathsf{P}}0$ (即所有的分量依概率收敛于 0), 则 $Z_n+Y_n\xrightarrow{\mathscr{D}}Z$.

这样, 对证明 (21) 式只需要证

$$Z_n=(S_n(t_1^{(n)}),\cdots,S_n(t_k^{(n)}))\xrightarrow{\mathscr{D}}Z=(W(t_1),\cdots,W(t_k)) \tag{23}$$

在我们所研究的情况, 当 $n\to\infty$ 时 $(i,j=1,\cdots,k)$ 有

$$\operatorname{cov}(S_n(t_i^{(n)}),S_n(t_j^{(n)}))=\min\{t_i^{(n)},t_j^{(n)}\}\to\min\{t_i,t_j\}.$$

因此, 对在 (23) 式中的 Z_n 和 Z 来说有 $\mathsf{D}Z_n\to\mathsf{D}Z$, 即协方差矩阵按元素收敛. 如果 $t_1^{(n)}=t_{n,l_1},\cdots,t_k^{(n)}=t_{n,l_k}$; 这里 $l_i=l_i(n)\in\{1,\cdots,m_n\}$, 则 $Z_n=\xi_{n,1}+\cdots+\xi_{n,l_k}$, 这里 $\xi_{n,i},i=1,\cdots,l_k(n)$ 是取值于 $\mathbb{R}^k$ 的独立随机向量:

$$\underset{Z_n}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}S_n(t_1^{(n)})\\S_n(t_2^{(n)})\\\cdots\\S_n(t_k^{(n)})\end{pmatrix}}}=\underset{\xi_{n,1}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}X_{n,1}\\X_{n,1}\\\cdots\\X_{n,1}\end{pmatrix}}}+\cdots+\underset{\xi_{n,l_1}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}X_{n,l_1}\\X_{n,l_1}\\\cdots\\X_{n,l_1}\end{pmatrix}}}+\underset{\xi_{n,l_1+1}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}0\\X_{n,l_1+1}\\\cdots\\X_{n,l_1+1}\end{pmatrix}}}+\cdots+\underset{\xi_{n,l_k}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\X_{n,l_k}\end{pmatrix}}}.$$

利用每个向量 $\xi_{n,i}$ 的所有分量 (除了一部分可能等于 0 以外) 与 $X_{n,i}$ 重合, 由于 (16) 式得到

$$\sum_{i=1}^{l_k(n)}\mathsf{E}\|\xi_{n,i}\|^2\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,i}\|>\varepsilon\}}\leqslant k\sum_{i=1}^{m_n}\mathsf{E}|X_{n,i}|^2\mathbf{1}_{\{|x_{n,i}|>\varepsilon/\sqrt{k}\}}\to 0.$$

从而 Lindeberg 定理的所有条件都满足, 因此有有限维分布收敛 (21) 式.

现在, 利用定理 7 和引理 3, 验证分布族 $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性.

因为 $S_n(0)=0, n\geqslant 1$ 所以定理 7 的条件 1° 满足.

验证注 1 的条件 $2''$. 固定 $N\geqslant 1$. 设 $t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}$ 是从 $t_{n,j}\leqslant (i-1)/N$ 中相应点最右边的点和从 $t_{n_j}\geqslant i/N$ 中相应点最左边的点, $i=1,\cdots,N$. 由 (22) 式得到对足够大的 n, 有

$$1/N\leqslant t_{n,i}^{(2)}-t_{n,i}^{(1)}\leqslant 2/N,\quad i=1,\cdots,N. \tag{24}$$

设 $V_{n,i}=\sup\limits_{(i-1)/N\leqslant t\leqslant i/N}|S_n(t)-S_n((i-1)/N)|$, 这时, 有

$$\begin{aligned}V_{n,i}&\leqslant \sup_{t\in[t_{n,i}^{(1)},t_{n,i}^{(2)}]}|S_n(t)-S_n(t_{n,i}^{(1)})+S_n(t_{n,i}^{(1)})-S_n((i-1)/N)|\\&\leqslant 2\sup_{t\in[t_{n,i}^{(1)},t_{n,i}^{(2)}]}|S_n(t)-S_n(t_{n,i}^{(1)})|=2\max_{t_{n,j}\in[t_{n,i}^{(1)},t_{n,i}^{(2)}]}|S_n(t_{n,j})-S_n(t_{n,i}^{(1)})|\end{aligned}$$

对任意的 $\nu>0$ 和所有的 $i=1,\cdots,N, N\geqslant 1$, 有

$$p_{n,i}=\mathsf{P}(V_{n,i}>\nu)\leqslant \mathsf{P}\left(\max_{t_{n,j}\in[t_{n,i}^{(1)},t_{n,i}^{(2)}]}|S_n(t_{n,j})-S_n(t_{n,i}^{(1)})|>\nu/2\right). \tag{25}$$

考虑到引理 3 和等式 $\mathsf{D}(S_n(t_{n,i}^{(2)})-S_n(t_{n,i}^{(1)}))=t_{n,i}^{(2)}-t_{n,i}^{(1)}$, 得到

$$p_{n,i}\leqslant 2\mathsf{P}\left(|S_n(t_{n,i}^{(2)})-S_n(t_{n,i}^{(1)})|>(\lambda-\sqrt{2})\sqrt{t_{n,i}^{(2)}-t_{n,i}^{(1)}}\right),$$

这里 $\lambda=\nu\Big/\left(2\sqrt{t_{n,i}^{(2)}-t_{n,i}^{(1)}}\right)$, i 和 n 如前所示.

设 $t_{n,i}^{(1)}=t_{n,j_i}, t_{n,i}^{(2)}=t_{n,r_i}, j_i=j_i(n), r_i=r_i(n)$. 研究在第 n 个序列集合 $J_i^{(n)}=\{l: j_i<l\leqslant r_i\}, i=1,\cdots,N$ 中带有号 l 的量. 假定 $S_n^{(i)}=\sum\limits_{l\in J_i^{(n)}}X_{n,l}=S_n(t_{n,i}^{(2)})-S_n(t_{n,i}^{(1)})$. 这时由于 (24) 式和 (16) 式对任意的 $\nu>0$ 有

$$\sum_{l\in J_i^{(n)}}\mathsf{E}\left(\frac{X_{n,l}}{\sqrt{\mathsf{D}S_n^{(i)}}}\right)\mathbf{1}_{\left\{\frac{|X_{n,l}|}{\sqrt{\mathsf{D}S_n^{(i)}}}>\nu\right\}}\leqslant N\sum_{i=1}^{m_n}\mathsf{E}|X_{n,i}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n,i}|>\nu/\sqrt{N}\}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

因此, 根据一维 Lindeberg 定理 (即 $k=1$: 参见 §7 的开始), 对 $i=1,\cdots,N$ 和任意的 $\nu>0$, 当所有 $n>n_0(\varepsilon,\nu,N)$ 时有

$$\left|\mathsf{P}\left(|S_n^{(i)}|>(\lambda-\sqrt{2})\sqrt{\mathsf{D}S_n^{(i)}}\right)-\mathsf{P}(|\xi|>\lambda-\sqrt{2})\right|<\varepsilon/(2N), \tag{26}$$

这里 $\xi\sim\mathsf{N}(0,1)$. 在这里我们利用了在中心极限定理中分布函数的收敛性在整个数轴上是一致的 (参见习题 12). 根据 (24) 式, 对所有足够大的 n 和 $i=1,\cdots,N$ 得到

$\lambda \geqslant \nu\sqrt{N}/(2\sqrt{2})$. 因此, 如果 $N = N(\varepsilon, \nu)$ 足够大, 则利用 (II.29), 得出估计

$$\mathsf{P}(|\xi| > \lambda - \sqrt{2}) < \varepsilon/2N.$$

由最后的不等式, (25) 式和 (26) 式得出 $\sum\limits_{i=1}^{N} p_{n,i} < \varepsilon$. 由于定理 7 和注 1 测度族 $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 的胎紧性成立. 此外还有关系式 (21) 式, 于是完成定理 8 的证明. □

§9. 即将指出, 借助于所述的弱收敛理论可以证明数理统计的一个核心结果 —— Kolmogorov (拟合优度) 检验.

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立具有同分布函数 $F = F(x)$ 的实随机变量. 根据 (I.34) 经验测度 P_n. 取 $B = (-\infty, x]$, 得到经验分布函数

$$F_n(x,\omega) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(\xi_i(\omega)), \quad n \geqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

定理 10 (Kolmogorov). *如果分布函数 $F = F(x)$ 是连续的, 则对所有的 $z > 0$, 当 $n \to \infty$ 时, 有*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{-\infty<x<\infty} \sqrt{n}|(F_n(x,\omega) - F(x))| \leqslant z\right) \to 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-2k^2z^2} = K(z). \quad (27)$$

证. 利用代换 $\zeta_i = F^{\mathrm{inv}}(\xi_i), i \geqslant 1$ 这里 $F^{\mathrm{inv}}(t) = \inf\{x : F(x) \geqslant t\}, t \in [0,1]$. 它是函数 $F = F(x)$ 的广义的反函数, (考虑到函数 F 的连续性), 可以将上面的情况转化为所有随机变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 具有在 $[0,1]$ 区间上均匀分布. 这样, 只需要对这样的随机变量证明, 对所有的 $z \geqslant 0$ 有

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_n(t)| \leqslant z\right) \to K(z), \quad n \to \infty, \quad (28)$$

这里 $Y_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t), t \in [0,1]$.

定义泛函 $h(x(\cdot)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$. 自然而然地, 证明 (28) 式的途径是先找出 $Y_n(\cdot)$ 分布的弱极限, 然后再利用定理 2. 证明的复杂性在于, 随机过程 Y_n 有间断的轨道 (它们是属于 Skorokhod 空间 $D([0,1])$). 可是, (28) 式的证明也可以在前面所述的定理的框架中给出.

设 $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \cdots, \xi_{(n)}$ 是根据 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 所进行的顺序统计量序列 (或变量序列, 变列, Variational Series), 即对每个 ω 量 $\xi_1(\omega), \cdots, \xi_n(\omega)$ 按照递增顺序排列 (a.s. 所有的 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是不同的). 设对每个 ω 函数 $G_n(t,\omega), t \in [0,1]$ 是连续随机折线, 且具有节点 $(i/(n+1), \xi_i(\omega)), i = 0, \cdots, n+1$ 这里 $\xi_{(0)}(\omega) = 0, \xi_{(n+1)}(\omega) = 1$. 这样, 根据第一章定理 7 函数 $G_n(\cdot,\omega)$ (参见图 16) 是空间 $C([0,1])$ 中的随机元. 注意, a.s. 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |F_n(t) - G_n(t)| \leqslant n^{-1}.$$

因为, 对 $t \in [\xi_{(i)}(\omega), \xi_{(i+1)}(\omega))$, 有 $F_n(t,\omega) = i/n, i = 0, \cdots, n$.

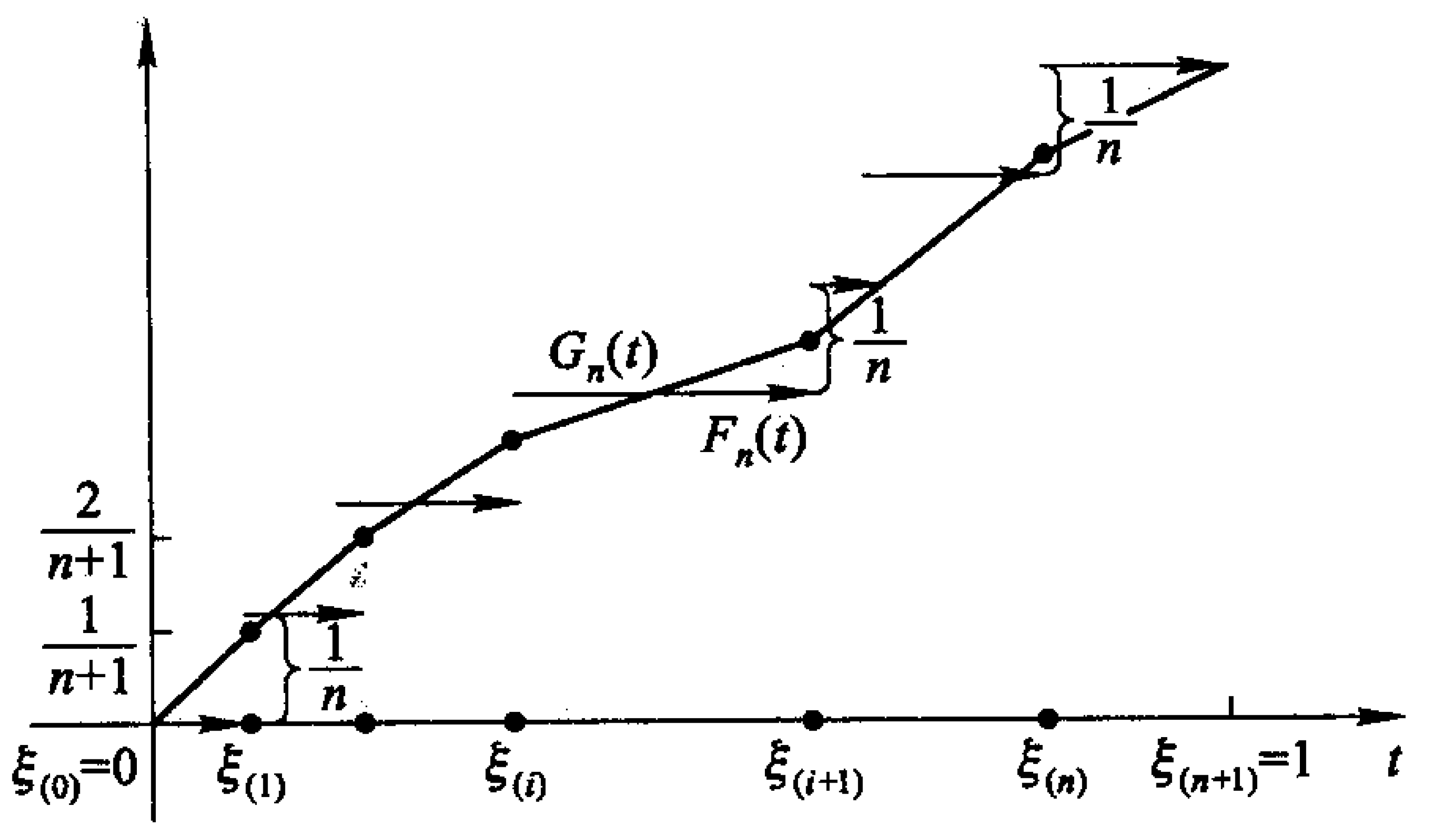


图 16

设 $Z_n(t) = \sqrt{n}(G_n(t) - t), t \in [0,1]$ 得出, 以概率 1 有

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Y_n(t) - Z_n(t)| \leqslant n^{-1/2}.$$

因此, 随机变量 $h(Y_n(\cdot))$ 的极限分布将与随机变量 $h(Z_n(\cdot))$ 的极限分布相重合. 于是定理的证明就导致需要验证下面两个结论:

1) 在 $C([0,1])$ 中, 当 $n \to \infty$ 时 $Z_n \xrightarrow{\mathscr{D}} W^0$, 这里 W^0 是 Brown 桥, 即可以定义为过程 $W^0(t) = \{W(t) - tW(1), t \in [0,1]\}$, 这里 $W = \{W(t), t \in [0,1]\}$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Wiener 过程:

2) $\mathsf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |W^0(t)| \leqslant z\right) = K(z), z \geqslant 0.$

第一个结论的证明是根据类似定理 8 的证明途径 (“有限维分布的收敛性和胎紧性). 相应的证明参见, 例如, [2; 第 2 章, §13].

我们来证明第二个结论.

在 $(C([0,1]), \mathscr{B}(C([0,1])))$ 上定义 (条件) 概率测度族

$$\mathbb{Q}_\varepsilon = \mathsf{P}(W(\cdot) \in C | W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]), \quad \varepsilon > 0 \tag{29}$$

引理 4. 如果 $\varepsilon \downarrow 0$ 则 $\mathbb{Q}_\varepsilon \Rightarrow \mathbb{W}^0$, 这里 $\mathbb{W}^0$ 是在 $C([0,1])$ 中 Brown 桥的分布.

证. 由于定理 1 (该定理, 对指标为 $\varepsilon > 0$ 的测度也是成立), 只需证

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{Q}_\varepsilon(F) \leqslant \mathsf{P}(W^0 \in F), \tag{30}$$

这里 F 是 $\mathscr{B}(C[0,1])$ 中的任意的闭集.

对任意的 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k \leqslant 1, k \in \mathbb{N}$, 向量 $(W^0(t_1), \cdots, W^0(t_k))$ 不依赖于 $W^0(1)$. 事实上, 作为 Gauss 向量的线性变换, 向量 $(W^0(t_1), \cdots, W^0(t_k), W(1))$ 具有

Gauss 分布. 除此之外, $\mathsf{E}W^0(t)W(1) = \mathsf{E}W(t)W(1) - t\mathsf{E}W^2(t) = \min\{t,1\} - t = 0, t \in [0,1]$ 且可以导出上面的独立性.

这样, 对任意的柱集 $C \in \mathscr{B}(C([0,1]))$ 和任意的集 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 有

$$\mathsf{P}(W^0(\cdot) \in C, W(1) \in B) = \mathsf{P}(W^0 \in C)\mathsf{P}(W(1) \in B). \tag{31}$$

因为柱集构成代数, 可产生 $\mathscr{B}(C([0,1]))$, 则根据第一章引理 3, 等式 (31) 成立对任意的集合 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和所有的集合 $C \in \mathscr{B}(C([0,1]))$, 因此, 对每个 $\varepsilon > 0$ 有

$$\mathsf{P}(W^0(\cdot) \in C | W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]) = \mathsf{P}(W^0(\cdot) \in C).$$

注意,

$$\rho_c(W(\cdot), W^0(\cdot)) = \sup_{t\in[0,1]} |W(t) - (W(t) - tW(1))| = W(1), \tag{32}$$

这里 ρ_c 是在 $C([0,1])$ 空间中的一致距离. 现在取闭集 $F \in \mathscr{B}(C([0,1]))$. 因为 $|W(1)| < \delta$ 和 $W(\cdot) \in F$, 由于 (32) 式有

$$W^0 \in F^\delta = \{x \in C([0,1]) : \rho(x, F) < \delta\}.$$

这样对任意的 $\varepsilon < \delta$ 得到

$$\mathsf{P}(W \in F||W(1)| \leqslant \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}(W^0 \in F^\delta|W(1) \leqslant \varepsilon) = \mathsf{P}(W^0 \in F^\delta),$$

这意味着

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{Q}_\varepsilon(F) \leqslant W^0(F^\delta).$$

对不等式两边取 $\delta \downarrow 0$ 的极限, 且考虑到 $\bigcap\limits_{\delta>0} F^\delta = F$, 从而得到关系式 (30). 由此可得引理的结论. □

注 2. 引理 4 指出, Brown 桥的分布自然地解释为条件 Wiener 过程的分布 (在 $W(1) = 0$ 的条件下).

根据 (9) 式有 $\mathbb{W}^0 h^{-1}(B) = \mathsf{P}(h(W^0) \in B)$. 除此之外

$$\mathbb{Q}_\varepsilon h^{-1}(B) = \mathsf{P}(W(\cdot) \in h^{-1}(B)|W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]) = \mathsf{P}(h(W) \in B|W(1) \in [-\varepsilon, \varepsilon]),$$

这里 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \varepsilon > 0, h(x(\cdot)) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, 对 $x(\cdot) \in C([0,1])$. 因此引理 4 和定理 2 给出, 对那些 $z \geqslant 0$ 那里分布函数 $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |W^0(t)| \leqslant z\right)$ 是连续的 (即最多除去可数

个 z 值),

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W^0(t)|\leqslant z\right) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{Q}_\varepsilon h^{-1}((-\infty,z]) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\mathsf{P}\left(\sup\limits_{t\in[0,1]}|W(t)|\leqslant z, W(1)\leqslant\varepsilon\right)}{\mathsf{P}(|W(1)|\leqslant\varepsilon)} \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\mathsf{P}\left(\sup\limits_{t\in[0,1]}W(t)\leqslant z, \inf\limits_{t\in[0,1]}W(t)\geqslant -z, W(1)\in[-\varepsilon,\varepsilon]\right)}{\mathsf{P}(W(1)\in[-\varepsilon,\varepsilon])}. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

随机变量 $\inf\limits_{t\in[0,1]}W(t)$, $\sup\limits_{t\in[0,1]}W(t), W(1)$ 的联合分布已经知道 (参见, 本章补充和习题的定理 15). 进而可以找出公式 (33) 右边分子部分的概率. 再除以概率 $\mathsf{P}(W(1)\in[-\varepsilon,\varepsilon])$, 取 $\varepsilon\downarrow 0$ 的极限, 得到精确的极限函数, 在 (27) 式中所定义的 $K(z)$. 这个函数 $K=K(z)$ 对所有的 $z>0$ 是连续的. 因此, 结论 2) 成立. 所以在 (33) 式中, 对所有的 $z>0$ 收敛, 于是完成了 Kolmogorov 定理的证明. □

§10. 在这一节中, 我们将讨论随机元的几乎必然 (a.s.) (或者说几乎处处 (a.e.)) 收敛与弱收敛之间的关系.

S 是距离空间. 设 $X, X_n:\Omega\to\mathsf{S}$, 且对 $n\geqslant 1, X, X_n\in\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$. 如果当 $n\to\infty$ 时 a.s. 有 $X_n\to X$, 则由于 (6) 式, 显然 $\mathrm{Law}(X_n)\Rightarrow\mathrm{Law}(X), n\to\infty$. 相反, 甚至于对定义在同一个概率空间上的实随机变量都不见得成立 (请举例). 但是, 在一定的意义下, 相反的结论却成立, 正如下面的定理所示.

定理 11 (Skorokhod). 设 (S,ρ) 是 Polish 空间, 当 $n\to\infty$ 时有 $\mathsf{Q}_n\Rightarrow\mathsf{Q}_\infty$, 这里 $\mathsf{Q}_n(n\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\})$ 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的概率测度. 这时, 存在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 和随机元 $X_n:\Omega\to\mathsf{S}, X_n\in\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathsf{S}), n\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 使得对所有的 $n\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 有 $\mathrm{Law}(X_n)=\mathsf{Q}_n$, 且当 $n\to\infty$ 时 a.s. 有 $X_n\to X_\infty$.

证. 首先构造 S 的一确定的可测分割系. 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 由于 S 的可分性存在以半径为 $2^{-(k+2)}$ 的开集球族 $G_{k,m}, m\in\mathbb{N}$, 使得 $\bigcup\limits_m G_{k,m}=\mathsf{S}$. 改变每个球的半径, 从 $2^{-(k+2)}$ 到 $2^{-(k+1)}$ 之间, 可以得到复盖 S 的开球族 $B_{k,m}$, 使得对所有 $k,m\in\mathbb{N}$ 和 $n\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 有 $Q_n(\partial B_{k,m})=0$. 假设 $D_{k,1}=B_{k,1}$, 对 $m\geqslant 2 D_{k,m}=B_{k,m}\setminus\bigcup\limits_{r=1}^{m-1}B_{k,r}$. 对每个 $k\in\mathbb{N}$, 集合 $D_{k,m}, m\in\mathbb{N}$, 构成 S 的分割, 且 $\mathrm{diam}D_{k,m}\leqslant 2^{-k}, m\in\mathbb{N}$ 和 $\mathsf{Q}_n(\partial D_{k,m})=0$ 对所有的 n,k,m. 注意, $\mathrm{diam}D=\sup\{\rho(x,y):x,y\in D\}, D\subset\mathsf{S}$.

引入集合 $S_{i_1,\cdots,i_k}=\bigcap\limits_{j=1}^{k}D_{j,i_j}$ (所有指标取自 $\mathbb{N}$). 它们构成了随着 k 的增加变细一个套一个 S 的分割, 使得

1) 对 $(i_1,\cdots,i_k)\neq(j_1,\cdots,j_k)$, 有 $S_{i_1,\cdots,i_k}\bigcap S_{j_1,\cdots,j_k}=\varnothing$;

2) 对所有的 $k, i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N}$, 有 $S = \bigcup_j S_j, \bigcup_j S_{i_1,\cdots,i_{k,j}} = S_{i_1,\cdots,i_k}$;

3) 对所有的 $k, i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N}$, 有 $\mathrm{diam} S_{i_1,\cdots,i_k} \leqslant 2^{-k}$;

4) 对所有的 $k, i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$, 有 $\mathsf{Q}_n(\partial S_{i_1,\cdots,i_k}) = 0$.

在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 这里 $\Omega = [0,1), \mathscr{F} = \mathscr{B}([0,1))$, P 是 Lebesgue 测度 (与通常一样, 认为 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}$ 是完全的), 为了简便将测度 $\mathrm{mes}(\cdot)$ 写成 $|\cdot|$, 构造要找的随机变量序列.

对每个 $n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 考虑以半开区间

$$\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)} = [a_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}, b_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}),$$

分割 $[0,1)$, 这里 $i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N}$ 和 $|\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}| = \mathsf{Q}_n(S_{i_1,\cdots,i_k})$, 即

$$\Delta_1^{(n)} = [0, \mathsf{Q}_n(S_1)), \quad \Delta_2^{(n)} = [\mathsf{Q}_n(S_1), \mathsf{Q}_n(S_1) + \mathsf{Q}_n(S_2)), \cdots$$

用类似方法, 把每个半开区间 $\Delta_i^{(n)}$ 分割成更小半开区间 $\Delta_{i,j}^{(n)}$ (该更小半开区间序列从 $\Delta_i^{(n)}$ 区间的左端点开始) 等等, 这样继续下去. 一般地, 第 k 步, 用 i_k 表示依次分割指标, 最后以字典顺序得到区间 $\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}$.

对 $k \in \mathbb{N}$, 在每个非空集合 $S_{i_1,\cdots,i_k}$ 中选取一点 $x_{i_1,\cdots,i_k}$, 且对每个 $n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$, 在 $\Omega = [0,1)$ 上定义函数 $X_n^k(\omega) = x_{i_1,\cdots,i_k}$, 当 $\omega \in \Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}$. (如果 $\mathsf{Q}_n(S_{i_1,\cdots,i_k}) = 0$, 则 $\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)} = \varnothing$ 是区间具有 $[a,a)$ 的形式, 而不要求在那样的区间上定义函数). 显然, 对所有的 k, n 有 $X_n^k \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(S)$.

注意, 根据所构造分割的性质 2) 和 3), 对任意的 $\omega \in \Omega$ 和所有的 k, n, m, 有

$$\rho(X_n^k(\omega), X_n^{k+m}(\omega)) \leqslant 2^{-k}. \tag{34}$$

由于 S 的完全性, 对 $\omega \in [0,1), N \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$, 存在

$$X_n(\omega) = \lim_{k\to\infty} X_n^k(\omega) \tag{35}$$

并且根据第一章引理 5, 对所有的 $n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 有 $X_n \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(S)$. 利用性质 4) 和定理 1 的 3°, 得到对所有的 $k, i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N}$ 当 $n \to \infty$ 时有

$$\mathsf{Q}_n(S_{i_1,\cdots,i_k}) = |\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}| \to |\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(\infty)}| = \mathsf{Q}_\infty(S_{i_1,\cdots,i_k}).$$

因此, 如果 $\mathsf{Q}_\infty(S_{i_1,\cdots,i_k}) > 0$ (意味着 $\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(\infty)} \neq \varnothing$), 则对每个点 $\omega \in (a_{i_1,\cdots,i_k}, b_{i_1,\cdots,i_k})$ 可以找到 $n_k(\omega)$, 使得当 $n \geqslant n_k(\omega)$ 时, 有 $\omega \in (a_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}, b_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)})$. 这时, 对所研究的 ω 得到 $X_n^k(\omega) = X_\infty^k(\omega)$, 考虑到 (34) 式, 对 $n \geqslant n_k(\omega)$ 有

$$\begin{aligned}\rho(X_n(\omega), X_\infty(\omega)) \leqslant \rho(X_n(\omega), X_n^k(\omega)) + \rho(X_n^k(\omega), X_\infty^k(\omega)) \\ + \rho(X_\infty^k(\omega), X_\infty(\omega)) \leqslant 2^{-k+1}.\end{aligned}$$

显然, 当 $n \to \infty$ 时有 $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$, 对 $\omega \in [0,1)$ 可能除去可数个形如 $\Delta^{(\infty)}_{i_1,\cdots,i_k}$ 区间的端点集. 这时, 由于第一章引理 6 有 $X_\infty \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(S)$.

只剩下验证, 对 $n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 有 $\mathrm{Law}(X_n) = \mathsf{Q}_n$. 根据构造, 对所有的 n, m, $i_1, \cdots, i_m$ 和 $k \geqslant m$, 有

$$\mathsf{P}(X_n^k \in S_{i_1,\cdots,i_m}) = |\Delta^{(n)}_{i_1,\cdots,i_m}| = \mathsf{Q}_n(S_{i_1,\cdots,i_m}) \tag{36}$$

S 中的任意开集 G 可以表示成有限或可数个, 不同 k 和 $i_1, \cdots, i_k$ 的集合 $S_{i_1,\cdots,i_k}$ 的并. 事实上, (可数的) 集合 $S_{i_1,\cdots,i_k}(k, i_1, \cdots, i_k \in \mathbb{N})$ 的全体构成了 Polish 空间 (S, ρ) 的拓扑基. 这立刻由 [35; 第二章, §5 定理 3] 得出, 因为以任意点 $x \in \mathsf{S}$ 为中心, 任意长度为半径的球中, 都可以找到基中的集合, 它包含 x 且完全在给出的球中.

当 $N \to \infty$ 时取集合 $G_N \uparrow G$, 这里 G_N 是由有限个 m_N 互不相交基中的集合所组成. 这时, 对每个 N 有 $\mathsf{P}(X_n^k \in G) \geqslant \mathsf{P}(X_n^k \in G_N)$ 考虑到 (36) 式, 有

$$\liminf_{k\to\infty} \mathsf{P}(X_n^k \in G) \geqslant \liminf_{k\to\infty} \mathsf{P}(X_n^k \in G_N) = \mathsf{Q}_n(G_N).$$

这样, $\liminf_{k\to\infty} \mathsf{P}(X_n^k \in G) \geqslant \mathsf{Q}_n(G)$. 根据定理 1 的 2°, 得出, 对 $n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 当 $k \to \infty$ 时有 $\mathrm{Law}(X_n^k) \Rightarrow \mathsf{Q}_n$. 但是, 对所有的 n, 已证当 $k \to \infty$ 时 a.s. 有 $X_n^k \to X_n$, 所以当 $k \to \infty$ 时 $(n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\})$ 有 $\mathrm{Law}(X_n^k) \Rightarrow \mathrm{Law}(X_n)$. 引理 1 给出 $\mathrm{Law}(X_n) = \mathsf{Q}_n, n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$. □

§11. 关于弱收敛的距离化问题.

$\mathscr{G}_C$ 是等度连续函数类, 且 $f : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$, 具有 $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathsf{S}}|f(x)| \leqslant C$.

引理 5. 如果 (S, ρ) 是 Polish 空间, 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上, $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$, 则对任意的常数 $C > 0$, 有

$$\sup\{|\langle f, \mathsf{Q}_n\rangle - \langle f, \mathsf{Q}\rangle| : f \in \mathscr{G}_C\} \to 0, \quad n \to \infty \tag{37}$$

证. 如 Skorokhod 定理中所述 (用 Q 和 X 来代替那里的 Q_∞ 和 X_∞), 在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上取随机元 $X, X_n, n \in \mathbb{N}$. 与公式 (I.23) 相应的, 要求验证

$$\sup\{|\mathsf{E}f(X_n) - \mathsf{E}f(X)| : f \in \mathscr{G}_C\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

由于等度连续性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ 对所有的 $f \in \mathscr{G}_C$, 和 x, y, 那样 $\rho(x, y) \leqslant \delta$. 这时, 显然有

$$\begin{aligned}|\mathsf{E}f(X_n) - \mathsf{E}f(X)| &\leqslant \mathsf{E}|f(X_n) - f(X)|\mathbf{1}_{\{\rho(X_n,X)\leqslant\delta\}} + \mathsf{E}|f(X_n) - f(X)|\mathbf{1}_{\{\rho(X_n,X)>\delta\}} \\ &\leqslant \varepsilon + 2C\mathsf{P}(\rho(X_n, X) > \delta).\end{aligned}$$

注意, ρ 是连续函数, 而 $\rho(X_n, X)$ 由于 S 的可分性, 是实随机变量. 既然, a.s. $X_n \to X$, 则 a.s. $\rho(X_n, X) \to 0$. 即有依概率收敛. 因此, 对任意的 $\delta > 0$, 有

$$\mathsf{P}(\omega : \rho(X_n(\omega), X(\omega)) > \delta) \to 0, \quad 当\ n \to \infty.$$

引理证毕. □

以后总是设 (S,ρ) 是 Polish 空间. 对 $B\subset\mathsf{S}$ 和 $\varepsilon>0$, 设 $B^\varepsilon=\{x\in\mathsf{S}:\rho(x,B)<\varepsilon\}$, 这里 $\rho(x,B)=\inf\{\rho(x,y),y\in B\}$.

定义 6. 被称作 Levy – Skorokhod 距离的是量

$$\pi(\mathsf{P},\mathsf{Q})=\inf\{\varepsilon>0:\mathsf{P}(B)\leqslant\mathsf{Q}(B^\varepsilon)+\varepsilon,\mathsf{Q}(B)\leqslant\mathsf{P}(B^\varepsilon)+\varepsilon\text{ 对 }B\in\mathscr{B}(\mathsf{S})\}.\qquad(38)$$

作为习题, 不难验证 $\pi(\cdot,\cdot)$ 满足距离的所有性质.

定理 12. 收敛性 $\mathsf{Q}_n\Rightarrow\mathsf{Q}(n\to\infty)$ 等价于 $\pi(\mathsf{Q}_n,\mathsf{Q})\to0(n\to\infty)$.

证. 设 $\pi(\mathsf{Q}_n,\mathsf{Q})\to0(n\to\infty)$. 这时, 由于 (38) 式, 对任意的 $\varepsilon>0$ 和闭集 $F\subset\mathsf{S}$ 有 $\mathsf{Q}_n(F)\leqslant\mathsf{Q}(F^\varepsilon)+\varepsilon$ 对所有的 $n\geqslant n(\varepsilon)$. 因此, 对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $\limsup\limits_{n\to\infty}\mathsf{Q}_n(F)\leqslant\mathsf{Q}(F^\varepsilon)+\varepsilon$. 让 $\varepsilon\to0$ 和利用定理 1 的 1° 可得.

设 $\mathsf{Q}_n\Rightarrow\mathsf{Q}$. 在定理 1 的证明中引入的函数 $f_\varepsilon^F(\cdot)$ 族 (这里 $\varepsilon>0$ 和 F 是 S 中的闭集), 它们具有 $0\leqslant f_\varepsilon^F(\cdot)\leqslant1$ 和对所有的 $x,y\in\mathsf{S}$ 有 $|f_\varepsilon^F(x)-f_\varepsilon^F(y)|\leqslant\varepsilon^{-1}\rho(x,y)$. 因此, 对每个 $\varepsilon>0$, 类 $\mathscr{U}_\varepsilon=\{f_\varepsilon^F(\cdot):\mathsf{S}\text{ 中闭集 }F\}\subset\mathscr{G}_1$, 这里类 $\mathscr{G}_C$ 是在引理 5 中所述的. 由 (37) 式得出, 对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\Delta_n^{(\varepsilon)}=\sup\{|\langle f,\mathsf{Q}_n\rangle-\langle f,\mathsf{Q}\rangle|:f\in\mathscr{U}_\varepsilon\}\to0,\quad n\to\infty.\qquad(39)$$

如果集合 F 是闭的和 $\varepsilon>0$, 则考虑到 $\mathbf{1}_F(\cdot)\leqslant f_\varepsilon^F(\cdot)\leqslant\mathbf{1}_{F^\varepsilon}(\cdot)$ 和 $\Delta_n^{(\varepsilon)}$ 的定义得到

$$\mathsf{Q}(F^\varepsilon)\geqslant\langle f_\varepsilon^F,\mathsf{Q}\rangle\geqslant\langle f_\varepsilon^F,\mathsf{Q}_n\rangle-\Delta_n^{(\varepsilon)}\geqslant\langle\mathbf{1}_F,\mathsf{Q}_n\rangle-\Delta_n^{(\varepsilon)}=\mathsf{Q}_n(F)-\Delta_n^{(\varepsilon)}.\qquad(40)$$

注意, 当 $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ 时有 $\Delta_n^{(\varepsilon)}\leqslant\varepsilon$. 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 中集合 B 的闭包 $[B]$, 由于 (40) 式, 对足够大的 n 有

$$\mathsf{Q}_n(B)\leqslant\mathsf{Q}_n([B])\leqslant\mathsf{Q}([B]^\varepsilon)+\varepsilon.$$

如果改变 Q 和 Q_n 的位置, 同样类似的估计可以得到. 因为, 对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $[B]^\varepsilon\subset B^{2\varepsilon}$, 这就有不等式 $\pi(\mathsf{Q}_n,\mathsf{Q})\leqslant2\varepsilon$ 对所有足够大的 n. 这样, 有 $\pi(\mathsf{Q}_n,\mathsf{Q})\to0(n\to\infty)$. □

补充与习题

1. 试证, 定义在距离空间 (S,ρ), Borel $\sigma-$ 代数上的测度 δ_{x_n} 有弱极限当且仅当存在那样的元素 $x\in\mathsf{S}$ 使得当 $n\to\infty$ 时有 $x_n\xrightarrow{\rho}x$ (这时, 当 $n\to\infty$ 时有 $\delta_{x_n}\Rightarrow\delta_x$).

2. 试证, 定义在距离空间 (S,ρ), Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上测度 Q_n,Q 当且仅当对所有的实有界 Lipschitz 函数满足性质 (1), 即那样的函数 $f:\mathsf{S}\to\mathbb{R}$ 使得

$$\|f\|_\infty=\sup_x|f(x)|<\infty\quad\text{和}\quad L(f)=\sup_{x\neq y}\{|f(x)-f(y)|/\rho(x,y)\}<\infty,\qquad(41)$$

时, 有 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$. 当 $n \to \infty$.

由 Skorokhod 定理很容易得出 (考虑关于 a.s. 收敛的情况) 如果 $\mathsf{S} = \mathbb{R}, X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ 和 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 一致可积, 则 $\mathsf{E}X_n \to \mathsf{E}X$. 这结果对下面习题有用.

3. 设函数 $f: \mathsf{S} \to \mathsf{V}$, 这里 S, V 是距离空间 (f 的可测性不作要求) 试验证, 集合 $D_f = \{x:$ 函数 f 在 x 点处间断 $\} \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$. 试证, $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$ 当且仅当对任意的有界函数 $f \in \mathscr{B}(\mathsf{S})|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 且 $\mathsf{Q}(D_f) = 0$ 的满足性质 (1).

4. 设 S 是具有欧氏距离的 $\mathbb{R}^m$ 空间. 如果对所有的函数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, 即具有紧支撑无穷可微的函数, 满足性质 (1) 是否有 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$?

引理 6 (Ulam). 设 (S, ρ) 是 Polish 空间, Q 是在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的测度. 这时, 对每个 $B \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$ 和任意的 $\varepsilon > 0$ 存在紧集 $K_\varepsilon \subset B$ 使得 $Q(B \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$.

证. 对 $n \in \mathbb{N}$, 由于可分性有 $\mathsf{S} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_{1/n}(y_{n,m})$, 这里 $B_\varepsilon(y) = \{x \in \mathsf{S}, \rho(x,y) < \varepsilon\}$, 而点 $y_{n,m}, m = 1, 2, \cdots$, 构成 $1/n-$ 网 (即对任意的 $y \in \mathsf{S}$ 可以找到点 $y_{n,m}$, 使得 $\rho(y, y_{n,m}) < 1/n$). 对固定的 $\varepsilon > 0$ 选取 j_n 使得 $\mathsf{Q}\left(\bigcup\limits_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})\right) > 1 - \varepsilon 2^{-n-1}$. 设 $R_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})$. 这时, 集合 R_ε 的闭包 $[R_\varepsilon]$ 有

$$\mathsf{Q}(\mathsf{S}\backslash[R_\varepsilon]) \leqslant \mathsf{Q}(\mathsf{S}\backslash R_\varepsilon) = \mathsf{Q}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=1}^{j_n} B_{1/n}(y_{n,m})}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n-1} = \varepsilon/2.$$

集合 $[R_\varepsilon]$ 是紧集, 因为在完全空间它是闭的和完全有界的 (即, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\varepsilon-$ 网); 例如, $2/n-$ 网可以是点 $y_{n,m}, m = 1, \cdots, j_n$. 根据第一章引理 4 存在闭集 $F_\varepsilon \subset B$, 使得 $\mathsf{Q}(B \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon/2$. 这时 $K_\varepsilon = F_\varepsilon \bigcap [R_\varepsilon]$ 是紧集, 因为是闭集与紧集的交集, 且 $\mathsf{Q}(B \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$. □

注意, 对 $\mathsf{S} = \mathbb{R}^q$ 来说, 在引理 6 的证明中, $[R_\varepsilon]$ 处可以取足够大半径的闭球, 但是在无穷维赋泛空间中闭球不见得是紧的.

弱收敛的定义 (1) 可以改变成对任意有限测度 (不见得是概率). 与此有关的是习题.

5. 设 $\mathsf{Q}, \mathsf{Q}_n (n \geqslant 1)$ 是在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上的有限测度. 试证, 如果在定理 1 中补充条件, 当 $n \to \infty$ 时 $\mathsf{Q}_n(\mathsf{S}) \to \mathsf{Q}(\mathsf{S})$, 则定理 1 依然成立.

定义 7. 在可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{A})$ 中, 集合类 $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$ 称作测度的决定类, 如果任意两个测度在 $\mathscr{A}$ 上相等, 则在 $\mathscr{G}$ 上一定相等. 设 S 是距离空间. 集合类 $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}(\mathsf{S})$ 称作 (弱) 收敛的决定类, 如果对任意的测度序列 $\mathsf{Q}, \mathsf{Q}_1, \mathsf{Q}_2, \cdots$ 且对所有具有 $\mathsf{Q}(\partial B) = 0$ 的集合 $B \in \mathscr{M}$, 有 $\mathsf{Q}(B) \to \mathsf{Q}(B)$, 则 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$.

6. 试验证, (弱) 收敛的决定类是测度的决定类. 试解释为什么相反的结论不

成立.

7. (与例 1 和习题 6 比较). 试证, 在 Polish 空间 $\mathbb{R}^\infty$ 中赋予距离

$$\rho((x_1,x_2,\cdots),(y_1,y_2,\cdots))=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|},$$

Borel $\sigma-$ 代数与柱集 $\sigma-$ 代数相重合, 而 $\mathsf{Q}_n\Rightarrow\mathsf{Q}(n\to\infty)$ 当且仅当所有有限维分布弱收敛. 换句话说, 在 $\mathbb{R}^\infty$ 中的柱集类同时是收敛的决定类也是测度的决定类.

例 2 (证明公式 (IV.19)). 根据中心极限定理 $S_n/\sqrt{n}\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi\sim\mathsf{N}(0,1),n\to\infty$, 从而, 根据定理 2 有 $|S_n|/\sqrt{n}\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$. 除此之外, 因为 $\gamma=2$ 满足条件 (III.53), 序列 $\{|S_n|/\sqrt{n}\}_{n\geqslant 1}$ 是一致可积的. 因此, $\mathsf{E}|S_n|/\sqrt{n}\to\mathsf{E}|\xi|=\sqrt{2/\pi},n\to\infty$.

对 $\mathbb{R}^m$ 中随机向量 ξ, 设 F_ξ 和 φ_ξ 分别是它的分布函数和特征函数 (参见, 第一章 §14). 在概率教程中证明了

定理 13 (参见, 例如, [85; 第 1 卷, p.414]). 对在 $\mathbb{R}^m$ 中的随机向量 $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$ 等价于下面的条件之一:

1. 在函数 F_ξ 的每一连续点 $x\in\mathbb{R}^m$ 上 $F_{\xi_n}(x)\to F_\xi(x),n\to\infty$;

2. 对每个 $\lambda\in\mathbb{R}^m$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\varphi_{\xi_n}(\lambda)\to\varphi_\xi(\lambda)$. 除此之外, 如果对在 $\mathbb{R}^m$ 中随机向量 ξ_n 有收敛 $\varphi_{\xi_n}(\lambda)\to\varphi_\xi(\lambda)$ 对所有的 $\lambda\in\mathbb{R}^m$. 这里, 函数 φ 在 $0\in\mathbb{R}^m$ 点上连续, 则对某个随机向量 $\xi,n\to\infty$ 有 $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$, 且 $\varphi(\cdot)=\varphi_\xi(\cdot)$.

8 (Cramer–Wold 方法). 试证, 在 $(\mathbb{R}^m,\mathscr{B}(\mathbb{R}^m))$ 中 $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$, 当且仅当对每个非随机向量 $a\in\mathbb{R}^m$, 有 $(a,\xi_n)\xrightarrow{\mathscr{D}}(a,\xi)$, 这里 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的数量积.

这个习题告诉我们, 研究在 $\mathbb{R}^m$ 中随机向量的弱收敛如何转化为研究随机变量的弱收敛.

与定理 13 有关, 将在 $(\mathbb{R}^m,\mathscr{B}(\mathbb{R}^m))$ 上测度的特征函数概念自然推广到更一般的空间上. 设 S 是实可分巴拿赫 (Banach) 空间, S^* 是共轭空间 (即 S 上线性连续泛函空间), 和 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 是 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的概率测度组成的空间.

定义 8. 被称作测度 $\mathsf{Q}\in\mathscr{P}(\mathsf{S})$ (或者随机元 $X:\Omega\to\mathsf{S},X\in\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathsf{S})$, 且 $\mathrm{Law}(X)=\mathsf{Q}$) 的特征泛函是映射 $\varphi_{\mathsf{Q}}:\mathsf{S}^*\to\mathbb{C}$, 如下的公式给出:

$$\varphi_{\mathsf{Q}}(x^*)=\mathsf{E}\exp\{i\langle X,x^*\rangle\},\quad x^*\in\mathsf{S}^*,$$

这里 $\langle y,x^*\rangle$ 表示线性泛函 x^* 作用于元素 $y\in\mathsf{S}$ 的结果.

设 $\mathscr{C}$ 是 S 中所有柱集的全体, 即集合形如

$$\{x\in\mathsf{S}:(\langle x,z_1^*\rangle,\cdots,\langle x,z_n^*\rangle)\in B\}$$

这里 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), z_1^*, \cdots, z_n^* \in \mathsf{S}^*$.

9 (与定理 13 比较). 试验证, 由 $\mathscr{C}$ 可以产生 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$. 试证, 如果在 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 中 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$, 则逐点有 $\varphi_{\mathsf{Q}_n} \to \varphi_{\mathsf{Q}}$. 相反的, 设逐点有 $\varphi_{\mathsf{Q}_n} \to \varphi$, 这里 $\varphi: \mathsf{S}^* \to \mathbb{C}$ 和族 $\{\mathsf{Q}_n, n \geqslant 1\}$ 是胎紧的. 这时, 对某个 $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{S})$ 有 $\varphi = \varphi_{\mathsf{Q}}$ 且有 $\mathsf{Q}_n \Rightarrow \mathsf{Q}$.

10. 对具有中值为 0, 方差为 1 的独立同分布随机变量序列的情况, 借助于第三章定理 13 试证不变原理 (定理 8).

关于独立随机变量和的弱收敛结果序列的情况有下面结果.

定理 14 (Doob). 设对每个 t 取值于 $\mathbb{R}^m$ 的过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 具有独立增量. 如果 a.s. 过程的轨道连续, 则过程 $Y = \{Y_t = X_t - X_0, t \geqslant 0\}$ 是 Gauss 的. 这时, 对 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, 有

$$\mathsf{E}(X_t - X_s) = M_t - M_s, \quad \mathsf{D}(X_t - X_s) = G_t - G_s, \tag{42}$$

这里, $M: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ 和 $G: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m^2}$ 是连续函数.

如果在这定理条件中, X_0 是有退化的分布, 则过程本身是 Gauss 的. 如果过程 X 在区间 $[a,b]$ 满足定理 14 的条件, 则该结论对过程 $\{Y_t = X_t - X_a, t \in [a,b]\}$ 成立.(只要引入过程 $\widetilde{X} = X_{t+a}$ 对 $t \in [0, b-a]$ 和 $\widetilde{X}_t = X_b$ 对 $t \geqslant b$.) 证明定理 14 的技巧是够复杂的, 一系列辅助性的结论, 具有独立的意义, 将放到附录 3 中.

试验证, 应用不变原理 (定理 8) 可以找到泛函 $\sup\limits_{t \in [0,1]} W(t)$ 的分布. 根据公式 (III.34), 这个分布与随机变量 $|W(1)|$ 的分布相重合. 对该性质的另外一种证明是根据随机变量序列 $X_{n,i} = X_i/\sqrt{n}, i = 1, \cdots, n$, 构造随机折线 $S_n(\cdot)$, 这里 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 且 $\mathsf{P}(X_1 = -1) = \mathsf{P}(X_1 = 1) = 1/2$.

11 (与第三章推论 1 比较). 试证对任意非负整数 j, 有

$$\mathsf{P}\left(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant j\right) = 2\mathsf{P}(S_n > j) + \mathsf{P}(S_n = j), \tag{43}$$

这里 $S_0 = 0, S_k = X_1 + \cdots + X_k, k \geqslant 1$, 而 $X_1, X_2, \cdots$ 是如前所述的随机变量. 注意, 对每个 $z > 0$ 有

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} S_n(t) \geqslant z\right) = \mathsf{P}\left(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k/\sqrt{n} \geqslant z\right) = \mathsf{P}\left(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant j_n\right),$$

这里, j_n 是大于或等于 $z\sqrt{n}$ 的最小整数, 即 $j_n = -[-z\sqrt{n}]$, 这里 $[\cdot]$ 是数的整数部分. 利用中心极限定理, 考虑到标准化和的分布函数一致收敛到标准正态分布函数, 得到对任意的 $z > 0$, 有

$$\mathsf{P}(S_n > j_n) = \mathsf{P}(S_n/\sqrt{n} > j_n/\sqrt{n}) \to \mathsf{P}(\xi > z), \tag{44}$$

这里, $\xi \sim \mathsf{N}(0,1)$.

一般情况下, 分布函数的一致收敛常用的性质可表述如下.

12. 设 $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \xi$, 这里 $\xi, \xi_n, n \geqslant 1$, 实随机变量, 且分布函数 $F_\xi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 这时,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{\xi_n}(x) - F_\xi(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

为了由关系式 (43) 和 (44), 得到 (III.34) 的结果, 该结果是关于 Brown 运动在区间 $[0,1]$ 上极大值分布的, 还需要完成一个简单的习题:

13. 试证, 在习题 11 前面所引入的两值随机变量 $X_i, i \in \mathbb{N}$ 和它们的和 $S_k = X_1 + \cdots + X_k, k \geqslant 1$, 有

$$\max_j \mathsf{P}(S_n = j) \to 0, \quad n \to \infty.$$

现在, 转向比 (III.34) 更一般的结果, 求出随机变量 $m = \inf\limits_{t\in[0,1]} W(t), M = \sup\limits_{t\in[0,1]} W(t)$ 和 $W(1)$ 的联合分布.

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量, 且 $\mathsf{P}(X_1 = -1) = \mathsf{P}(X_1 = 1) = 1/2, S_0 = 0, S_k = X_1 + \cdots + X_k, k \geqslant 1$. 设 $m_n = \min\limits_{0\leqslant k\leqslant n} S_k, M_n = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} S_k$.

引入连续映射 $h : C([0,1]) \to \mathbb{R}^3$,

$$h(x(\cdot)) = \left(\inf_{t\in[0,1]} x(t), \sup_{t\in[0,1]} x(t), x(1)\right).$$

由于定理 2 和 8 有

$$h(S_n(\cdot)) = (m_n/\sqrt{n}, M_n/\sqrt{n}, S_n/\sqrt{n}) \xrightarrow{\mathscr{D}} (m, M, W(1)). \tag{45}$$

这里, $S_n(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$ 是具有节点 $(k/n, S_k/\sqrt{n}), k = 0, \cdots, n$ 的随机折线. 与前面找 M 的分布更复杂些, 借助于 (45) 式的极限过渡建立起下面的结果 (参见, 例如, [2; p.113~115], [7; p.18~21]).

定理 15. 对 $a < 0 < b, a < r < s < b$ 和 $\xi \sim N(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(a < m \leqslant M < b, r < W(1) < S)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(r + 2k(b-a) < \xi < S + 2k(b-a))\\
&\quad - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(2b - S + 2k(b-a) < \xi < 2b - r + 2k(b-a)).
\end{aligned}$$

我们介绍关于具有连续轨道的随机过程分布的相对紧性和弱收敛的一些结果.

定理 16 (Prokhorov; 参见, 例如, [146; p.259]). 设 $X, X^{(n)}(n \geqslant 1)$ 是取值于空间 $C(T, \mathsf{S})$ 的随机元, 这里 T 是紧集, S 是 Polish 空间. $X^{(n)} \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ 当且仅当过程 $X^{(n)}$ 的有限维分布弱收敛于过程 $X(n \to \infty)$ 的有限维分布, 和

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \to \infty} \sup \mathsf{E}(\Delta(X^{(n)}, \delta) \wedge 1) = 0,$$

这里 $\Delta(X^{(n)}, \delta)$ 是随机函数 $X^{(n)}$ 的连续模.

现在研究空间 $C(T, \mathsf{S})$, 这里 S 是距离空间, T 是局部紧豪斯多夫 (Hausdorff) 空间, 且满足第二可数公理 (即在空间中存在可数基). $C(T, \mathsf{S})$ 中赋予在紧集上一致收敛拓扑, 引入距离

$$\rho_C(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\sup\limits_{t \in K_n} \rho(x(t), y(t))}{1 + \sup\limits_{t \in K_n} \rho(x(t), y(t))}, \tag{46}$$

这里 $x = (x(t), t \in T), y = (y(t), t \in T) \in C(T, \mathsf{S})$, 而 T 可以表示成

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad \text{其中 } K_n \text{ 是紧集, 且 } K_n \subset K_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

14. 试证, 在上述的空间 $C(T, \mathsf{S})$ 中, $X^{(n)} \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ 当且仅当在 $C(K, \mathsf{S})$ 中 $X^{(n)}_{|K} \xrightarrow{\mathscr{D}} X_{|K}$ 对任意的紧集 $K \subset T$; 这里, $Y_{|K}$ 意味着函数 $Y = \{Y_t, t \in T\}$ 压缩到函数 $Y_{1K} = \{Y_t, t \in K\}$.

这个结果, 习题 8 和定理 8 一起导致下面的结论.

15. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是 $\mathbb{R}^m$ 空间中独立同分布随机向量, 且 $\mathsf{E}\xi_1 = 0, \mathsf{E}\|\xi_1\|^2 < \infty$, 这里, $\|\cdot\|$ 是欧氏范数. 这时, 过程

$$X_t^{(n)} = n^{-1/2} \left(\sum_{k \leqslant n_t} \xi_k + (nt - [nt]) \xi_{[nt]+1} \right), \quad t \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

这里, $[\cdot]$ 是数的整数部分, 在空间 $C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ 中当 $n \to \infty$ 依分布收敛于标准 m 维 Brown 运动乘以一个常数.

16. 设 $X^{(n)}, n \geqslant 1$ 是对每个 $t \in \mathbb{R}^d$ 取值于距离空间 S, 在 $\mathbb{R}^d$ 上的连续过程. 试证, 在 $C(\mathbb{R}^d, \mathsf{S})$ 中, 这些过程的分布是胎紧的, 如果对某个常数 $\alpha, \beta > 0$, 有

$$\mathsf{E}\left(\rho(X_s^{(n)}, X_t^{(n)})\right)^{\alpha} \leqslant \|t - s\|^{\alpha + \beta}, \quad s, t \in \mathbb{R}^d.$$

这里, $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的某个范数.

如上所述, 研究在空间 $C(T, \mathsf{S})$ 上的弱收敛, 同样也可以研究在 Skorokhod 空间 $D([0,1]^q)$ 和 $D([0, \infty)^q), q \geqslant 1$ 的弱收敛. 这些空间是由定义在 $[0,1]^q$ 和 $[0, \infty)^q$ 上实值的函数, 且在每一点是从上连续, 从下 $(t \neq 0)$ 极限存在 (函数 f 在 q 维点 $t =$

$(t_1,\cdots,t_q)$ 从上极限, 意味着, 当 $s\to t$, 对所有的 $s\neq t$, 那样 $s_k\geqslant t_k, k=1,\cdots,q$, 取极限. 类似地定义从下极限). 如果该空间赋予特殊的距离, 则可以构成 Polish 空间, 其上还可以定义类似的连续模.

与连续函数空间相比较, Skorokhod 空间具有以下的优势. 在这个空间中接近不仅意味着函数在它的取值上得到 "小的修改", 而且可以在时间变量 t 上也得到 "小的修改" (例如, 函数 $f_x(t)=\mathbf{1}_{[x,\infty)}(t)$ 和 $f_y(t)=\mathbf{1}_{[y,\infty)}(t)$, 当 $x\to y$ 时, 在空间 C 上不接近, 然而在空间 D 上是接近的).

与此方面有关的问题, 可以参见 [2] 和 [26].

与上述有关的, 研究下面的*粒子随机游动模型*. 设 $Y_1^{(a)}, Y_2^{(a)},\cdots$ 是独立同分布随机变量, 且

$$\mathsf{P}(Y_1^{(a)}=-a)=\mathsf{P}(Y_1^{(a)}=a)=1/2,\quad a>0.$$

设 $\xi_1^{(\lambda)},\xi_2^{(\lambda)},\cdots$ 是具有参数为 $\lambda>0$ 的指数分布的独立随机变量, 且对所有的 a,λ 随机变量序列 $\{Y_n^{(a)}\}$ 和 $\{\xi_m^{(\lambda)}\}$ 是独立的. 假设在时刻 $\tau_k^{(\lambda)}=\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j^{(\lambda)}, k=1,2,\cdots$ 粒子的位置变换在 a 或 $-a$ (在时刻 $t=0$ 时, 粒子在 0 处). 准确地说, 在时刻 $\tau_k^{(\lambda)}$ 粒子的位置坐标等于 $\sum\limits_{j=1}^{k}Y_j^{(a)}$, 这个状态保持在区间 $[\tau_k^{(\lambda)},\tau_{k+1}^{(\lambda)})$ 上, 这样, 粒子位置在时刻 t 被描述为随机过程 $X_t^{(a,\lambda)}=\sum\limits_{j\leqslant N_\lambda(t)}Y_j^{(a)}, t\geqslant 0$, 这里, $N_\lambda(t)=\max\{k,\tau_k^{(\lambda)}\leqslant t\}$ (设 $N_\lambda(0)=0, X_0^{(a,\lambda)}=0$). 根据第二章定理 2, 过程 $N=\{N_\lambda(t),t\geqslant 0\}$ 是 Poisson 过程.

17. 研究当 $a\to 0$ 和 $\lambda\to\infty$ 时, 且 $a^2\lambda=\sigma^2>0$, 过程 $X^{(a,\lambda)}$ 的有限维分布收敛 (即参加量 a 是逐渐的减小而强度 λ 逐渐的增加). *在空间 $D([0,\infty))$ 上过程 $X^{(a,\lambda)}$ 是否弱收敛?*

注 3. 在本章中, 所述的极限定理的证明方法是基于*胎紧和有限维分布收敛*的思想. 这种方法能 "很好的实施" 只是当极限过程是相对简单的时候 (例如, 独立增量过程). 在那些极限过程是比较复杂的时候 (例如, 扩散过程, 马氏过程, 鞅, 半鞅), 更方便的是利用*鞅方法* (参见, 例如, [26]), 或者是借助于*马氏半群*工具的方法 (参见, 例如, [91]).

关于过程分布的弱收敛的 Donsker – Prokhorov 不变原理以外, 在随机过程起着重要作用的是*强不变原理*, 它是研究不是过程分布的邻近性, 而它的轨道的邻近性.

设给定取值于 $\mathbb{R}$ (或者是 $\mathbb{R}^m$, 甚至于某个 Banach 空间) 独立 (或者是某种形式 "弱相关" 的) 随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots$. 这时, 可以转化为*新的随机变量序列* $\eta_1,\eta_2,\cdots$, 一般来说, 是定义在另外的带有某个 Brown 运动 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 的概率空间上, 使得满足下面两个性质: $\mathrm{Law}(\xi_1,\xi_2,\cdots)=\mathrm{Law}(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 和当 $t\to\infty$ 时

a.s. 有

$$\sum_{k\leqslant t}\eta_k - W(t) = O(h(t)), \tag{48}$$

这里, h 是某个非随机正函数. 关系式 (48) 意味着, 对 a.s. $\omega\in\Omega$ 存在 $C(\omega)>0$, 使得对 $t>t_0(\omega, C(\omega))$, 有

$$\left|\sum_{k\leqslant t}\eta_k - W(t)\right| \leqslant C(\omega)h(t).$$

代替 (48) 式还可以研究关系式

$$\text{当 } t\to\infty \text{ 时 a.s. 有 } \sum_{k\leqslant t}\eta_k - W(t) = o(g(t)), \tag{49}$$

这意味着, 当 $t\to\infty$ 时有 $\left|\sum\limits_{k\leqslant t}\eta_k - W(t)\right| \Big/ g(t) \to 0$ a.s. $\omega\in\Omega$, 这里 g 是非随机函数.

现在介绍一个与这方面问题有关的结果.

定理 17 (斯特拉森 (Strassen), [188]). 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量, 且 $\mathsf{E}\xi_1=0$ 和 $\mathsf{E}\xi_1^2=1$. 这时, 关系式 (49) 成立, 且

$$g(t) = (t\ln\ln t)^{1/2}, \quad t>e.$$

在 [188] 中给出这个定理的证明是基于 Skorokhod 表示 (参见, (III.78)). 得到 (48) 式类型估计更有力的其他方法, 称作 "Wiener *方法*", 它在科姆咯斯 (Komlos), 马哲尔 (Major), 塔什纳迪 (Tushnady) 的 [152] 中找到.

注意, 除了利用和 $\sum\limits_{k\leqslant t}\eta_k$ 逼近 Wiener 过程, 如 ((48) 式和 (49 式)), 还有借助于构造 Gauss 随机变量序列的特别形式来逼近 [122].

由概率论教程可知, 甚至于对实随机变量来说, 在研究渐近问题时, 正确选择什么样的*收敛的形式*是非常重要的. 正如, 根据中心极限定理对独立同分布的随机变量 $X_k, k\geqslant 1$, 且具有中值为 0, 方差为 1 的, 有 $n^{-1/2}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{\mathscr{D}} X$, 当 $n\to\infty$ 时, 这里 $X\sim \mathsf{N}(0,1)$. 同时, 不难相信, *不存在*随机变量 Y, 使得 $n^{-1/2}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{\mathsf{P}} Y$. (而意味着, 所研究的标准化和的极限, 既对 a.s., 也对依概率来说是无意义的.) 与此相关的是讨论, 在可测空间 $(S,\mathscr{A})$ 上一些形式概率测度的收敛性.

这里的基本思想是: 对函数 f 保证在这些或者其他函数类上可积泛函 $\langle f, \mathsf{Q}_n\rangle$ 和 $\langle f, \mathsf{Q}\rangle$ 之间定义其接近性.

设 S 是 Polish 空间. 设 $\mathbf{B}(\mathsf{S},\mathbb{R})$ 是空间由所有有界 $\mathscr{A}|\mathscr{B}(\mathbb{R})|-$ 可测函数 $f: \mathsf{S}\to\mathbb{R}$, 且赋予范数 $\|\cdot\|_\infty$. 设 $\mathscr{P}=\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 是 $(\mathsf{S},\mathscr{A})$ 上概率测度所组成的空间. 利用

公式

$$\|\mathsf{P}-\mathsf{Q}\| = \sup\{|\langle f,\mathsf{P}\rangle - \langle f,\mathsf{Q}\rangle| : f \in \mathbf{B}(\tilde{\mathsf{S}},\mathbb{R}), \|f\|_\infty \leqslant 1\}$$

根据变差定义测度 P 和 $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{S})$ 之间的距离 $\|\cdot\|$.

18. 试验证, $\nu(\mathsf{P},\mathsf{Q}) \equiv \|\mathsf{P}-\mathsf{Q}\|$ 是在 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 上的距离, 它的距离是在 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 上一致收敛拓扑, 且定义邻域系, $U(\mathsf{Q},\delta) = \{\mathsf{P} \in \mathscr{P} : \nu(\mathsf{Q},\mathsf{P}) < \delta\}$, 这里, $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}, \delta > 0$, (关于拓扑空间可参见 [35; 第 2 章, §5]).

19. 试证, 对根据变差定义的距离有如下的公式: $\|\mathsf{P}-\mathsf{Q}\| = 2\sup_{A\in\mathscr{A}} |\mathsf{P}(A) - \mathsf{Q}(A)|$.

20. 设测度 $\mathsf{P},\mathsf{Q} \in \mathscr{P}$, 且 P 和 Q 相对于某个测度 $\lambda \in \mathscr{P}$ 是绝对连续的 (那样的 "控制" 测度是存在的, 例如只要取 $\lambda = (\mathsf{P}+\mathsf{Q})/2$). 用 $p = d\mathsf{P}/d\lambda$ 和 $q = d\mathsf{Q}/d\lambda$ 表示测度 P 和 Q 对测度 λ 的拉东 (Radon)– 尼科迪姆 (Nikodym) 导数. 试证, $\|\mathsf{P}-\mathsf{Q}\| = \|p-q\|_{L^1(\lambda)}$, 这里 $L^1(\lambda) = L^1(\mathsf{S},\mathscr{A},\lambda)$. 试验证, $\nu(\mathsf{P},\mathsf{Q}) \leqslant 2$, 且等号成立仅当 $\mathsf{P} \perp \mathsf{Q}$ (测度相互奇异, 即存在集合 $A \in \mathscr{A}$, 使得 $\mathsf{P}(A) = 1$, 而 $\mathsf{Q}(A) = 0$).

21. 试证, $(\mathscr{P}(\mathsf{S}),\nu)$ 是完全 (备) 距离空间, 如果 S 不可数, 则该空间不是可分的. 试问如果 S 是有限或可数时, 空间 $(\mathscr{P}(\mathsf{S}),\nu)$ 的可分性又是如何?

利用变差定义的距离可以给出下列的关于二项分布概率逼近的 Poisson 定理.

定理 18. 设 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 这里 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立随机变量, 且 $\mathsf{P}(X_k = 1) = p_k, \mathsf{P}(X_k = 0) = 1 - p_k, 0 < p_k < 1; k = 1,\cdots,n$. 设 Y 是具有参数 $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$ 的 Poisson 随机变量. 这时, 对任意的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 有

$$|\mathsf{P}(S_n \in B) - \mathsf{P}(Y \in B)| \leqslant \sum_{k=1}^n p_k^2.$$

这个定理的证明可以在, 例如, [192; p.39] 或 [85; 第 1 卷, p.87,479], 中找到, 并给出了准确的估计.

在附录中, 经常用到下面的定理.

定理 19 (谢费 (Scheffe); 参见, 例如, [2 : p.306]). 设 $\mathsf{Q}_n, n \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$ 是在可测空间上 $(\mathsf{S},\mathscr{A})$ 的测度, 使得, 对在 $(\mathsf{S},\mathscr{A})$ 上某个 $\sigma-$ 有限测度 λ, 有 $\mathsf{Q}_n \ll \lambda$. 设 a.s. 有 (依测度 λ) $d\mathsf{Q}_n/d\lambda \to d\mathsf{Q}_\infty/d\lambda$. 这时, 依变差 Q_n 收敛于 Q_∞.

与用变差定义的距离相关的是角谷静夫 (Kakutani)–黑林格 (Hellinger) 距离, 考虑到在习题 20 中的表示, 定义为:

$$d(\mathsf{P},\mathsf{Q}) = \left(\frac{1}{2}\int_{\mathsf{S}} (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 d\lambda\right)^{1/2}$$

22. 试验证, $d(\mathsf{P},\mathsf{Q})$ 是 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 上的距离, 它不依赖于测度 λ 的选取.

注意,

$$d^2(\mathsf{P},\mathsf{Q}) = 1 - H(1/2;\mathsf{P},\mathsf{Q}),$$

这里, 对 $\alpha \in (0,1)$, Helliger 积分由下面公式定义 $H(\alpha;\mathsf{P},\mathsf{Q}) = \langle p^\alpha q^{1-\alpha}, \mathsf{Q}\rangle$.

对利用距离 $d(\mathsf{P},\mathsf{Q})$ 和 Helliger 积分的各种各样的应用, 可参见, 例如, [85; 第 I 卷, 第 III 章, §9,10].

定理 20 (Strassen). 设 $\mathsf{P},\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{S})$, 这里 S 是 Polish 空间. 这时, 对 Levy – Prokhorov 距离有下面的等式:

$$\pi(\mathsf{P},\mathsf{Q}) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathsf{P}(F) \leqslant \mathsf{Q}(F^\varepsilon) + \varepsilon,\ 对所有闭集\ F \subset \mathsf{S}\}. \tag{50}$$

23. 研究在 Polish 空间 S 上实有界 Lipschitz 函数组成的 Banach 空间 BL, 赋予范数 $\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + L(f)$, 参见 (41) 式. 试证, 函数

$$\|\mathsf{P} - \mathsf{Q}\|^*_{BL} = \sup\{|\langle f,\mathsf{P}\rangle - \langle f,\mathsf{Q}\rangle| : f \in BL, \|f\|_{BL} \leqslant 1\}$$

是 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 上的距离, 它的收敛性等价于弱收敛. 此外, 对任意的 $\mathsf{P},\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{S})$ 有不等式

$$\|\mathsf{P} - \mathsf{Q}\|^*_{BL} \leqslant 2\pi(\mathsf{P},\mathsf{Q}), \quad h(\pi(\mathsf{P},\mathsf{Q})) \leqslant \|\mathsf{P} - \mathsf{Q}\|^*_{BL},$$

这里, $h(t) = 2t^2/(t+2), t \geqslant 0$.

定理 21 (Strassen, 参见, 例如, [27; p.59]). 设 (S,ρ) 是 Polish 空间. Levy – Prokhorov 距离 π 是对科范 (Ki Fan) χ 距离 (依概率收敛的距离化) 类的最小距离, 即

$$\pi(\mathsf{P},\mathsf{Q}) = \inf\{\chi(X,Y)\} \tag{51}$$

这里, 下确界取自所有的随机变量对 (X,Y) (每个对是给定在自己的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$) 上, 使得 $\mathrm{Law}(X) = \mathsf{P}, \mathrm{Law}(Y) = \mathsf{Q}$, 且

$$\chi(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathsf{P}(\rho(X,Y) > \varepsilon) < \varepsilon\}.$$

关系式 (51) 解释了耦合 (coupling) 方法的思想 (换句话说, 是 “联结” 的方法) 对距离 $\pi(\mathsf{P},\mathsf{Q})$ 的估计, 该距离是选取一对 (X,Y) 具有给定的边缘分布的随机元, 使得 X 和 Y 依概率在距离 ρ 下最近. 关于一般耦合 – 方法的理论及其各种各样的应用可以参见小册子 [159, 190].

在独立随机变量和的中心极限定理中采用不同的距离, 以及随机模型的稳定性描述可参见小册子 [27, 175].

值得注意的是, 从距离的角度来研究随机过程理论是非常有利的. 例如, 在一个很宽的条件下, 用这种办法在 Donsker – Prokhorov 不变原理中得到了对收敛速度的精确估计.

假设, $X_{n,i} (i = 1,\cdots,m_n; n \geqslant 1)$ 是非退化随机变量序列, 且在每一行系列中都是独立的, 有 $\mathsf{E}X_{n,i} = 0, \mathsf{E}|X_{n,i}|^s < \infty$, 对某个 $s > 2$. 将认为 $X_{n,i}$ 是标

准化的, $\sum\limits_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^2 = 1$, 这里 $\sigma_{n,i}^2 = \mathsf{D}X_{n,i}$. 设 $L_{n,s} = \sum\limits_{i=1}^{m_n}\mathsf{E}|X_{n,i}|^s$. 这个量称作李雅普诺夫 (Lyapunov) 分数 (如果没有标准化条件, 则量是 $L_{n,s} = \sum\limits_{i=1}^{m_n}\mathsf{E}|X_{n,i} - \mathsf{E}X_{n,i}|^s / \left(\sum\limits_{i=1}^{m_n}\sigma_{n,i}^2\right)^{s/2}$). 很容易看出, Lyapunov 条件当 $n\to\infty$ 时有 $L_{n,s}\to 0$, 可以导出 Lindeberg 条件 (18). 注意, Lindeberg 条件不仅是满足中心极限定理 (参见, 附录 3) 是充分的, 如果和的各项 $X_{n,i}$ 满足 (22) 式, 它也是必要的. 利用 "无穷小条件" (参见, [50, p.102]): 对每个 $\varepsilon > 0$ 有, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}\mathsf{P}(|X_{n,i}|\geqslant\varepsilon)\to 0. \tag{52}$$

没有假设 (52) 式, 关于中心极限定理的充要条件, 可以参见 [27, 85].

定理 22 (博罗夫科夫 (Borovkov)). 设序列独立中心化随机变量 $X_{n,i}, i = 1,\cdots,m_n, n\geqslant 1$, 对某个 $s\in(2,3]$, 有

$$\mathsf{E}|X_{n,i}|^s < \infty, i = 1,\cdots,m_n, n\geqslant 1.$$

同时, $\sum\limits_{i=1}^{m_n}\mathsf{D}X_{n,i} = 1, n\geqslant 1$. 这时, 在定理 8 中所述随机折线 $S_n(\cdot)$ 有如下的估计:

$$\pi(\mathbb{P}_n, \mathbb{W})\leqslant cL_{n,s} \tag{53}$$

这里 $\mathbb{P}_n$ 是随机折线 $S_n(\cdot)$ 的分布,$\mathbb{W}$ 是在 $C([0,1])$ 中的 Wiener 测度, c 是某个乘积因子, 不依赖于 n.

这个结果的详细证明以及参考文献和必要的补充知识可以在 [7] 中找到 (那里 Araka 给出了例子, 说明了估计式 (53) 式精确到选取的常数乘积因子 c). 对 $s = 3$ 在 [4] 中给出了证明.

作为这一节的结尾, 我们将涉及随机测度的问题.

设 S 是具有第二可数公理的局部紧 Hausdorff 空间, $M(\mathsf{S})$ 是在 Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上局部有限测度 $\mu = \mu(\cdot)$ 空间 (即空间是由测度所组成, 这些测度是在空间 S 中有界集上是有限的), 赋予那样的拓扑, 使得

$$\pi_f : \mu\mapsto\langle f,\mu\rangle = \int_{\mathsf{S}} f d\mu$$

对所有非负具有紧支撑的连续函数 $f\in C_K^+$, 是连续映射.

24. 试证, $M(\mathsf{S})$ 是 Polish 空间. 注意如果 $f_1, f_2,\cdots$ 是在 C_K^+ 中的稠密集, 则函数

$$\rho(\mu,\nu) = \sum_k 2^{-k}(|\langle f_k,\mu\rangle - \langle f_k,\nu\rangle|\wedge 1),\quad \mu,\nu\in M(\mathsf{S}),$$

距离化引入的拓扑. 这样, 在 $\mathscr{B}(M(\mathsf{S}))$ 上可以看作由映射 $\pi_f, f \in C_K^+$ 所产生的 (即是相对于它, 所有这些映射是可测的, 所产生的最小 $\sigma-$ 代数), 也可以看作由映射 $\pi_B : \mu \to \mu(B)$ 对 $B \in \mathsf{S}_\mu$, 其中 $\mu \in M(\mathsf{S}), \mathsf{S}_\mu = \{B \in \mathscr{M} : \mu(\partial B) = 0\}$, 而 $\mathscr{M}$ 是空间 S 中有界子集的全体所产生的.

定义 9. 设在给定的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上引入上面所述的局部有限测度空间 $M(\mathsf{S})$. $\mathscr{F}|\mathscr{B}(M(\mathsf{S}))-$ 可测映射 $\mu : \Omega \to M(\mathsf{S})$ 称作*随机测度*. (*随机*) *点过程*被定义为随机测度只是取值于子集 $N(\mathsf{S}) \subset M(\mathsf{S})$ (由相对于引入的拓扑是闭的), 它是由取值是整数的随机测度所组成.

25. 设 $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 是在具有第二可数公理的局部紧 Hausdorff 空间 S 上的随机测度. 试证, 下面三个条件是等价的:

1. 当 $n \to \infty$ 时有 $\mu_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \mu$,

2. 对所有的 $f \in C_K^+$, 有 $\langle f, \mu_n \rangle \xrightarrow{\mathscr{D}} \langle f, \mu \rangle \quad (n \to \infty)$,

3. 对 $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathsf{S}_\mu, k \in \mathbb{N}$, 有 $(\mu_n(B_1), \cdots, \mu_n(B_k)) \xrightarrow{\mathscr{D}} (\mu(B_1), \cdots, \mu(B_k))$ 这里 $\mathsf{S}_\mu = \{B \in \mathscr{M} : \mu(\partial B) = 0 \text{ a.s.}\}$.

关于测度的弱收敛和随机过程的各种各样的逼近理论可以参考如下图书或文章: [2, 65, 71, 97, 98, 105, 109, 117, 168, 172, 193].

第六章
马尔可夫过程. 离散与连续时间

内容摘要: 马尔可夫 (Markov) 过程 (马氏过程、马程) 的等价定义. 取值于 $\mathbb{R}^d$ 独立增量过程的马氏性. 例子. Markov 链 (马氏链、马链), 通过初始分布及转移概率构造 Markov 链. 作为 Markov 链的泊松 (Poisson) 过程. Markov 过程的转移函数. 寻求 $d-$维 Brown 运动的转移函数. Markov 过程的有限维分布, 它们通过初始分布及转移概率的表示. 时齐 Markov 过程 (时齐马氏过程、时齐马程, 齐次马程). 时齐 Markov 链的遍历性定理. 一些推论. 不变测度. 随机半群 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ 的无穷小矩阵 Q. 柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 向后、向前微分方程组. 作为 Q^* 矩阵的特征向量的平稳分布. 埃尔郎 (Erlang) 公式. 诱导出这些公式的群众服务系统的模型.

§1. 作为所有发展起来的 "马氏过程" 理论基础是 Markov 的卓越思想, 它是找出一类随机过程, 它随时间的演化可以描述成如下的形式: 时间 t 以后的过程的行为并不由 t 以前的所有时间所决定, 而仅仅是依赖于过程在时刻 t 的值. 这恰好与描述 "粒子" 在经典物理中的运动很相似, 时刻 t 以后行为, 只是由它现在的位置 (坐标) 和在时刻 t 的速度所决定. 如果时间是离散的 ($t=0,1,2,\cdots$), 则所述的特点就更加明显: 被研究对象状态是一步一步的改变, 组成一个序列, 这里每一步都只由前一步状态所决定. 也正因为如此才产生了马氏链的概念, 它是后来所进行各式各样推广的一个基础.

马氏性的概念有一系列的等价定义, 其中一些推广将在补充与习题中.

本章各处作为规定, 都假设 $X=\{X_t, t\in T\}$ 是定义在某个滤化的 (完全的) 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in T},\mathsf{P})$ 上 (即是扩充了概率为 0 事件类的滤基) 的随机过程, 且对每个 $t\in T\subset\mathbb{R}$ 取值于可测空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)$.

定义 1. 过程 X 相对于滤基 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 是适应的, 称作*马氏的* (关于这个滤基和测度 P), 如果对每个 $s\in T$ 和任意的事件 $C\in\mathscr{F}_{\geqslant s}=\sigma\{X_u,u\geqslant s,u\in T\}$ 几乎处处有

$$\mathsf{P}(C|\mathscr{F}_s)=\mathsf{P}(C|X_s). \tag{1}$$

注意, $\mathsf{P}(A|\mathscr{A})=\mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\mathscr{A}),\mathsf{P}(A|\eta)=\mathsf{E}(\mathbf{1}_A|\sigma\{\eta\})$, 这里 $A\in\mathscr{F},\sigma-$ 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F},\eta$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上的随机元.

如果, 对某个滤基, 该过程 X 相对于它是适应的, 满足关系式 (1), 则显然相对于*自然* $\sigma-$ 代数族 $\mathbb{F}^X=(\mathscr{F}_s^X)_{s\in T}$, 这里 $F_s^X=\sigma\{X_u,u\leqslant s,u\in T\},s\in T$, 关系式 (1) 也成立. 集合来自 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_s^X$ 和 $\mathscr{F}_{\geqslant s}$ 相应的直观含义是事件是由过程 X 的 "过去" 和 "将来" 所产生的 (相对于固定了 "现在" 时刻 s). 一般地说 "X是马氏过程", 作为规定, 就意味着是相对于自然 $\sigma-$ 代数流说的.

在阅读本章之前, 最好是熟悉一下在 [85] 中的第八章, 那里研究了具有离散时间 $(T=\mathbb{Z}_+)$ 和离散状态空间的马氏链. 并对这样的链的状态进行了分类, 因此, 在本书中将不再详细介绍这些结果. 但是熟悉这些结果, 对掌握下面的内容并不是完全必要的.

在初学第六章的时候, 应该掌握在 §2~§5 中马氏过程的各种不同定义 (不要求掌握这些定义的等价性证明). 要对 §6 中的例子给予一定的重视, 随后要特别关注 §7~§9 中的离散和连续时间马氏链的内容. 对于应用有着重要意义的是在 §13 中的遍历性定理 (为理解它, 需要知道 §12 中给出的时齐马氏链的定义), 还有它的一些简单推论 (§14). 此外, 希望关注 Kolmogorov 的向前、向后方程组 (§17), 即使是对有限状态空间 (参见 §18).

§2. 首先注意, 由独立实随机变量 X_t, 其中 $t\in T$ 所组成的任意过程 X 是马氏过程 (由 §5 中所证的定理 2 立刻可得到). 此外, 条件 (1) 使人联想起了鞅的定义, 最好弄清楚在这两个定义之间有什么共同点和区别. 下面为了构造例子, 我们还需要一些辅助性结果.

引理 1. *随机过程 X 是马氏的当且仅当对每个 $s\in T$ 和任意 $\mathscr{F}_{\geqslant s}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 有界可测函数 $F:\Omega\to\mathbb{R}$, 有*

$$\mathsf{E}(F|\mathscr{F}_s)=\mathsf{E}(F|X_s)\quad \text{a.s.}. \tag{2}$$

证. 显然, 当 $F_C=\mathbf{1}_C,C\in\mathscr{F}_{\geqslant s}$ 时, (1) 式是 (2) 式的特殊情况. 现证由 (1) 式导出 (2) 式. 利用条件数学期望的线性性*), 对 "简单函数" 形如 $F=\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i\mathbf{1}_{C_i}$, 这里 $\alpha_i\in\mathbb{R},C_i\in\mathscr{F}_{\geqslant s},i=1,\cdots,q$ 可得 (2) 式成立.

---

*) $\mathsf{E}(\alpha\xi+\beta\zeta|\mathscr{A})=\alpha\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A})+\beta\mathsf{E}(\zeta|\mathscr{A})$, a.s. 对 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$, 如果 $\mathsf{E}|\xi|<\infty,\mathsf{E}|\zeta|<\infty$.

由关系式 (I.4) 得到, 任意的有界 $\mathscr{A}-$ 可测函数 $h:\Omega\to\mathbb{R}$ (对某个常数 $H>0$ 有 $\sup\limits_{\omega\in\Omega}|h(\omega)|\leqslant H$) 是 $\mathscr{A}-$ 可测 "简单函数" $h_n=\sum\limits_{k=-2^n}^{2^n-1}r_{n,k}\mathbf{1}_{D_{n,k}}$, 的一致收敛的极限, 这里 $|r_{n,k}|\leqslant H, D_{n,k}\in\mathscr{A}, k=-2^n,\cdots,2^n-1$, 而集合 $D_{n,k}$ 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 构成 Ω 的分割. 于是有 $\sup\limits_{\omega\in\Omega}|h_n(\omega)|\leqslant H$ 和

$$\sup_{\omega\in\Omega}|h_n(\omega)-h(\omega)|\leqslant 2^{-n},\tag{3}$$

因此, 对任意的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{H}\subset\mathscr{F}$ 有

$$|\mathsf{E}(h_n|\mathscr{H})-\mathsf{E}(h|\mathscr{H})|\leqslant\mathsf{E}(|h_n-h||\mathscr{H})\leqslant 2^{-n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

设 $\mathscr{A}=F_{\geqslant s},\mathscr{H}=\mathscr{F}_s$, 然后 $\mathscr{H}=\sigma\{X_s\}$, 可以看出 (1) 式推出 (2) 式. 注意, 如果 $\zeta_n\to\zeta$ a.s. 和 $\widetilde{\zeta}_n\to\widetilde{\zeta}$ a.s., 还有 $\widetilde{\zeta}_n=\zeta_n$ a.s. $(n\in\mathbb{N})$ 则考虑到概率空间是完全的, 于是有 $\widetilde{\zeta}=\zeta$ a.s. . □

对前面引入的过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 和集合 $U\subset T$ 定义随机变量全体 $\mathscr{G}(U)$, 它们的元素是有限个, 形如 $\prod\limits_{i=1}^{m}f_{s_i}(X_{s_i})$ 函数的线性组合, 这里 $f_{s_k}:\mathsf{S}_{s_k}\to\mathbb{R}$ 是有界可测函数 (变化的是 m, 点 $s_k\in U$ 和函数 f_{s_k}), $k=1,\cdots,m$. 用 $\mathscr{G}_H(U)$ 表示随机变量 $\xi\in\mathscr{G}(U)$, 且 $|\xi|\leqslant H$ a.s. 的全体, 这里, 常数 $H>0$, 集合 $U\subset T$. 设 $\sigma_X(U)=\sigma\{X_t,t\in U\},U\subset T$.

引理 2. *设实随机变量 h 是 $\sigma_X(U)-$ 可测的 $(U\subset T)$, 且对某个常数 $H>0$, 有 $|h|\leqslant H$ a.s.. 这时, h 可以作为 $\mathscr{G}_H(U)$ 中随机变量序列的 a.s. 极限和在空间 $L^1(\Omega,F,\mathsf{P})$ 中收敛的极限.*

证. 设 $\mathscr{A}=\sigma\{X_t,t\in U\}$, 如同在引理 1 证明中所取的函数 $h_n=\sum\limits_{k=-2^n}^{2^n-1}r_{n,k}$ $\mathbf{1}_{D_{n,k}}$, 对它来说 (3) 式成立. 注意, $\mathscr{A}=\sigma\{\mathscr{L}\}$, 这里代数 $\mathscr{L}$ 是由形如 $L=\{\omega:(X_{s_1},\cdots,X_{s_m})\in C\}$ 的集合所组成, 这里

$$C=\bigcup_{j=1}^{q}(C_{1j}\times\cdots\times C_{mj}),\tag{4}$$

$s_1,\cdots,s_m\in U,C_{ij}\in\mathscr{B}_{s_i}$, 且求和的 "矩形" 是不相交的 $i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,q$, $m,q\in\mathbb{N}$.

对每个 $\varepsilon>0$ 和任意的 $D\in\mathscr{A}$, 根据第一章引理 3, 可以选取 $L_\varepsilon\in\mathscr{L}$ 使得 $\mathsf{P}(D\triangle L_\varepsilon)<\varepsilon$. 因此, 对每个 $n\geqslant 1$ 和所有的 $k=-2^n,\cdots,2^n-1$ 和任意的 $\varepsilon_n\in(0,1)$ 可以找到集合 $L_{n,k}\in\mathscr{L}$, 使得 $\mathsf{P}(D_{n,k}\triangle L_{n,k})<\varepsilon_n 2^{-n-1}$. 设 $\widetilde{h}_n=\sum\limits_{k=-2^n}^{2^n-1}r_{n,k}\mathbf{1}_{L_{n,k}}$,

这时 (所有 $|r_{n,k}|\leqslant H$) 有

$$\mathsf{E}|h_n-\widetilde{h}_n|\leqslant\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}|r_{n,k}|\mathsf{E}|\mathbf{1}_{D_{n,k}}-\mathbf{1}_{L_{n,k}}|$$
$$=\sum_{k=-2^n}^{2^n-1}|r_{n,k}|\mathsf{P}(D_{n,k}\triangle L_{n,k})\leqslant H\varepsilon_n. \tag{5}$$

转化为不交的集合 $\widehat{L}_{n,-2^n}=L_{n,2^{-n}}$,

$$\widehat{L}_{n,k}=L_{n,k}\Big\backslash\bigcup_{j=-2^n}^{k-1}L_{n,j},\ 对\ k=-2^n+1,\cdots,2^n-1.$$

设 $\widehat{h}_n=\sum\limits_{k=-2^n}^{2^n-1}r_{n,k}\mathbf{1}_{\widehat{L}_{n,k}},n\in\mathbb{N}$. 这时, 对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|\widehat{h}_n|\leqslant H$. 除此之外, $\mathsf{E}|\widehat{h}_n-\widetilde{h}_n|\leqslant 4H\varepsilon_n 2^n,n\in\mathbb{N}$. 因此, 对每个 n, 有

$$\mathsf{E}|h-\widehat{h}_n|\leqslant\mathsf{E}|h-h_n|+\mathsf{E}|h_n-\widetilde{h}_n|+\mathsf{E}|\widetilde{h}_n-\widehat{h}_n|\leqslant 2^{-n}+H_{\varepsilon_n}(1+2^{n+2}).$$

选取 ε_n 使得当 $n\to\infty$ 时有 $\varepsilon_n 2^n\to 0$. 这时, 在空间 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中当 $n\to\infty$ 时有 $\widehat{h}_n\to h$.

如果序列收敛, 则它依概率收敛, 这意味着, 存在子序列 (例如 $\{\widehat{h}_{n_k}\}$) a.s. 收敛. 注意, 对前面所引入的集合 $L\in\mathscr{L}$, 那里 C 由 (4) 式给出, 有

$$\mathbf{1}_L(\omega)=\sum_{j=1}^{q}\mathbf{1}_{C_{1j}}(X_{s_1}(\omega))\cdots\mathbf{1}_{C_{mj}}(X_{s_m}(\omega)). \tag{6}$$

这样, 量 $\widehat{h}_{n_k}$ 是对应着 a.s. 收敛子序列 $\{n_k\}$, 而极限不变. 这就是所求的. □

§3. 前面假设过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 对每个 $t\in T$ 取值于任意的可测空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)$. 现在给出对取值于 Borel 空间过程的马氏性准则.

定理 1. 设 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 是 Borel 空间族. 随机过程 X 是马氏的当且仅当对每个 $s\leqslant t(s,t\in T)$ 和任意有界 $\mathscr{B}_t-$ 可测函数 $f:\mathsf{S}_t\to\mathbb{R}$ 有

$$\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_s)=\mathsf{E}(f(X_t)|X_s). \tag{7}$$

最后的关系式等价于, 对所有 $B\in\mathscr{B}_t$ 有

$$\mathsf{P}(X_t\in B|\mathscr{F}_s)=\mathsf{P}(X_t\in B|X_s). \tag{8}$$

证. 显然由 (2) 式可以导出 (7) 式. 设满足 (7) 式. 首先验证, (2) 式对如下形式的函数 F 成立,

$$F=\prod_{i=1}^{n}f_\lambda(X_{t_i}), \tag{9}$$

这里, 取任意 $n \geqslant 1, s \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ (s 和所有的 $t_i \in T$) 和任意有界 $\mathscr{B}_{t_i}-$ 可测函数 $f_i : S_{t_i} \to \mathbb{R}(i = 1, \cdots, n)$. 对此利用数学归纳法. 设 $n \geqslant 2$ (公式 (7) 对于 $n = 1$). 根据条件数学期望和关系式 (7) 得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(F|\mathscr{F}_s) &= \mathsf{E}(\mathsf{E}(F|\mathscr{F}_{t_{n-1}})|\mathscr{F}_s) \\
&= \mathsf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathsf{E}(f_n(X_{t_n})|\mathscr{F}_{t_{n-1}})|\mathscr{F}_s) \\
&= \mathsf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathsf{E}(f_n(X_{t_n})|X_{t_{n-1}})|\mathscr{F}_s) \\
&= \mathsf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots \widetilde{f}_{n-1}(X_{t_{n-1}})|\mathscr{F}_s),
\end{aligned}$$

这里 $\widetilde{f}_{n-1}(X_{t_{n-1}}) = f_{n-1}(X_{t_{n-1}})\mathsf{E}(f_n(X_{t_n})|X_{t_{n-1}})$. 现在我们利用测度论中的一个结果: 如果 ξ 是实随机变量, 且 $\mathsf{E}|\xi| < \infty, \eta$ 是取值于 Borel 空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 的随机元, 则

$$\mathsf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta), \tag{10}$$

这里, 函数 $\varphi : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$, 是 $\mathscr{B}-$ 可测的 (请证明, 或参见, [85; 第一卷, p.219], 在那里 η 是实随机变量). 除此之外, 考虑到如果 $|\xi| \leqslant H$ 则 $|\mathsf{E}(\xi|\eta)| \leqslant H$. 注意, 这里的等式或不等式都是指以概率 1 满足.

类似的, 因为 $\sigma\{X_s\} \subset \mathscr{F}_{t_{n-1}}$ 则

$$\mathsf{E}(F|X_s) = \mathsf{E}(f_1(X_{t_1}) \cdots \widetilde{f}_{n-1}(X_{t_{n-1}})|X_s).$$

于是对 (9) 式形式的函数 F 可得关系式 (2), 进一步来说, 对它的线性组合也对.

在引理 2 中取集合 $U = [s, \infty) \bigcap T$, 即 $\sigma_X(U) = \mathscr{F}_{\geqslant s}$ 和有界函数 $h = F \in \mathscr{F}_{\geqslant s}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 得到

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|\mathsf{E}(F|\mathscr{F}_s) - \mathsf{E}(\widehat{h}_n|\mathscr{F}_s)| &\leqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}|F - \widehat{h}_n||\mathscr{F}_s) = \mathsf{E}|F - \widehat{h}_n|, \\
\mathsf{E}|\mathsf{E}(F|X_s) - \mathsf{E}(\widehat{h}_n|X_s)| &\leqslant \mathsf{E}|F - \widehat{h}_n|,
\end{aligned}$$

这里, $\widehat{h}_n \in \mathscr{G}_H(U), n \in \mathbb{N}$ 和 $|F| \leqslant H$. 因此, 存在子序列 $\{n_k\}$, 使得当 $k \to \infty$ 时有 $\mathsf{E}(\widehat{h}_{n_k}|\mathscr{F}_s) \to \mathsf{E}(F|\mathscr{F}_s)$ a.s. 和 $\mathsf{E}(\widehat{h}_{n_k}|X_s) \to \mathsf{E}(F|X_s)$ a.s. 根据已证 (对形如 (9) 式的函数 F), 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathsf{E}(\widehat{h}_n|\mathscr{F}_s) = \mathsf{E}(\widehat{h}_n|X_s)$ a.s. 从而在一般情况下 (2) 式成立.

(7) 式和 (8) 式的等价性的验证完全类似引理 1 的证明. □

注 1. 如果参数集合 $T = \mathbb{Z}_+(= \{0, 1, \cdots\})$, 则在定理 1 的条件 (7) 和 (8) 中只需取 $t = s + 1, s \in \mathbb{Z}_+$.

§4. 已证的定理 1, 对鞅和马氏过程的定义给出了一个如下面形式的比较. 下面对参数集 $T \subset \mathbb{R}$, 一般来说, 并不作离散的要求.

推论 1. 实马氏过程 (相对于某个滤基 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$) $X=\{X_t,t\in T\}$ 是鞅 $(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ 当且仅当

$$\mathsf{E}|X_t|<\infty \text{ 和 } \mathsf{E}(X_t|X_s)=X_s, \text{ 对 } s\leqslant t(s,t\in T). \tag{11}$$

证. 对 $n\geqslant 1$ 首先取函数 $f(x)=x\cdot\mathbf{1}_{\{|x|\leqslant n\}}$, 代入到关系式 (7), 然后让 $n\to\infty$ 取极限 (参见, [85; 第 2 卷, p.299]). 于是结论就自然而然成立. □

§5. 再给出一个验证过程 (取值于 Borel 空间) 相对于自然 $\sigma-$ 代数的马氏性的方便公式.

定理 2. 过程 $X=\{X_t,t\in T\}$, 对每个 $t\in T$ 取值于 Borel 空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)$ 的马氏性等价于下面性质: 对任意的 $m\geqslant 1$ 和所有的 $s_1<\cdots<s_m<s\leqslant t$ (s,t 和所有的 $s_i\in T$), 对任意有界 $\mathscr{B}_t-$ 可测函数 f 有

$$\mathsf{E}(f(X_t)|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_s)=\mathsf{E}(f(X_t)|X_s). \tag{12}$$

最后的关系式等价于对任意的集合 $B\in\mathscr{B}_t$ 有

$$\mathsf{P}(X_t\in B|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_s)=\mathsf{P}(X_t\in B|X_s). \tag{13}$$

证. 设满足性质 (7). 这时,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(f(X_t)|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_s)&=\mathsf{E}(\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_s^X)|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_s)\\&=\mathsf{E}(\mathsf{E}(f(X_t)|X_s)|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_s)=E(f(X_t)|X_s),\end{aligned}$$

即有性质 (12).

设 (12) 式成立. 随机变量 $\mathsf{E}(f(X_t)|X_s)$ 是 $\sigma\{X_s\}-$ 可测, 从而, $\mathscr{F}_s^X-$ 可测. 因此, 为了证明 (7) 式只需证, 对任意的 $A\in\mathscr{F}_s^X$, 有

$$\mathsf{E}\mathbf{1}_A\mathsf{E}(f(X_t)|X_s)=\mathsf{E}\mathbf{1}_Af(X_t). \tag{14}$$

根据 (12) 式, 对包含在代数 (它生成 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_s^X$) 中事件 A, 最后的等式成立, 其中集合 $A=\{(X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_s)\in C\}$, 这里

$$C\in\mathscr{B}_{s_1}\otimes\cdots\otimes\mathscr{B}_{s_m}\otimes\mathscr{B}_s,\quad s_1<\cdots<s_m<s,\quad m\geqslant 1.$$

该代数是个 $\pi-$ 系, 而所有满足关系式 (14) 的集合 A 全体, 显然组成 $\lambda-$ 系. 因此, 根据单调类定理 (第一章定理 1) 结论得证.

类似引理 1 的证明, 可以得到 (12) 式和 (13) 式的等价性. □

§6. 例子. 独立增量过程在取值于空间 $\mathbb{R}^d$ 的马氏过程类当中起着一种特殊作用 (形式相对简单). 独立增量保证了这些过程的马氏性.

定理 3. 设 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是取值于空间 $\mathbb{R}^d(d\geqslant 1)$ 的独立增量过程, 这时, X 是马氏过程 (相对于自然 $\sigma-$ 代数).

证. 由于是随机向量的非退化线性变换, 所以

$$\sigma\{X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_t\}=\sigma\{X_{s_1},X_{s_2}-X_{s_1},\cdots,X_t-X_{s_m}\}.$$

不难验证 (例如, 利用引理 2), 如果 ξ 和 ζ 是分别取值于 $\mathbb{R}^k$ 和 $\mathbb{R}^l$ 的独立随机向量, 而函数 $g:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ 是有界 Borel 函数 (即 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{k+l})|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测映射), 则

$$\mathsf{E}(g(\xi,\zeta)|\zeta=y)=\mathsf{E}g(\xi,y),\quad y\in\mathbb{R}^l \tag{15}$$

($\varphi(y)=\mathsf{E}(\nu|\zeta=y)$ 意味着作为 $\mathsf{E}(\nu|\zeta)$ 可以取 $\varphi(\zeta)$, 参见 (10)).

注意, 对 $0\leqslant s_1<\cdots<s_m\leqslant t\leqslant u$ (T 中的点) 和有界 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测函数 f 有

$$\mathsf{E}(f(X_u)|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_t)=\mathsf{E}\left(f\left(\xi+\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\zeta_1,\cdots,\zeta_{m+1}\right),$$

这里 $\zeta_1=X_{s_1},\zeta_2=X_{s_2}-X_{s_1},\cdots,\zeta_m=X_{s_m}-X_{s_{m-1}},\zeta_{m+1}=X_t-X_{s_m},\xi=X_u-X_t$. 因此, 对所有的 $y_1,\cdots,y_{m+1}\in\mathbb{R}^d$, 有

$$\mathsf{E}\left(f\left(\xi+\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\zeta_1=y_1,\cdots,\zeta_{m+1}=y_{m+1}\right)=\mathsf{E}f\left(\xi+\sum_{i=1}^{m+1}y_i\right)=\psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}y_i\right),$$

这里 ψ 是 (有界) Borel 函数, 很容易验证这等式对 "简单函数" 成立. 在引理 1 中, 对每个固定的 x 对 $\omega\in\Omega$ 可用 "简单函数" 一致地逼近函数 $f(\xi(\omega)+x)$. (为此, 借助于单调类定理可以验证对每个 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\mathsf{P}(\xi+x\in B)$ 是关于 x Borel 函数. 然后再利用第一章引理 5.)

这样, $\mathsf{P}-$a.s. 有

$$\mathsf{E}(f(X_u)|X_{s_1},\cdots,X_{s_m},X_t)=\psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right).$$

剩下只需注意有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(f(X_u)|X_t)&=\mathsf{E}\left(f\left(\xi+\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\\&=\mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(f\left(\xi+\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\zeta_1,\cdots,\zeta_m\right)\middle|\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\\&=\mathsf{E}\left(\psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)\middle|\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right)=\psi\left(\sum_{i=1}^{m+1}\zeta_i\right).\quad\square\end{aligned}$$

推论 2. 部分和过程 $S_n = \xi_0 + , \cdots , + \xi_n, n \geqslant 0$ (这里 $\xi_0, \xi_1, \cdots$ 是取值于 $\mathbb{R}^d$ 的独立随机向量), 在 $\mathbb{R}^d$ 中的 Poisson 过程和 Brown 运动是马氏过程.

部分和过程的自然推广将在下面的例子中给出.

例 1. 设在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定取值于 $\mathbb{R}^d$ 的独立随机向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 和与它们独立的随机向量 $X_0 : \Omega \to \mathbb{R}^m$. 假设

$$X_{n+1} = h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1}), \quad n \geqslant 0, \tag{16}$$

这里 Borel 函数 $h_n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. 这时 $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马氏过程.

为了验证这个结论, 我们利用注 1. 对任意的 $n \geqslant 0$, 有界 Borel 函数 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 和所有的 $x_0, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^m$, 由于 (15) 式有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(f(X_{n+1})|X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) \\
&\qquad = \mathsf{E}(f(h_{n+1}(X_n, \xi_{n+1}))|X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) \\
&\qquad = \mathsf{E}(f(h_{n+1}(x_n, \xi_{n+1}))) = g(x_n).
\end{aligned}$$

类似地有

$$\mathsf{E}(f(X_{n+1})|X_n = x_n) = g(X_n),$$

由此可得所求的结果. 注意, 这个例子在一定的意义下具有一般性 (参见习题 19).

更广泛的一类马氏过程是由随机微分方程的解给出 (参见第八章 §18).

§7. 研究一种非常重要的情况, 即当每个 $t \in T \subset \mathbb{R}$ 马氏过程取值于同一个集合 S, 该集合称作相空间或者状态空间 (严格地说, 对所有的 $t \in T$, 假设 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t) = (\mathsf{S}, \mathscr{B})$, 这里 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 是某个可测空间).

首先设马氏过程的相空间 S 是离散的, 即由有限个或可数个 (标有序号) 点所组成. 我们将认为点 $x_i \in \mathsf{S}$ 与它的序号 i 是等同的. 这样, i 就取遍了有限集合 $\{0, 1, \cdots, r\}$, 或是可数集合 $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$. 设 $\mathscr{B}$ 是所有 S 的子集所组成的集合. 空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 是 Polish 的, 如果引入了距离是: 若 $x \neq y$ 则 $\rho(x, y) = 1$ 和 $\rho(x, x) = 0$. 这里 $x, y \in \mathsf{S}$. 注意, 对 "离散" 情况, 任意的函数 $g : \mathsf{S} \to \mathbb{R}$ 都是 $\mathscr{B}-$ 可测的.

定义 2. 具有离散状态空间的马氏过程称作马氏链 (对离散也对连续时间的).

下面将进一步研究这种情况的马氏性.

设 $\mathscr{A}$ 表示由 Ω 上分割集合 A_j 所产生的 $\sigma-$ 代数, 这里 $j \in J, J$ 是有限或可数集 (对 $i \neq j$, $\bigcup\limits_{j \in J} A_j = \Omega, A_i \bigcap A_j = \varnothing$). 如果 ξ 是随机变量, 且 $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, 则在分割的集合 $A_j, \mathsf{P}(A_j) > 0$ 上的条件数学期望 $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A}) = \mathsf{E}(\xi|\mathscr{A})(\omega)$ 有如下形式:

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A})(\omega) = \frac{\mathsf{E}\xi \mathbf{1}_{A_j}}{\mathsf{P}(A_j)}, \quad \omega \in A_j. \tag{17}$$

如果 $\mathsf{P}(A_j)=0$, 则对每个 $\omega\in A_j$ 可以假设 $\mathsf{E}(\xi|\mathscr{A})(\omega)$ 取任意值 a_j. 在 (17) 式中取 $\xi=\mathbf{1}_B$ 得到

$$\mathsf{P}(B|\mathscr{A})(\omega)=\mathsf{P}(B\bigcap A_j)/\mathsf{P}(A_j),\quad 对\quad \omega\in A_j,\mathsf{P}(A_j)>0.$$

对所研究的过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 来说, 任意取点 $t_1,\cdots,t_n\in T$, $\sigma-$ 代数 $\sigma\{X_{t_1},\cdots,X_{t_n}\}$ 是由形如 $\{X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_n}=j_n\}$ 的事件分割空间 Ω 所产生的, 这里 $j_1,\cdots,j_n\in\mathsf{S}$.

考虑到 (13) 式可得, 过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是马氏链当且仅当对任意的 $m\geqslant 1$, 所有的点 $s_1<\cdots<s_m<s\leqslant t$ (T 中的) 和任意的 $i,j,i_1,\cdots,i_m\in\mathsf{S}$ 成立下式:

$$\mathsf{P}(X_t=j|X_{s_1}=i_1,\cdots,X_{s_m}=i_m,X_s=i)=\mathsf{P}(X_t=j|X_s=i)\tag{18}$$

(当 $\mathsf{P}(X_{s_1}=i_1,\cdots,X_{s_m}=i_m,X_s=i)\neq 0$ 时).

设 $\mathsf{S}_s=\{i\in\mathsf{S}:\mathsf{P}(X_s=i)\neq 0\},s\in T$.

定义 3. 被称作马氏链的转移概率的是函数

$$p_{ij}(s,t)=\mathsf{P}(X_t=j|X_s=i),\tag{19}$$

这里, $s\leqslant t(s,t\in T),i\in\mathsf{S}_s,j\in\mathsf{S}_t$.

由定义很容易得到, 函数 $p_{ij}(s,t)$ 满足条件:

1) 对任意的 $i\in\mathsf{S}_s,j\in\mathsf{S}_t$ 和 $s\leqslant t,s,t\in T$; 有 $p_{ij}(s,t)\geqslant 0$.

2) 对任意的 $i\in\mathsf{S}_s$ 和 $s\leqslant t,s,t\in T$; 有 $\sum\limits_{j\in\mathsf{S}_t}p_{ij}(s,t)=1$.

3) 对任意的 $i\in\mathsf{S}_s,j\in\mathsf{S}_t$ 和 $s\in T$; 有 $p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}$, 这里 δ_{ij} 是克罗内克 (Kronecker) 函数.

4) 对任意的 $i\in\mathsf{S}_s,j\in\mathsf{S}_t$ 和所有的 $s\leqslant u\leqslant t$ $(s,u,t\in T)$; 有

$$p_{ij}(s,t)=\sum_{k\in\mathsf{S}_u}p_{ik}(s,u)p_{kj}(u,t).\tag{20}$$

事实上, 条件 1)~3) 是显然的. 验证 4), 有时称其为马尔可夫 (Markov) 方程,

(考虑到 (18) 式) 可以由下面形式导出:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s,t) &= \mathsf{P}(X_t=j|X_s=i)=\frac{\mathsf{P}(X_t=j,X_s=i)}{\mathsf{P}(X_s=i)}\\
&=\sum_k \frac{\mathsf{P}(X_t=j,X_u=k,X_s=i)}{\mathsf{P}(X_s=i)}\\
&=\sum_{k:\mathsf{P}(X_u=k,X_s=i)\neq 0} \mathsf{P}(X_t=j|X_u=k,X_s=i)\frac{\mathsf{P}(X_u=k,X_s=i)}{\mathsf{P}(X_s=i)}\\
&=\sum_{k\in\mathsf{S}_u}\mathsf{P}(X_t=j|X_u=k)\cdot\mathsf{P}(X_u=k|X_s=i)\\
&=\sum_{k\in\mathsf{S}_u} p_{ik}(s,u)p_{kj}(u,t).
\end{aligned}\tag{21}$$

注 2. 从定义在所有的 $s\leqslant t(s,t\in T), i\in \mathsf{S}_s, j\in\mathsf{S}_t$ 的函数 $p_{ij}(s,t)$ 出发, 可以进行延拓到 $s\leqslant t(s,t\in T)$, 和对所有的 $i,j\in\mathsf{S}$. 为此, 只需要假设对所有的 $i\in\mathsf{S}_s, j\in\mathsf{S}_t$ 有 $p_{ij}(s,t)=0$, 而对所有的 $i\notin\mathsf{S}_s, j\in\mathsf{S}$ 有 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(s,t)$, 这里, $i_0=i_0(s)\in\mathsf{S}_s$, 而 i_0 的选取是任意的 (只要 $\mathsf{S}_s\neq\varnothing$). 这时, 很容易验证对延拓后的转移函数也满足转移函数的 1)~4) 性质. 正因为如此, 作为规定, 假设那样的延拓已经实现, 且对所有的 $t\in T$, 有 $\mathsf{S}_t=\mathsf{S}$.

定义 4. *称作马氏链 $X=\{X_t,t\in T\}$ 的初始分布* (这里 $0\in T=[0,\infty)$) *是测度 $\mu=\mathrm{Law}(X_0)$.*

显然, 对任意的 $B\subset\mathsf{S}$, 有 $\mathsf{P}(X_0\in B)=\sum\limits_{i\in B}p_i(0)$, 这里

$$p_i(0)=\mathsf{P}(x_0=i),\quad i\in\mathsf{S}.\tag{22}$$

§8. 马氏链有限维分布的性质.

定理 4. *马氏链 $X=\{X_t,t\in T\}$, 这里 $0\in T\subset[0,\infty)$, 的有限维分布被它的转移函数 $p_{ij}(s,t)$ 和初始分布 μ, 即 $\{p_i(0)\}(s,t\in T,s\leqslant t,i,j\in\mathsf{S})$ 所唯一确定.*

证. 对 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k(t_k\in T,k=1,\cdots,n),n\geqslant 2$ 和任意的 $j_1,\cdots,j_n\in\mathsf{S}$, 设 $A=\{X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=j_{n-1}\}$, 有

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_n}=j_n)&=\mathsf{P}(X_{t_n}=j_n|A)\mathsf{P}(A)\\
&=\mathsf{P}(X_{t_n}=j_n|X_{t_{n-1}}=j_{n-1})\mathsf{P}(A)\\
&=\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=j_{n-1})\cdot p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1},t_n).
\end{aligned}$$

上式基于条件概率的定义和公式 (18) 以及假设 $\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=j_{n-1})\neq 0$. 但是, 对 $\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=j_{n-1})=0$ 也对 (根据注 2, 函数 $p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1},t_n)$ 总是可确定的).

这样, 就可以一步一步地推到公式

$$\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_n}=j_n)=\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1)\cdot p_{j_1,j_2}(t_1,t_2)\cdots p_{j_{n-1},j_n}(t_{n-1},t_n), \quad (23)$$

它具有非常明确的直观意义. 就是说, 在时刻 t_1 某个 "系统" 从状态 j_1 开始自身的运动, 在由时刻 t_1 到时刻 t_2 里 "系统" 转到状态 $j_2,\cdots\cdots$, 在由时刻 t_{n-1} 到时刻 t_n 里 "系统" 完成由状态 j_{n-1} 转到状态 j_n. 这时, 公式 (23) 意味着, 为了计算 "路程" $\{X_{t_1}=j_1,\cdots,X_{t_n}=j_n\}$ 的概率, 需要以如下方式进行 (最自然的是, "系统" 满足 "无后效性" 准则): 取初始状态的概率 $\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1)$ 并乘以, 相应的由时刻 t_{k-1} 到时刻 t_k, 这里 $k=2,\cdots,n$, "系统" $(j_{k-1}\to j_k)$ 状态的转移 (条件的) 概率.

根据全概率公式, 有

$$\mathsf{P}(X_{t_1}=j_1)=\sum_i p_i(0)p_{ij_1}(0,t_1),$$

由于 (23) 式, 对任意的 $B\subset \mathsf{S}^n$, 可以找到该有限维分布有如下形式:

$$\mathsf{P}((X_{t_1},\cdots,X_{t_n})\in B)=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in B}\sum_i p_i(0)p_{ij_1}(0,t_1)\cdots p_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n). \quad \square \quad (24)$$

相反的结论也成立.

定理 5. *设 $0\in T\subset[0,\infty)$, 某个非空集合 $\mathsf{S}_s\subset\mathsf{S}, s\in T$ 这里 S 是有限或可数的. 且设给定一组 $p_i(0)>0, i\in\mathsf{S}_0$ 使得 $\sum_{i\in\mathsf{S}_0}p_i(0)=1$, 和函数 $p_{ij}(s,t), s\leqslant t(s,t\in T), i\in\mathsf{S}_s, j\in\mathsf{S}_t$, 对它来说满足在 §7 中的条件 1)~4). 这时, 在某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上存在对每个 $t\in T$ 以 S_t 为状态空间 (即对任意的 $t\in T$ 和所有的 $\omega\in\Omega$ 有 $X_t(\omega)\in\mathsf{S}_t$) 的马氏链 $X=\{X_t,t\in T\}$, 使得关系式 (22) 和 (19) 成立.*

证. 如果具有给定特征 (22) 式和 (19) 式的马氏过程 X 存在, 则它的有限维分布应该由 (24) 式所确定. 因此, 借助于等式 (24) 右边部分, 引入在 $\mathscr{B}^n$ 上的是个测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ (对 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n, n\in\mathbb{N}$), 且要验证它们的相容性. 这样在 $\mathscr{B}^n$ 上产生的概率测度, 是基于在定理中对 $p_i(0)$ 和 $p_{ij}(s,t)$ 的条件 (因为由非负数组成的级数求和不依赖于次序, 从而有可数可加性). 至于测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 的相容性是由于第一章注 3, 只需要验证满足第一章 §11 条件 3°. 这是成立的, 由于函数 $p_{ij}(s,t)$ 满足条件 2),3),4); 不仅当点 $t_1,\cdots,t_n$ 彼此之间是不同时, 条件 3) 保证相容性. 因此, 根据 Kolmogorov 定理存在具有给定的有限维分布 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(0\leqslant t_1<\cdots<t_n, n\in\mathbb{N})$ 的随机过程 $X=\{X_t,t\in T\}$. 因为 (24) 式得出 (23) 式, 由此直接可得 (18) 式, 以至于 (19) 式. 除此之外, 在 (24) 式中设 $n=1, t_1=0$, 得到 (22) 式. $\square$

§9. 连续时间马氏链一个重要的代表就是在第二章 §2 中所定义的 Poisson 过程.

定理 6. 过程 $N=\{N_t,t\geqslant 0\}$ 是在 $\mathscr{B}([0,\infty))$ 上具有局部有限的伴随测度 $m(m([0,\infty))=\infty)$ 的 Poisson 过程当且仅当 N 是具有状态空间 $\mathsf{S}=\{0,1,\cdots\}$ 的马氏链, 且 $p_i(0)=\delta_{i0}$, 和转移概率

$$p_{ij}(s,t)=\begin{cases}\dfrac{(m((s,t]))^{j-i}}{(j-i)!}e^{-m((s,t])}, & j\geqslant i,\\ 0, & j<i,\end{cases}\tag{25}$$

这里, $0\leqslant s<t, i,j\in\mathsf{S}$ 和 $p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}$ 对 $s\geqslant 0, i,j\in\mathsf{S}$ (0^0 认为是 1).

证. 必要性. 设 N 是 Poisson 过程; $N_0=0$ a.s., 过程有独立增量, 且 $N_t-N_s\sim\pi_{m((s,t])}$ 对 $t>s\geqslant 0$, 即增量 N_t-N_s 的分布是具有参数为 $m((s,t])$ 的 Poisson 分布. 由于定理 3 过程 N 是马氏的, 这样 a.s. $N_t=N_t-N_0\sim\pi_{m((0,t])}, t>0$ 和 $\mathsf{P}(N_t\in\mathsf{S})=1$, 这里 $\mathsf{S}=\{0,1,\cdots\}$. 显然, 同样有 $p_i(0)=\mathsf{P}(N_0=i)=\delta_{i0}, i\in\mathsf{S}$. 对 $0\leqslant s<t$ 有

$$p_{ij}(s,t)=\mathsf{P}(N_t=j|N_s=i)=\frac{\mathsf{P}(N_t-N_s=j-i,N_s=i)}{\mathsf{P}(N_s=i)}=\mathsf{P}(N_t-N_s=j-i),$$

由于 N_t-N_s 的分布指出的性质给出了公式 (25). 对 $i,j\in\mathsf{S}$, 在 $s\geqslant 0$ 找到

$$p_{ij}(s,s)=\mathsf{P}(N_s=j|N_s=i)=\delta_{ij}.$$

充分性. 设 $N=\{N_t,t\geqslant 0\}$ 是具有集中于 0 点的初始分布和转移概率 (25) 式的马氏链. 显然, 因为 $p_i(0)=\delta_{i0}, i\in\mathsf{S}$, 所以 $N_0=0$ a.s.. 对 $s<t$ 和 $k\geqslant 0$ 利用 (23) 式和 (25) 式有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N_t-N_s=k)&=\sum_{l=0}^{\infty}\mathsf{P}(N_t-N_s=k,N_s=l)=\sum_{l=0}^{\infty}\mathsf{P}(N_t=k+l,N_s=l)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_i p_i(0)p_{il}(0,s)p_{l,k+l}(s,t)=\sum_{l=0}^{\infty}p_{0l}(0,s)p_{l,k+l}(s,t)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(m((0,s]))^l}{l!}e^{-m((0,s])}\frac{(m((s,t]))^k}{k!}e^{-m((s,t])}\\&=\frac{(m((s,t]))^k}{k!}e^{-m((s,t])}.\end{aligned}\tag{26}$$

于是 $N_t-N_s\sim\pi_{m((s,t])}, 0\leqslant s\leqslant t$. 利用 (23) 式和 (26) 式证明增量的独立性.

经过计算得到, 对 $n \geqslant 2, 0=t_0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ 和 $k_1, \cdots, k_n \in N \bigcup \{0\}$ 概率

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(N_{t_1}=k_1, N_{t_2}-N_{t_1}=k_2, \cdots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=k_n)\\
&\quad=\mathsf{P}(N_{t_1}=k_1, N_{t_2}=k_1+k_2, \cdots, N_{t_n}=k_1+\cdots+k_n)\\
&\quad=\sum_i p_i(0)p_{ik_1}(0,t_1)p_{k_1,k_1+k_2}(t_1,t_2)\cdots p_{k_1+\cdots+k_{n-1},k_1+\cdots+k_n}(t_{n-1},t_n)\\
&\quad=\frac{(m((0,t_1]))^{k_1}}{k_1!}e^{-m((0,t_1])}\frac{(m((t_1,t_2]))^{k_2}}{k_2!}e^{-m((t_1,t_2])}\times\cdots\\
&\qquad\times\frac{(m((t_{n-1},t_n]))^{k_n}}{k_n!}e^{-m((t_{n-1},t_n])}\\
&\quad=\prod_{m=1}^{n}\mathsf{P}(N_{t_m}-N_{t_{m-1}}=k_m).
\end{aligned}\tag{27}$$

由此可得相应的增量的独立性. □

§10. 在构造马氏过程时, 转移函数的概念是起着关键性作用.

设 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 是一族可测空间, 集合 $T \subset \mathbb{R}$.

定义 5. 在 $s \leqslant t(s,t \in T, x \in \mathsf{S}, B \in \mathscr{B}_t)$ 给定的函数 $P(s,x,t,B)$ 称作转移函数 (或马氏转移函数), 如果:

1) 对固定的 s,x,t 函数 $P(s,x,t,\cdot)$ 是 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 上的测度;

2) 对固定的 s,t,B 函数 $P(s,\cdot,t,B)$ 是 $\mathscr{B}_s|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测的;

3) 对任意的 $s \in T, x \in \mathsf{S}_s, B \in \mathscr{B}_s, P(s,x,s,B)=\delta_x(B)$;

4) 对所有的 $s<u<t(s,u,t \in T), x \in \mathsf{S}_s, B \in \mathscr{B}_t$ 满足柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) – 查普曼 (Chapman) 方程:

$$P(s,x,t,B)=\int_{\mathsf{S}_u} P(s,x,u,dy)P(u,y,t,B). \tag{28}$$

注意, 由于 3), 关系式 (28) 对 $s \leqslant u \leqslant t$ 时, 转移函数也成立.

定义 6. 称作马氏过程 $X=\{X_t, t \in T\}$ (对每个 $t \in T$ 取值于 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$) 具有转移函数 $P(s,x,t,B)$ 的, 如果对所有的 $s \leqslant t(s,t \in T), B \in \mathscr{B}_t$ 有

$$\mathsf{P}(X_t \in B|X_s)=P(s,X_s,t,B) \quad \text{a.s.} \tag{29}$$

或者说 $P(s,x,t,B)=\mathsf{P}(X_t \in B|X_s=x)$ a.s. 依测度 P_{X_s}.

给出的定义的意义在于: 具有转移函数的马氏过程中存在 "好的" (其含义是具有上面的 1)~4) 性质) 在 (29) 式左半部分中条件分布形式.

利用条件数学期望的性质, 当是 Borel 空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 时, 很容易理解条件 (28) 的起源. 由于 (29) 式, (第四章 §2) 和 (13) 式对 $s \leqslant u \leqslant t(s,u,t \in T)$ 和 $B \in \mathscr{B}_t$ a.s.

有

$$P(s,X_s,t,B)=\mathsf{E}(\mathbf{1}_{\{X_t\in B\}}|X_s)=\mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbf{1}_{\{X_t\in B\}}|X_s,X_u)|X_s)$$
$$=\mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbf{1}_{\{X_t\in B\}}|X_u)|X_s)=\mathsf{E}(P(u,X_u,t,B)|X_s).$$

换句话说, 对 $\mathsf{P}_{X_s}-$ 几乎所有的 x, 有

$$P(s,x,t,B)=\mathsf{E}(P(u,X_u,t,B)|X_s=x). \tag{30}$$

注意 (参见, [85; 第 1 卷, p.281]), 如果正则条件概率 $\Gamma(C)=\mathsf{P}(X_u\in C|X_s=x)$ (这里, Γ 依赖于 s,u,x), 则对任意的有界函数 $g\in\mathscr{B}_u|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 得到

$$\mathsf{E}(g(X_u)|X_s=x)=\int_{\mathsf{S}_u}g(u)\Gamma(dy)\quad(\mathsf{P}_{X_s}-\text{a.s.}). \tag{31}$$

回顾, 如果随机元 ν 取值于 Borel 空间中, 则正则条件概率 $\mathsf{P}(\nu\in B|\zeta)$ 显然是存在.

这样, 由 (30) 式和 (31) 式得出, 对任意的马氏过程, 只要有较弱的情况下的等式 (28) 式, 即不是对所有的 $x\in\mathsf{S}$, 而只是对几乎所有的 $x\in\mathsf{S}$ (依测度 P_{X_s}).

不难发现, 对在 §5 中所研究的马氏链, 转移函数存在, 且有公式

$$P(s,i,t,B)=\sum_{j\in B}p_{ij}(s,t), \tag{32}$$

这里, $s\leqslant t(s,t\in T),i\in\mathsf{S}$ (S 是有限或可数的), B 是 S 的任意子集.

在一般情况下, 关于马氏过程存在转移函数并不是很简单的. 对取值于任意的可测空间, 具有离散时间的马氏过程存在转移函数是已知的事实 (参见, 例如, [17; 第 1 卷, 第 II 章, §4]). 对取值于万有可测空间, 具有连续时间的马氏过程存在转移函数的证明, 只是不久前, 由**库兹涅佐夫 (Kuznetsov)** 给出的.

例 2. 设 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动. 这时, 利用 (15) 式得到 ($\|\cdot\|$ 表示在 $\mathbb{R}^m$ 中欧氏距离) 对 $s<t$ 有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(W(t)\in B|W(s)=x)&=\mathrm{E}(\mathbf{1}_{\{W(t)-W(s)+W(s)\in B\}}|W(s)=x)\\&=\mathsf{E}\mathbf{1}_{\{W(t)-W(s)+x\in B\}}=\mathsf{P}(W(t)-W(s)\in B-x)\\&=\frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}}\int_{B-x}e^{\frac{-\|z\|^2}{2(t-s)}}dz\\&=\frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}}\int_{B}e^{-\frac{\|z-x\|^2}{2(t-s)}}dz.\end{aligned}$$

由此可见, 对 $s<t$ 转移函数给出了公式

$$P(s,x,t,B)=\frac{1}{(2\pi(t-s))^{m/2}}\int_B e^{\frac{-\|y-x\|^2}{2(t-s)}}dy; \tag{33}$$

因为 $s<t$ 所有的条件 1)~4) 都满足 (为验证 (28) 式需要注意的是, 正态分布的卷积还是正态分布的).

如果 $t=s$, 则 (15) 式, $W(s)$ 和 $0\in\mathbb{R}^m$ 的独立性导致

$$\mathsf{P}(W(s)\in B|W(s)=x)=\mathsf{P}(W(s)+0\in B|W(s)=x)=\mathsf{P}(x+0\in B)=\delta_x(B).$$

从而, $P(s,x,s,B)=\delta_x(B)$.

§11. 设 $X=\{X_t,t\in T\}$ 是取值于可测空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$, 且具有转移函数 $P(s,x,t,B)$ 的马氏过程. 类似于在 §8 中对马氏链的证明, 对任意的 $n\geqslant 1$, 所有的 $s_0\leqslant t_1<\cdots<t_n$ (T 中的点) 和任意的 $B_k\in\mathscr{B}_{t_k},k=1,\cdots,n$, 过程的有限维分布由下面公式给出

$$\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(C)=\int_{\mathsf{S}_{s_0}}\mathsf{Q}_{s_0}(dx)\int_{\mathsf{S}_{t_1}}P(s_0,x,t_1,dz_1)\mathbf{1}_{B_1}(z_1)\times\cdots$$
$$\times\int_{\mathsf{S}_{t_n}}P(t_{n-1},z_{n-1},t_ndz_n)\mathbf{1}_{B_n}(z_n),\tag{34}$$

这里 $C=B_1\times\cdots\times B_n,\mathsf{Q}_{s_0}=\mathrm{Law}(X_{s_0})$, 而积分是由右向左进行 (不难验证, 每次积分结果依然是有界可测函数).

同时注意, 对任意的 $v\leqslant s(v,s\in T)$ 和 $B\in\mathscr{B}_s$, 有

$$\mathsf{Q}_s(B)=\int_{\mathsf{S}_v}P(v,x,s,B)\mathsf{Q}_v(dx).\tag{35}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_s(B)&=\mathsf{P}(X_s\in B)=\mathsf{E}(\mathsf{E}(\mathbf{1}_{\{X_s\in B\}}|X_v))\\&=\mathsf{E}P(v,X_v,s,B)=\int_{\mathsf{S}_v}P(v,x,s,B)\mathsf{Q}_v(dx).\end{aligned}$$

特别的, 如果 $T=[0,\infty)$, 则测度 Q_s 对任意的 $s>0$, 是由测度 Q_0 和转移函数所确定. 这方面与 Gauss 过程很相似, 只要两个要素 —— 中值和协方差函数给定了, 则有限维分布也就是确定了.

自然而然地会问, 是否根据转移函数 $P(s,x,t,B)$ 和测度 Q_{s_0} (在 $\mathscr{B}_{s_0}$ 上, 这里 $s_0\in T,T\subset[s_0,\infty)$) 可以构造马氏过程 $X=\{X_t,t\in T\}$, 具有给定的转移函数和 $\mathrm{Law}(X_{s_0})=\mathsf{Q}_{s_0}$. 对 Borel 空间 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 回答是肯定的, 它是可借助于 Kolmogorov 定理建立起来的.

对马氏过程的一般理论中所采用术语来说, 下面的注解是必要的.

设 $X=\{X_t,t\in[0,\infty)\}$ 是具有初始分布 μ (在 $\mathscr{B}_0$ 上 $\mu=\mathsf{P}_{X_0}$) 的马氏过程. 为了强调这种情况, 过程 X 的分布, 即在柱集 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}$ 上的测度, 经常用 P^μ

来表示. 特别的, 记号 $\mathsf{P}^x, x \in \mathsf{S}_0$, 意味着 $\mu = \delta_x$, 换句话说, 过程在时刻 $t = 0$ 从点 x "走出" (这样, 认为 $\mathscr{B}_0$ 包含着所有单点集合 $\{x\}, x \in \mathsf{S}_0$).

§**12.** 马氏过程子类中最重要的一类马氏过程.

定义 7. 设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 是对每个 $t \in T \subset \mathbb{R}$ 取值于可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$, 且具有转移函数 $P(s, x, t, B)$ 的马氏过程, 称作*齐次的* (*时齐的*), 如果对任意的 $x \in \mathsf{S}, B \in \mathscr{B} P(s, x, t, B)$, 只是依赖于差 $t - s$.

对这样的过程, 代替转移函数 $P(s, x, s+u, B)$ 只需要依赖函数 $P(x, u, B) = P(0, x, u, B)$ 就够了. $P(x, u, B)$ 自身的意义是条件概率, 即从点 x "走出" 经过时间 u "系统" 在集合 B 里. 为了使时刻 $s \in T$ 移动了 $u \in T$ 不超出集合 T, 一般来说都认为是集合 $T = [0, \infty)$ 或 $T = \{k\Delta, k \geqslant 0\}$, 这里 $\Delta > 0$.

根据 (33) 式 m 维 Brown 运动, 这是齐次马氏过程. Poisson 过程是齐次的, 当且仅当伴随测度 $m((s, t]) = \lambda(t - s), \lambda > 0, 0 \leqslant s < t < \infty$, 即过程具有强度常数为 λ 的.

对齐次马氏过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$, 条件 1)~4) 相对于转移函数 P 来说, 对 $s, t \geqslant 0, x \in \mathsf{S}, B \in \mathscr{B}$, 可以改写成如下形式:

1°) 对固定的 x, t 函数 $P(x, t, \cdot)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度;

2°) 对固定的 t, B 函数 $P(\cdot, t, B) \in \mathscr{B}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$;

3°) 对任意的 x, B, 有 $P(x, 0, B) = \delta_x(B)$;

4°) 对所有的 x, s, t 和 B 满足 Kolmogorov – Chapman 方程:

$$P(x, s+t, B) = \int_{\mathsf{S}} P(x, s, dy) P(y, t, B). \tag{36}$$

值得注意的是, 对所有变量值关系式 (36) 成立, 它是在马氏过程理论中应用强有力的半群理论方法的基础 (参见, 例如, [23]).

由于 (32) 式马氏链 $X = \{X_t, t \in T\}$ 的齐次性意味着, 对每个 $i, j \in \mathsf{S}$ 转移函数 $p_{ij}(s, t)$ 只依赖于差 $t - s$. 在这种情况下, 用 $p_{ij}(u)$ 来代替 $p_{ij}(s, s+u)$ (正如前面所指出的, 是研究 $T = [0, \infty)$ 或 $T = \{k\Delta, k \geqslant 0\}, \Delta > 0$).

设 $P(t)$ 是由元素 $p_{ij}(t), i, j \in \mathsf{S}$ 所组成的矩阵. 这时, 方程 (20) 改写成如下形式:

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad i, j \in \mathsf{S}, \tag{37}$$

即

$$P(t+s) = P(s) P(t), \quad s, t \in T. \tag{38}$$

这样, 与每个齐次马氏链可以与一个矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in \mathsf{S}}$ 的随机半群联系, 使得

对所有的 $t \in T$ 有

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad \sum_j p_{ij}(t) = 1, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij} \tag{39}$$

(最后的条件 (39) 意味着 $P(0) = I$ 是单位矩阵).

如果时间是离散的 ($T = \mathbb{Z}_+$), 则在齐次的情况下, n 步转移概率, 即 $p_{ij}(n)$ 正好是矩阵 P^n 的元素, 这里 P^n 是矩阵 $P = P(1)$ 的 n 次方.

另一方面, 具有矩阵的随机半群 $(p_{ij}(t))_{t\geqslant 0}$, 根据定理 5 可以构造具有该转移概率 $p_{ij}(t)$ 的马氏链.

注意, 非齐次马氏链的研究, 原则上可以借助于已知相空间的扩充, 转化到对齐次的研究 (参见, 例如, 习题 18).

§13. 假设 $T = [0, \infty)$, 研究马氏链的渐近性质是一个重要而又非常有趣的问题. 由连续情况转化为离散集 T 的情况也不会产生任何困难.

定理 7 (遍历性定理). 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是齐次马氏链 (具有任意的初始分布), 使得对某个 $j_0 \in \mathsf{S}$ 和某个 $h > 0$ 和 $0 < \delta \leqslant 1$ 有

$$p_{ij_0}(h) \geqslant \delta \quad 对所有的\ i \in \mathsf{S}. \tag{40}$$

这时, 对任意的 $j \in \mathsf{S}$ 存在不依赖于初始状态 $i \in \mathsf{S}$ 的极限

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \widetilde{p}_j, \tag{41}$$

且对所有的 $t > 0$, 有

$$|p_{ij}(t) - \widetilde{p}_j| \leqslant (1-\delta)^{[t/h]}, \tag{42}$$

这里 $[\cdot]$ 是数的整数部分.

"遍历性" 结果的直观含义是: 在很长的时间以后, 被描述成马氏链的系统, 好似 "忘记" 了它是从什么样的初始状态 "走出" 的.

证. 对每个 $t \in T$ 设

$$m_j(t) = \inf_i p_{ij}(t), \quad M_j(t) = \sup_i p_{ij}(t).$$

显然, 对所有的 $i, j \in \mathsf{S}$ 和 $t \in T$ 有 $m_j(t) \leqslant p_{ij}(t) \leqslant M_j(t)$. 为了证明 (41) 式只要验证当 $n \to \infty$ 时有 $m_j(t) \uparrow$ 和 $M_j(t) \downarrow$, 以及 $M_j(t) - m_j(t) \to 0$. 估计 (42) 式将由下面的估计 (43) 式导出.

对 $s, t \in T$, 考虑到 (37) 式有

$$m_j(s+t) = \inf_i \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \geqslant m_j(t) \inf_i \sum_k p_{ik}(s) = m_j(t),$$

$$M_j(s+t) = \sup_i \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) \leqslant M_j(t) \sup_i \sum_k p_{ik}(s) = M_j(t).$$

从而, 当 $t\to\infty$ 时, 有 $m_j(t)\uparrow$ 和 $M_j(t)\downarrow$.

对 $t,h,t-h\in T$ 重新利用性质 (37) 得出

$$\begin{aligned}
&M_j(t)-m_j(t)\\
&=\sup_a p_{aj}(t)+\sup_b(-p_{bj}(t))\\
&=\sup_{a,b}(p_{aj}(t)-p_{bj}(t))=\sup_{a,b}\sum_k(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))p_{kj}(t-h)\\
&=\sup_{a,b}\left\{\sum_k{}^{+}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))p_{kj}(t-h)+\sum_k{}^{-}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))(t-h)\right\}\\
&\leqslant\sup_{a,b}\left\{M_j(t-h)\sum_k{}^{+}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))+m_j(t-h)\sum_k{}^{-}(p_{a,k}(h)-p_{bk}(h))\right\},
\end{aligned}$$

这里 $\sum_k^{+}$ 表示对那些 k 求和, 使得 $p_{ak}(h)-p_{bk}(h)\geqslant 0$, 而 $\sum_k^{-}$ 表示对那些 k 求和, 使得 $p_{ak}(h)-p_{bk}(h)<0$ ($\sum_k^{+}$ 和 $\sum_k^{-}$ 当然依赖于 h,a 和 b). 由于 $\sum_k p_{ak}(h)=\sum_k p_{bk}(h)=1$, 则

$$\sum_k{}^{+}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))+\sum_k{}^{-}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))=0.$$

因此,

$$M_j(t)-m_j(t)\leqslant(M_j(t-h)-m(t-h))\sup_{a,b}\sum_k{}^{+}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h)).$$

注意, 如果 "特殊" 的状态 j_0 (参见, (40)) 不包含在 $\sum_k^{+}$ 中, 则由于 (40) 式

$$\sum_k{}^{+}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))\leqslant\sum_k{}^{+}p_{ak}(h)\leqslant 1-p_{aj_0}(h)\leqslant 1-\delta;$$

如果 j_0 包含在 $\sum_k^{+}$ 中, 则重新考虑到 (40) 式, 得到

$$\sum_k{}^{+}(p_{ak}(h)-p_{bk}(h))\leqslant\sum_k{}^{+}p_{ak}(h)-p_{bj_0}(h)\leqslant 1-\delta.$$

因此,

$$\begin{aligned}
M_j(t)-m_j(t)&\leqslant(1-\delta)(M_j(t-h)-m_j(t-h))\\
&\leqslant(1-\delta)^2(M_j(t-2h)-m_j(t-2h))\\
&\leqslant\cdots\leqslant(1-\delta)^{[t/h]}(M_j(u)-m_j(u)),
\end{aligned}\tag{43}$$

这里 $u=t-\left[\dfrac{t}{h}\right]h$. 但是, $M_j(u)-m_j(u)<1$. 从而, 对所有的 $t>0$ 有

$$M_j(t)-m_j(t)\leqslant(1-\delta)^{[t/h]},$$

这里 $0<\delta\leqslant 1$. 因为当 $t\to\infty$ 时有 $m_j(t)\uparrow, M_j(t)\downarrow$, 所以极限 $\lim\limits_{t\to\infty}M_j(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}m_j(t)$ 存在, 且相等 (例如说是 $\widetilde{p}_j$). 这时,

$$m_j(t)-M_j(t)\leqslant m_j(t)-\widetilde{p}_j\leqslant p_{ij}(t)-\widetilde{p}_j\leqslant M_j(t)-\widetilde{p}_j\leqslant M_j(t)-m_j(t).$$

即

$$|p_{ij}(t)-\widetilde{p}_j|\leqslant M_j(t)-m_j(t)\leqslant(1-\delta)^{[t/h]},$$

这不仅证明了 (41) 式, 而且证明了估计式 (42), 它给出了转移概率 $p_{ij}(t)$ (当 $t\to\infty$ 时) 收敛于极限值 $\widetilde{p}_j$ 的收敛速度. □

§14. 遍历性定理的一些推论.

推论 3. 设对任意的 $i,j\in\mathsf{S}$ 关系式 (41) 成立. 这时, 对所有的 $j\in\mathsf{S}$ 存在极限

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t)=\widetilde{p}_j, \tag{44}$$

这里 $p_j(t)=\mathsf{P}(X_t=j)$, 并且如果满足条件 (40), 则

$$|p_j(t)-\widetilde{p}_j|\leqslant(1-\delta)^{[t/h]}.$$

证. 根据全概率公式 $p_j(t)=\sum\limits_i p_i(0)p_{ij}(t)$. 因此, 由于 Lebesgue 控制收敛定理对每个 $j\in\mathsf{S}$ 有

$$p_j(t)-\widetilde{p}_j=\sum_i p_i(0)(p_{ij}(t)-\widetilde{p}_j)\to 0,\quad 当\ t\to\infty\ 时.$$

又有假设 (40) 式, 所以

$$|p_j(t)-\widetilde{p}_j|=|\sum_i p_i(0)(p_{ij}(t)-\widetilde{p}_j)|\leqslant(1-\delta)^{[t/h]}\sum_i p_i(0)=(1-\delta)^{[t/h]},$$

结论得证. □

推论 4. 设对任意的 $i,j\in\mathsf{S}$ 成立关系式 (41). 这时, 对每个 $t\in T$ 和所有的 $j\in\mathsf{S}$, 有

$$\widetilde{p}_j=\sum_i\widetilde{p}_ip_{ij}(t). \tag{45}$$

换句话说, 列向量 $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_0,\widetilde{p}_1,\cdots)^*$ 是矩阵 $P^*(t)$ 的特征向量, 这里 $*$ 表示转置.

证. 由于 (44) 式对任意的 $j\in\mathsf{S}$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\widetilde{p}_j=\lim_{s\to\infty}p_j(s+t)=\lim_{s\to\infty}\sum_i p_i(s)p_{ij}(t)\geqslant\lim_{s\to\infty}\sum_{i\leqslant N}p_i(s)p_{ij}(t)=\sum_{i\leqslant N}\widetilde{p}_ip_{ij}(t),$$

于是得到不等式 $\widetilde{p}_j\geqslant\sum\limits_i\widetilde{p}_ip_{ij}(t)$. 设对某个 $j\in\mathsf{S}$ 和 $t\geqslant 0$ 有严格的不等式

$$\widetilde{p}_j>\sum_i\widetilde{p}_ip_{ij}(t). \tag{46}$$

根据 (41) 式对任意的 N 和每个 i 有 $\sum_{j\leqslant N}\widetilde{p}_j=\lim_{t\to\infty}\sum_{j\leqslant N}p_{ij}(t)\leqslant 1$, 因此

$$\sum_j \widetilde{p}_j\leqslant 1. \tag{47}$$

进而, 如果 (46) 式满足, 则

$$\sum_j\widetilde{p}_j>\sum_j\sum_i\widetilde{p}_i p_{ij}(t)=\sum_i\widetilde{p}_i\sum_j p_{ij}(t)=\sum_i\widetilde{p}_i,$$

得到矛盾, 说明 (46) 式不可能. □

推论 5. 设对任意的 $i,j\in \mathsf{S}$ 满足关系式 (41). 这时, 或者 $\sum_j\widetilde{p}_j=1$, 即量 $\widetilde{p}_j, j\in\mathsf{S}$ 给出了一个概率分布, 称其为平稳分布, 或者 $\sum_j\widetilde{p}_j=0$, 即所有的 $\widetilde{p}_j=0$.

证. 显然, 事实上只有两种可能成立: 或者 $\sum_j\widetilde{p}_j=0$, 或者 $\sum_j\widetilde{p}_j\neq 0$. 如果 $\sum_j\widetilde{p}_j\neq 0$ (根据 (47) 式级数收敛), 则取 $p_i(0)=\widetilde{p}_i/\sum_j\widetilde{p}_j, i\in\mathsf{S}$, 根据定理 5 研究具有这样的初始分布和原先的 $p_{ij}(t)$ 的马氏链是可能的. 这时, 根据全概率公式和推论 4, 对所有的 $t\geqslant 0$ 和 $j\in\mathsf{S}$, 有

$$p_j(t)=\sum_i p_i(0)p_{ij}(t)=\frac{\sum_i\widetilde{p}_i p_{ij}(t)}{\sum_j\widetilde{p}_j}=\frac{\widetilde{p}_j}{\sum_j\widetilde{p}_j}=p_j(0). \tag{48}$$

由 (44) 式有 $\widetilde{p}_j=p_j(0)$. 因此, 如果 $\sum_j\widetilde{p}_j>0$, 则 $\sum_j\widetilde{p}_j=1$. □

§15. 前面所引入的“平稳分布”的术语与下面的概念有关.

定义 8. 过程 $X=\{X_t,t\in T\}$, 这里 $T\subset\mathbb{R}$, 称作平稳的 (严格平稳的或狭义平稳的), 如果对所有的 $n\geqslant 1, t_1,\cdots,t_n\in T$ 和所有的 $h\in\mathbb{R}$, 使得 $t_1+h,\cdots,t_n+h\in T$ 满足下面性质:

$$\mathrm{Law}(X_{h+t_1},\cdots,X_{h+t_n})=\mathrm{Law}(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}).$$

换句话说, 这样过程的所有有限维分布在推移下是不变的 (推移不会超出指标集 T, 这一点是很重要的, 例如, $T=\mathbb{Z}$).

定理 8. 设齐次马氏链 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 具有平稳分布 μ, 它由 $\{\widetilde{p}_j,j\in\mathsf{S}\}$ 所组成. 假设 $Y=\{Y_t,t\geqslant 0\}$ 是 (齐次的) 马氏链, 具有与 X 同样的转移概率和初始分布 μ. 这时, 过程 Y 将是严格平稳过程.

证. 首先, 根据定理 5, 存在具有给定的转移概率和初始分布 μ 的过程 Y. 由 (24) 式将 Y 代替 X, 得到对 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n, B_k \subset \mathsf{S}, k = 1, \cdots, n$ 和 $n \geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(Y_{t_1} \in B_1, \cdots, Y_{t_n} \in B_n)\\ &= \sum_{j_1 \in B_1} p_{j_1}(t_1) \sum_{j_2 \in B_2} p_{j_1 j_2}(t_1, t_2) \cdots \sum_{j_n \in B_n} p_{j_{n-1} j_n}(t_{n-1}, t_n),\end{aligned}$$

这里, 对所有的 $j \in \mathsf{S}, t \geqslant 0$ 由于 (48) 式有 $p_j(t) = \mathsf{P}(Y_t = j) = \widetilde{p}_j$. 定理中所要证的平稳性是由下面直接可得

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(t-s) = p_{ij}(s+h, t+h)$$

对任意的 $i, j \in \mathsf{S}, 0 \leqslant s \leqslant t, h \geqslant -s$. □

需要强调的是, 在定理 8 的证明中, 我们利用了不是关系式 (41) 本身, 而只是 (48) 式, 即存在那样的初始分布 $\mu = \mathrm{Law}(X_0)$, 它不随时间变化 (换句话说, 对所有的 $t \in T, \mathrm{Law}(X_t) = \mu$). 这样的分布 μ 称作过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 的*不变测度*.

§16. 我们将研究在 $[0, \infty)$ 上齐次马氏链的转移概率 (在一定的条件下) 满足的*微分方程*, 以及前面所建立的结果. 为此需要一些新的概念.

定义 9. 齐次马氏链 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ (或者伴随它的半群 $P(t) = (p_{ij}(t))$) 称作*标准的*, 如果当 $t \to 0+$ 时有 $P(t) \to I$, 即对所有的 $i, j \in \mathsf{S}$ 有

$$\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}, \tag{49}$$

这里, δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

引理 3. *齐次马氏链 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 的转移概率, 对所有的 $i, j \in \mathsf{S}$ 和任意的 $t, h \geqslant 0$ 成立下列不等式:*

$$|p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leqslant 1 - p_{ii}(h).$$

特别的, 如果链是标准的, 则对每个 $i, j \in \mathsf{S}$ 函数 $p_{ij}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续.

证. 一方面,

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) &= \sum_k p_{ik}(h) p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \\ &= p_{ij}(t)(p_{ii}(h) - 1) + \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) p_{kj}(t) \\ &\leqslant \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h). \end{aligned}$$

另一方面

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\geqslant p_{ij}(t)(p_{ii}(h)-1)\geqslant p_{ii}(h)-1.$$

由两个不等式给出了引理的结果. □

定理 9. 如果 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ 是标准的随机半群, 则存在右导数

$$\left.\frac{d^+P(t)}{dt}\right|_{t=0}=Q, \tag{50}$$

即对所有的转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 0 点存在右导数:

$$\left.\frac{d^+p_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=q_{ij}. \tag{51}$$

这时,

$$\text{对 } i\neq j \text{ 有 } 0\leqslant q_{ij}<\infty \text{ 和 } q_i=-q_{ii}\in[0,\infty]. \tag{52}$$

证. 固定某个状态 $i\in S$. 首先, 对 $j=i$ 的情况对转移概率证明 (51) 式. 由于条件 (49), 可以找到 $\delta>0$, 使得对 $h\in[0,\delta]$ 有 $p_{ii}(h)>0$. 对 $t>0$ 应用 (37) 式得到 $p_{ii}(t)\geqslant(p_{ii}(t/n))^n, n\geqslant 1$. 取 $n=n(t,\delta)$, 使得 $t/n<\delta$, 可以看出对所有的 $t\geqslant 0$ 有 $p_{ii}(t)>0$. 因此在 $[0,\infty)$ 上定义函数 $H(t)=-\ln p_{ii}(t)$. 由 (37) 式有 $p_{ii}(s+t)\geqslant p_{ii}(s)p_{ii}(t)$ 对 $s,t\geqslant 0$. 由此可得对 $s,t\in[0,\infty)$, 有

$$H(s+t)\leqslant H(s)+H(t). \tag{53}$$

设

$$q=\sup_{t>0}H(t)/t. \tag{54}$$

显然 $q\in[0,\infty]$.

分别研究两种情况: $q<\infty$ 和 $q=\infty$.

1) 设 $q<\infty$. 这时, 对任意的 $\varepsilon>0$ 可以找到 $t_0=t_0(\varepsilon)>0$ 使得 $H(t_0)/t_0\geqslant q-\varepsilon$. 对 $h\in(0,t_0)$, 将 t_0 表示成下列形式: $t_0=nh+\Delta$, 这里 $n=[t_0/h], 0\leqslant\Delta<h$, 而 $[\cdot]$ 是数的整数部分. 利用 (53) 式, 得到

$$q-\varepsilon\leqslant H(t_0)/t_0\leqslant(nH(h)+H(\Delta))/t_0=\frac{H(h)}{h}\cdot\frac{nh}{t_0}+\frac{H(\Delta)}{t_0}. \tag{55}$$

由于 (49) 式当 $\Delta\to 0$ 时, $H(\Delta)\to 0$ (如果 $h\to 0+,\Delta\to 0$). 因此,

$$q-\varepsilon\leqslant\liminf_{h\to 0+}H(h)/h. \tag{56}$$

由 (54) 式得到 $\limsup\limits_{h\to 0+}H(h)/h\leqslant q$. 因此存在 $\lim\limits_{h\to 0+}H(h)/h=q$ 即

$$q=\lim_{h\to 0+}\frac{H(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-\ln(1-(1-p_{ii}(h)))}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1-p_{ii}(h)}{h}, \tag{57}$$

这就证明了, 当 $q<\infty$ 时, (对 $i\in \mathsf{S}$) 关系式 (51) 成立.

2) 设 $q=\infty$. 这时, 对任意的 $M>0$ 找到 $t_0=t_0(M)>0$ 使得 $\dfrac{H(t_0)}{t_0}\geqslant M$. 如同证明 (56) 式时一样, 得到

$$\liminf_{h\to 0+} H(h)/h\geqslant M.$$

这样, 存在 $\lim\limits_{h\to 0+}H(h)/h=\infty$. 考虑到 (57) 式, 得到当 $q=\infty$ 时, 关系式 (51) 式.

固定某个状态 $i\in\mathsf{S}$ 对 $j\neq i$ 的情况对转移概率 $p_{ij}(t)$ 证明 (51) 式. 设 $f_{ij}^{(k)}(h)$ 是在 $X_0=i$ 条件下, 由状态 i 出发, 经过步长度为 h,k 步以后首次回到 (在这以前没有) 状态 i 的, 且在时刻 mh, 这里 $m=1,\cdots,k$, 从没有到达状态 j 的概率. 验证, 对 $n\geqslant 2$ 有不等式

$$p_{ij}(nh)\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}f_{ij}^{(k)}(h)p_{ij}((n-k)h). \tag{58}$$

事实上, 考虑到注 2, 对转移概率 $p_{ij}(nh)$ 得到下面的下方估计

$$\begin{aligned}
&p_{ij}(nh)\\
&=\sum_{j_1,\cdots,j_{n-1}\in\mathsf{S}}\mathsf{P}(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\cdots,X_h=j_1|X_0=i)\\
&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{J_k}\sum_{j_{k+1},\cdots,j_{n-1}\in\mathsf{S}}\mathsf{P}(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\cdots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i)\\
&\quad\times\mathsf{P}(X_{kh}=i,X_{(k-1)h}=j_{k-1},\cdots,X_h=j_1|X_0=i),
\end{aligned}$$

这里 $J_k=\{(j_1,\cdots,j_{k-1}):j_m\notin\{i,j\},m=1,\cdots,k-1\}$, 由于 (1) 式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathsf{P}(X_0=i)}\mathsf{P}(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\cdots,X_{kh}=i,\cdots,X_h=j_1,X_0=i)\\
&=\frac{1}{\mathsf{P}(X_0=i)}\times\mathsf{P}(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\cdots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i,\cdots,X_0=i)\\
&\quad\times\mathsf{P}(X_{kh}=i,\cdots,X_0=i)\\
&=\mathsf{P}(X_{nh}=j,\cdots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i)\mathsf{P}(X_{kh}=i,\cdots,X_h=j_1|X_0=i).
\end{aligned}$$

为了得到不等式 (58), 我们只需计算

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_{k+1},\cdots,j_{n-1}}\mathsf{P}(X_{nh}=j,X_{(n-1)h}=j_{n-1},\cdots,X_{(k+1)h}=j_{k+1}|X_{kh}=i)\\
&=p_{ij}((n-k)h),\sum_{J_k}\mathsf{P}(X_{kh}=i,X_{(k-1)h}=j_{k-1},\cdots,X_h=j_1|X_0=i)=f_{ij}^{(k)}(h).
\end{aligned}$$

以 $p_{ij}^{(k)}(h)$ 表示由状态 i 出发, 经过步长度为 h 的 k 步 (而不是更少的步数) 以后正好在状态 j 的条件转移概率. 类似于 (58) 式得到, 对 $k\geqslant 1$ $\left(\sum\limits_{\varnothing}=0\right)$

$$p_{ii}(kh)=f_{ij}^{(k)}+\sum_{m=1}^{k-1}p_{ij}^{(m)}(h)p_{ji}((k-m)h). \tag{59}$$

显然, $\sum\limits_{m=1}^{k-1} p_{ij}^{(m)}(h) \leqslant 1$, 因此, $f_{ij}^{(k)}(h) \geqslant p_{ij}(kh) - \max\limits_{1\leqslant m\leqslant k-1} p_{ji}((k-m)h)$ (空集取极大认为是 0). 由于 (49) 式, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 可以找到 $t_0 = t_0(\varepsilon, i, j) > 0$ 使得对 $t \in [0, t_0]$ 有

$$p_{ji}(t) \leqslant \varepsilon, \quad p_{ii}(t) \geqslant 1-\varepsilon, \quad p_{jj}(t) \geqslant 1-\varepsilon. \tag{60}$$

进而, 对 $nh \leqslant t_0$ 和 $k = 1, \cdots, n-1$, 有

$$f_{ij}^{(k)}(h) \geqslant 1 - 2\varepsilon. \tag{61}$$

注意, 对 $k = 1, \cdots, n-1$ 和 $n \geqslant 2$ 有 $p_{ij}((n-k)h) \geqslant p_{ij}(h)p_{jj}((n-k-1)h)$, 由 (58) 式 ~(61) 式得出

$$p_{ij}(nh) \geqslant (1-2\varepsilon)p_{ij}(h)\sum_{k=1}^{n-1} p_{jj}((n-k-1)h) \geqslant (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)(n-2)p_{ij}(h).$$

由此, 选取 $n = [t_0/h]$ 和考虑到 $p_{ij}(t)$ 的连续性 (引理 3) 得到

$$\infty > \frac{p_{ij}(t_0)}{t_0} \geqslant (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)\limsup_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

让 t_0 趋于 0, 看出

$$\liminf_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)\limsup_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 由这不等式得到, 当 $j \neq i$ 时, 存在有限的极限 $q_{ij} = \lim\limits_{t\to 0+} p_{ij}(t)/t$. 定理 9 得证. □

§17. 设满足标准的条件 (49). 对任意的 $N \geqslant 1$ 和 $t > 0$, 考虑到 $\sum\limits_j p_{ij}(t) = 1$, 得到

$$\sum_{\substack{j\leqslant N\\ j\neq i}} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{1-p_{ii}(t)}{t}.$$

因为不等式左半部分求和只包含有限项, 则让 $t \downarrow 0$, 且利用导数存在 (参见 (51) 式), 有 $\sum\limits_{\substack{j\leqslant N\\ j\neq i}} q_{ij} \leqslant q_i$. 因此

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i \tag{62}$$

(当 $q_i = \infty$ 时, (62) 式是显然的).

定义 10. 齐次马氏链称作保守的, 如果无穷小矩阵 Q 的所有元素 q_{ij} 是有限的, 且对任意的 i 有

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i \tag{63}$$

保守的马氏链的例子是具有强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程. 事实上, 根据 (25) 式矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

和性质 (63) 显然成立.

定理 10 (Kolmogorov 向后方程组). 设齐次马氏链是保守的. 这时, 对所有的 $t > 0$, 有

$$P'(t) = QP(t), \tag{64}$$

即对任意的 $i, j \in \mathsf{S}$ 和 $t > 0$ 存在导数 $p'_{ij}(t)$, 且成立下面的 (向后) 方程:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t). \tag{65}$$

(由于 (51) 式和因为 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, 对 $t = 0$, 方程 (65) 也将成立, 如果所有的导数都理解为右导数.)

证. 对 $t \geqslant 0, h > 0$ 和 $i, j \in \mathsf{S}$ 假设

$$L_{ij}(h,t) = \frac{1}{t} \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) \cdot p_{kj}(t).$$

这时

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} p_{ij}(t) + L_{ij}(h,t). \tag{66}$$

对所有的 $N \geqslant 1$ 由 (51) 式得出

$$\limsup_{h \to 0+} L_{ij}(h,t) \geqslant \limsup_{h \to 0+} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leqslant N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leqslant N}} q_{ik} p_{kj}(t).$$

这样, 有下面的下方估计:

$$\limsup_{h \to 0+} L_{ij}(h,t) \geqslant \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t). \tag{67}$$

考虑到, 对所有的 $i, j \in \mathsf{S}$ 和 $t \geqslant 0, h > 0$ 有 $p_{kj}(t) \leqslant 1$ 和 $\sum_k p_{ik}(h) = 1$. 可以看出, 对 $N > i, L_{ij}(h,t)$ 可以用下面的量对它来作上方估计

$$\sum_{\substack{k \neq i \\ k \leqslant N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \frac{1}{h} \sum_{k > N} p_{ik}(h) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \leqslant N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \frac{1}{h}\Big(1 - p_{ii}(h) - \sum_{\substack{k \leqslant N \\ k \neq i}} p_{ik}(h)\Big).$$

由此, 当 $h \to 0+$ 时得到

$$\limsup_{h\to 0+} L_{ij}(h,t) \leqslant \sum_{\substack{k\neq i\\ k\leqslant N}} q_{ik}p_{kj}(t) - q_{ii} - \sum_{\substack{k\leqslant N\\ k\neq i}} q_{ik}.$$

因此, 由于条件 (63) 有

$$\limsup_{h\to 0+} L_{ij}(h,t) \leqslant \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k\neq i} q_{ik} = \sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t). \tag{68}$$

回顾公式 (66). 从它和 (51) 式, (67) 式和 (68) 式可以得出, 对右导数方程 (65) 成立. 类似地可以研究函数 $p_{ij}(t)$, 对 $t>0$ 存在左导数的问题, 对它们满足方程 (65). 进而定理得证. □

定理 11 (Kolmogorov 向前方程组). *设齐次马氏链的半群 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ 存在具有元素 q_{ij} 是有限的无穷小矩阵 Q, 且对所有的 $i\neq j$ 有*

$$p_{ij}(h) = q_{ij}h + \alpha_{ij}(h), \tag{69}$$

这里, 一致地对 i, 当 $h\to 0+$ 时有

$$\alpha_{ij}(h)/h \to 0 \tag{70}$$

这时, 对所有的 $t>0$ 存在 $P'(t)$ (即存在所有导数 $p'_{ij}(t), i,j\in \mathsf{S}$) 和

$$P'(t) = P(t)Q \tag{71}$$

换句话说, 对 $t>0$ 成立下面的 (向前) 方程: 对所有的 $i,j\in\mathsf{S}$ 有

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)q_{kj}. \tag{72}$$

证. 设 $t\geqslant 0, h>0$ 和 $i,j\in\mathsf{S}$. 这时

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(t)-1}{h} + \frac{1}{h}\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h). \tag{73}$$

对任意的 $\varepsilon>0$ 固定 j 由于 (69) 式可以找到 $h_0(\varepsilon,j)>0$ 使得 $|\alpha_{kj}(h)|/h<\varepsilon$ 对所有的 k 和 $0<h<h_0(\varepsilon,j)$, 因此,

$$\left|\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{\alpha_{kj}(h)}{h}\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k\neq j} p_{ik}(t) \leqslant \varepsilon. \tag{74}$$

由 (69) 式, (74) 式和

$$\frac{1}{h}\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)p_{kj}(h) \leqslant \frac{p_{ij}(t+h)}{h} \leqslant \frac{1}{h},$$

对每个 $t \geqslant 0$, 和 $i \in \mathsf{S}$ (72) 式右半部分级数收敛. 在 (73) 式中让 h 趋于 0+ 取极限, 对右导数得到 (71) 式.

类似地证明 (71) 式对左导数. 进而定理得证. □

§18. 一些特殊重要的情况.

注 3. 如果状态空间 S 是有限的, 且矩阵 $P(t)$ 是标准的, 则两类 Kolmogorov 方程组成立.

事实上, 对任意的 $i, j \in \mathsf{S}$ 和 $t > 0$ 有

$$\frac{1}{t}\sum_{j \neq i} p_{ij}(t) = \frac{1 - p_{ii}(t)}{t},$$

如果状态个数是有限的, 则定理 9 保证保守性. 这时满足条件 (69), 而条件 (70) 成立, 因为 S 属于有限集.

Kolmogorov 向前、向后方程组的名称来源与在 (64) 式和 (71) 式矩阵 Q 的位置有关 ($P(t)$ 对 Q "在前" 或者 "在后").

推论 6. 设定理 11 的条件成立, 且对所有的 $i, j \in \mathsf{S}$ 存在极限

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \widetilde{p}_j \tag{75}$$

(例如, 定理 7 的条件保证满足 (75) 式). 这时, 对任意的 j 有

$$\sum_k \widetilde{p}_k q_{kj} = 0, \tag{76}$$

即列向量 $\widetilde{p}$ 是矩阵 Q^* 的特征向量 (Q^* 表示矩阵 Q 的转置), 它对应的是 0 特征值的. 换句话说, $Q^*\widetilde{p} = 0$.

证. 重复在定理 11 的证明, 可以看出, 级数 $\sum\limits_k p_k(t) q_{kj}$, 这里 $p_k(t) = \mathsf{P}(X_t = k)$ 对每个 j 收敛, 且对任意的初始分布存在极限

$$p_j'(t) = \sum_k p_k(t) q_{kj}. \tag{77}$$

如果 $\sum\limits_j \widetilde{p}_j = 0$, 即所有 $\widetilde{p}_j = 0$, 则 (76) 式成立. 如果 $\sum\limits_j \widetilde{p}_j \neq 0$, 则取初始分布 $p_i(0) = \widetilde{p}_i, i \in \mathsf{S}$ (参见推论 5). 这时, 根据 (48) 式有 $p_j(t) = \widetilde{p}_j$. 因此, $p_j'(t) = 0$, 关系式 (76) 由 (77) 式得出. □

§19. 研究一个模型 (稍后解释它的产生), 模型中状态空间是 $\mathsf{S} = \{0, 1, \cdots, n\}$, 而在 $h \to 0+$ 时的转移概率 $p_{ij}(t)$ 有如下面 "转移图解" 所示:

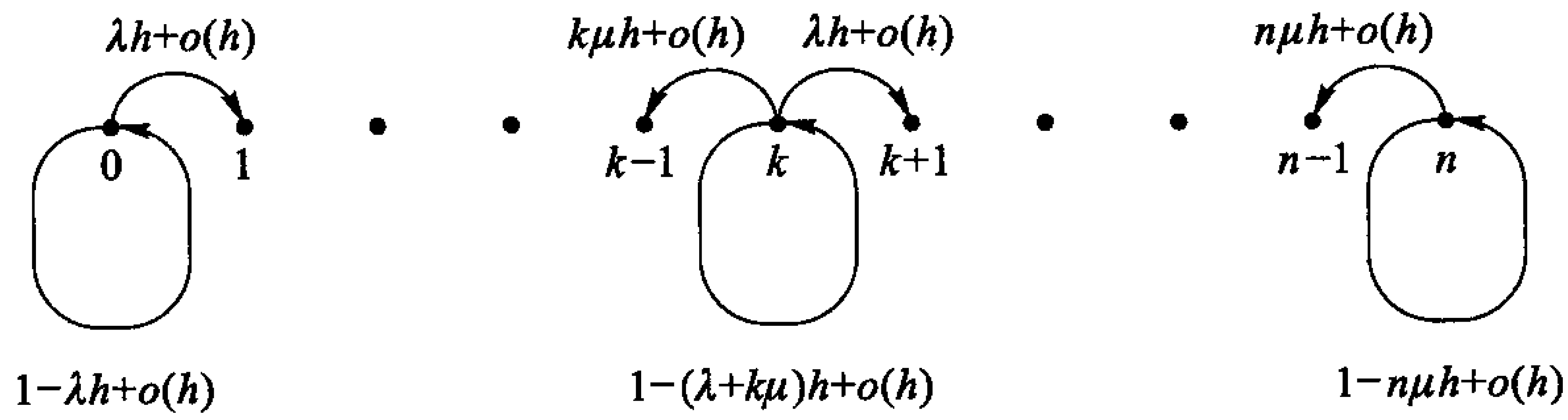


图 17

由图可以看出, 一步的转移 (以非 0 的强度) 只是**向右一步**, **或者向左一步**, 也允许停留在原处; 在 "端点"0 和 n, 只允许由 0 到 1 和相应的由 n 到 $n-1$, 且这时, 也允许停留在原处 (λ 和 μ 是正的参数). 确切地说, 对剩下的其他情况, 假设当 $h\to 0+$ 时有 $p_{ij}(h)=0(h)$.

注意, 习题 36 的结果保证了存在具有给定的无穷小矩阵 Q 的马氏链.

我们来验证满足遍历性定理 7 的条件. 取 $j_0=n$. 对任意的 $i=0,\cdots,n$ 有

$$\begin{aligned}p_{in}(nt) &\geqslant p_{i,i+1}(t)\cdots p_{n-1,n}(t)p_{nn}(nt-(n-i)t)\\ &\geqslant p_{i,i+1}(t)\cdots p_{n-1,n}(t)(p_{nn}(t))^{i}.\end{aligned}$$

可以找到 $t_0>0$, 使得 $p_{k-1,k}(t)=\lambda t+o(t)>0, k=1,\cdots,n$ ($o(\cdot)$ 依赖 k), 对 $0<t\leqslant t_0, p_{nn}(t)>1/2$. 取 $h=t_0/n, t=t_0$ 得到条件 (40) 成立, 即存在极限 $\widetilde{p}_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)$.

由于两种 Kolmogorov 方程组满足注 3, 因为 S 是有限的, 而 $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1$ 所以有 $\sum\limits_j\widetilde{p}_j=1$.

现在找出平稳分布 $\widetilde{p}$. 根据推论 6, 为此需要解向量方程 $Q^*\overrightarrow{p}=\overrightarrow{0}$, 即方程组

$$\begin{pmatrix}-\lambda & \mu & & & & & 0\\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \lambda & -(\lambda+k\mu) & (k+1)\mu & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -(\lambda+(n-1)\mu) & n\mu\\ 0 & & & & & \lambda & -n\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\ p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=\overrightarrow{0}.$$

将矩阵 Q^* 的第一行加入到第二行, $\cdots$, 将第 k 行加入到第 $k+1$ 行即后一行 ($2\leqslant$

$k \leqslant n-1$). 这时,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu & & & 0 \\ & -\lambda & 2\mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & n\mu \\ 0 & & & \lambda & -n\mu \end{pmatrix} \vec{p} = \vec{0},$$

也就是说, 按照坐标有

$$-\lambda p_k + \mu(k+1)p_{k+1} = 0, \quad k = 0, \cdots, n-1.$$

因此, $p_{k+1} = \rho p_k/(k+1)$, 这里 $\rho = \lambda/\mu$. 由此可得 $p_k = \dfrac{\rho^k}{k!}p_0$, 因为对解满足条件 $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$, 则 $p_0 = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \rho^k/k!\right)^{-1}$. 进而有下面公式成立:

$$\widetilde{p}_k = \frac{\rho^k/k!}{\sum\limits_{j=0}^{n} \rho^j/j!}, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \tag{78}$$

在 "排队论" (Queueing Theory) (群众服务理论) 中, 它被称作埃尔朗 (Erlang) 公式.

§20. 现在来解释, 在经典问题中怎样自然而然地产生前面所研究的模型, 它具有在图 17 中所指出的转移概率.

设有某个 "排队系统" ("群众服务系统", 俄文缩写 CMO), 是由 n 个相同的服务装置组成. 需求服务的人群流要进入这个服务系统, 假设需求服务的人群流构成 Poisson 流, 即需求服务的人到来在时刻 $\xi_1, \xi_1+\xi_2, \cdots$, 这里 $\{\xi_k\}$ 生成 Poisson 过程 (参见, 第三章, 定理 2), 且认为在它们的每一时刻仅有一个需求服务的人.

研究 "带拒绝系统", 也就是说, 如果所有的服务装置已被先来的需求服务的人群占满了, 则这时新来的需求服务的人将被弃绝 (出现 "拒绝"). 这样的例子如, 当电话线被占据满了. 如果有了空的服务装置, 则新来的需求服务的人瞬间得到服务 (可以研究各式各样的服务规则, 为了简化我们将不去涉及. 我们这里, 认为需求服务的人无论进入那一个空的装置是无关紧要的; 在每一个服务装置中, 若一个服务装置被占据的话, 有且仅有一个需求服务的人). 自然地认为系统在时刻 t 的状态 X_t 是服务装置被占据的数目.

现在准确地刻画这个服务特征. 假设每个需求服务的人服务的时间都是具有参数为 $\mu > 0$ 的指数分布的随机变量 η. 除此之外, 每个需求服务的人都是彼此独立的, 且描写服务的时间长度的随机变量, 不依赖于需求服务的人群流所给出的序列 $\{\xi_k\}$.

一般排队论系统用 $a|b|c$ 表示, 这里符号 a 指出的是随机变量 ξ_k 的分布 (根据前面所说, 需求服务的人到来的时刻 $\tau_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, 这里 ξ_k 是独立同分布随机变量, $k \geqslant 1$), b 表示服务的时间长度的分布, 且不依赖于 $\{\xi_k\}$, c 是服务装置的数量. 对指数分布来说, 传统地用 M 来表示. 这样, 我们所研究的系统是 $M|M|n$. 符号 $G|G|c$ 可说明关于所利用分布的没有特别假设 (" G ", General). 符号以后有可能扩充, 例如, 当在需求服务的人到来的时刻 τ_k, 不仅有一个需求服务的人, 而是仅有一群需求服务的人, 等等.

如果 $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ 是根据序列 $\{\xi_k\}$ 所构造出的 Poisson 随机过程. 事件 $A_m(t, t+h)$ 表示在时间 $(t, t+h]$ 中恰好有 m 个需求服务的人到来, 则

$$\mathsf{P}(A_m(t,t+h)) = \mathsf{P}(N_{t+h} - N_t = m) = \frac{(\lambda h)^m}{m!} e^{-\lambda h}, \quad m = 0, 1, \cdots.$$

因此,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(A_0(t,t+h)) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), \quad \text{当 } h \to 0+; \\ &\mathsf{P}(A_1(t,t+h)) = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h), \quad \text{当 } h \to 0+; \\ &\mathsf{P}\left(\bigcup_{m \geqslant 2} A_m(t,t+h)\right) = 1 - e^{-\lambda/h} - \lambda h e^{-\lambda h} = o(h), \quad \text{当} h \to 0+. \end{aligned} \tag{79}$$

对服务的时间长度随机变量 η 的分布密度

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{80}$$

即对 $x, y \geqslant 0$, 有

$$\mathsf{P}(\eta > x + y | \eta > y) = \frac{\displaystyle\int_{x+y}^{\infty} p_\eta(z) dz}{\displaystyle\int_{y}^{\infty} p_\eta(z) dz} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathsf{P}(\eta > x). \tag{81}$$

进而说明了, 工作的服务装置还要工作时间 x 的概率, 不依赖于这个服务装置已经工作了多少时间 (在具有分布密度的分布函数类中, 指数分布是唯一的满足条件 (81) 的). 注意,

$$p_h = \mathsf{P}(\eta < h) = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h) \quad \text{当 } h \to 0+.$$

每个服务装置工作不依赖于其他的. 因此, 在时刻 t, 由 k 个工作的服务装置中恰有 l 个在 h 时间内结束工作的概率是 $C_k^l p_h^l (1-p_h)^{k-l}$ (Bernoulli 概型). 因此, 设 $B_{k,l}(t, t+h)$ 表示事件 "由 k 个工作的服务装置中恰有 l 个在 $(t, t+h]$ 时间内结束

工作", 于是得到

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B_{k,1}(t,t+h)) &= k(1-e^{-\mu h})e^{-\mu h(k-1)} \\ &= k(\mu h+o(h)(1-(k-1)\mu h+o(h)) \\ &= k\mu h+o(h), \quad \text{当 } h\to 0+;\end{aligned}$$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{l\geqslant 2} B_{k,l}(t,t+h)\right) = 1-(1-k\mu h)-k\mu h+o(h)=o(h), \quad \text{当 } h\to 0+. \tag{82}$$

事件 $C_{ij}(t,t+h)$ 表示系统在时间 $(t,t+h]$ 内实现由 i 状态转化为 j 状态, 可以想象为如下面的形式 (为了书写简单, 在集合中不再写变量 t 和 $t+h$). 如果 $1\leqslant i\leqslant n-1$, 则

$$\begin{aligned}C_{i,i+r} &= A_rB_{i,0}\bigcup A_{r+1}B_{i,1}\bigcup\cdots\bigcup A_{r+i}B_{i,i}, \quad \text{对 } r=1,\cdots,n-i, \\ C_{i,i-r} &= A_0B_{i,r}\bigcup A_1B_{i,r+1}\bigcup\cdots\bigcup A_{i-r}B_{i,i}, \quad \text{对 } r=1,\cdots,i.\end{aligned}$$

对 $C_{0,k}$ 和 $C_{n,k}(k=0,1,\cdots,n)$ 有类似的表示式. 利用事件 $\{A_q\}$ 和 $\{B_{m,k}\}$ 的独立性和用 (79) 式和 (82) 式, 对 $p_{ij}(h)=\mathsf{P}(C_{ij}(t,t+h))$ 导出了公式, 它在前面的 "转移图解" 中所给出了.

应该强调的是, 我们只是借助于模型来说明了导出 Erlang 公式的意义. 不难发现, 这里涉及了一个重要又复杂的问题: 借助于无穷小特征能否引出一个马氏过程 (给出矩阵 Q, 例如, 解 Kolmogorov 方程组). 事实上, 回答这个问题并不是那么很简单的 (参见, 本章的补充).

§21. 再一次回顾公式 (78). 当 $k=n$ 时, 对量 $\widetilde{p}_n$ 可以理解为在平稳的状况下, 需求服务的人被拒绝的概率, 即经过很长的时间, 所有 n 个服务装置被占据满了概率, 它接近于 $\widetilde{p}_n$ (推论 3 保证 $p_j(t)$ 以指数快速收敛于 $\widetilde{p}_j$). 下面的表 (参见, [19; p48,49])

$n=2$,	$\rho=0.3$	$\widetilde{p}_2\approx 0.0335$
$n=4$,	$\rho=0.6$	$\widetilde{p}_4\approx 0.0030$
$n=6$,	$\rho=0.9$	$\widetilde{p}_6\approx 0.0003$

说明了, 在负载系数 $\rho=\lambda/\mu$ 与服务装置的数量成比例的扩大, 可以显著地减少被拒绝的概率 (在平稳的状况下). 对 ρ 的负载系数称呼与随机变量 η 的指数分布有关 (参见 (80)), 这时有 $E\eta=1/\mu$. 因此 ρ 是一个需求服务人的平均服务时间与要进入这个服务系统两个需求服务的人的间隔时间的平均时间的比.

注意, 服务装置被占据的平均数量 (在平稳的状况下) 等于 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\widetilde{p}_k=\rho(1-\widetilde{p}_n)$.

值得注意的是, Erlang 公式在更一般的情况下起作用, 特别是当一个需求服务人的平均服务时间与前面的一样, 等于 $1/\mu$, 但是这时的时间分布不一定是指数分布 (参见 [66]).

补充与习题

1. 试证定义 (1) 等价于, 对每个 $s \in T$ 和任意的 $A \in \mathscr{F}_s, B \in \mathscr{F}_{\geqslant s}$ 满足等式

$$\mathsf{P}(AC|X_t) = \mathsf{P}(A|X_t)\mathsf{P}(C|X_t). \tag{83}$$

注意, 如果 $(\mathscr{F}_s)_{s\in T}$ 是马氏过程 $X = \{X_t, t \in T\}$ 的自然 $\sigma-$ 代数流, 则以满足 (83) 形式的马氏性定义具有**对称性** (相对于 "过去" 和 "将来") 特点, 这意味着, 在固定 "现在" 的情况下, "过去" 和 "将来" 是条件独立的.

2. 设 $X = \{X_t, t \in T\}$ 是马氏过程, $T \subset \mathbb{R}$. 试解释, 为什么 $\{X_t, t \in U\}$, 这里 $U \subset T$, 同样是马氏过程. 特别的, 如果 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 是马氏过程, 则对任意的 $\Delta > 0$, 过程 $X^\Delta = \{X_{k\Delta}, k \geqslant 0\}$ 也是马氏过程. 相反的结论对吗?

3. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是对每个 t 取值于可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 的马氏过程, 且 $(\mathsf{V}, \mathscr{E})$ 是可测空间, 函数 $h_t : \mathsf{S} \to \mathsf{V}, h_t \in \mathscr{B}|\mathscr{E}, t \geqslant 0$. 试证, 对每个 $t \geqslant 0$, 如果 h_t 是一一映射, 则 $Y = \{Y_t = h_t(X_t), t \geqslant 0\}$ 同样是马氏过程. 试举例说明, 如果一一映射的条件不满足, 则这个结论可能不成立.

4. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}$ 的马氏过程, 且 $Y_t = [X_t]$, 这里 $[\cdot]$ 是数的整数部分. $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是否是马氏过程?

5. (与习题 3 比较). 设 $W = \{W(t) = (W_1(t), \cdots, W_m(t)), t \geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动, $X_m = \left\{X_m(t) = \left(\sum\limits_{k=1}^m W_k^2(t)\right)^{1/2}, t \geqslant 0\right\}$ 是**贝塞尔 (Bessel) 过程**, 即过程 W 的向径部分. X_m 是否是马氏过程? 注意, 当 $t \geqslant 0$ 时, 对 $m = 1$ 有 $X_1(t) = |W_1(t)|$.

6. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 和 $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$ 是实马氏过程. 过程 $X + Y = \{X_t + Y_t, t \geqslant 0\}$ 和 $XY = \{X_tY_t, t \geqslant 0\}$ 是否是马氏过程? 对特殊的情况, 当 $Y_t = c(t)$, 这里 $c(t)$ 是确定性函数时, 有何结论?

7. 设 $\{X_k, k = 0, 1, \cdots\}$ 是实马氏过程. 假设对 $t \in [k, k+1), k = 0, 1, \cdots, X_t = (t-k)X_k + (k+1-t)X_{k+1}$, 即研究在 $[0, \infty)$ 上具有节点 (k, X_k) 的连续折线. 过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是否是马氏过程? $Y = \{Y_t = X_{[t]}, t \geqslant 0\}$, 这里 $[\cdot]$ 是数的整数部分, 是否是马氏过程?

8. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是以 1/2 概率取值于 1 和 -1 的独立同分布随机变量. 且 $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \geqslant 1$ 和 $X_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} S_k$. 试证过程 $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$ 不是马氏过程.

9. 试举鞅的例子, 但它不是马氏过程. 试构造出实马氏过程 $X = \{X_t, t \in T\}$, 且对所有的 $t \in T$ 有 $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, 但它不是鞅的例子.

10. 设 $\eta, \xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立随机变量, 且 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 具有 $[0, 1]$ 上均匀分布, η 是具有分布函数 $F_\eta(x)$ 的实随机变量. 假设, 若 $\xi_n \leqslant \eta$, 则 $S_n = 1$, 若 $\xi_n > \eta$, 则 $S_n = -1 (n = 1, 2, \cdots)$. $\{S_n, n \geqslant 1\}$ 是否是齐次马氏过程?

11. 如果条件 (12) 仅对函数 $f(x) \equiv x, x \in \mathbb{R}$, 成立, 实 Gauss 过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是否是马氏过程?

12. 试证实 Gauss 过程 $X = \{X_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$ 是马氏的当且仅当对任意的 $t_1 < t_2 < t_3 (t_1, t_2, t_3 \in T)$ 成立下面的等式

$$r(t_1, t_3) r(t_2, t_2) = r(t_1, t_2) r(t_2, t_3),$$

这里 $r(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t), s, t \in T$. 分式 Brown 运动是否是马氏过程?

13. Ornstein – Uhlenbeck 过程 (第三章定义 13) 是否是齐次马氏过程?

14. 设 $\mathsf{P}(X_0 = 1) = \mathsf{P}(X_0 = -1) = 1/2$, X_0 且与具有强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程 $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ 独立. 设过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 在 Poisson 过程跳跃点处改变自己值为相反符号的值. 过程 X 称作*电报信号*, 是否是马氏过程? 试画出这个过程的轨道图形.

15. 对 $x \geqslant 0$ 设 $\tau_x = \inf\{t \geqslant 0 : W(t) = x\}$, 这里 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程. 试证 $\{\tau_x, x \geqslant 0\}$ 是独立增量过程 (因而, 根据定理 3 是马氏过程).

16. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是马氏过程. 对 $s > 0$ 定义过程 $Y = \{Y_t = X_{s-t}, t \in [0, s]\}$. Y 是否是马氏过程? 如果 X 是齐次的, 过程 Y 也一定是齐次过程吗?

17. 试证 Brown 桥 (参见第五章 §9 的定义) 是非齐次马氏过程.

18. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是在 $[0, \infty)$ 上的随机过程, $Y = \{Y_t = (X_t, t), t \geqslant 0\}$. 试证过程 X 与 Y 是马氏的只能是同时的. 试证, 如果 Y 是马氏过程, 则这过程一定是齐次的. 马氏过程 X 与 Y 的转移函数有何联系?

非常有趣的是马氏过程具有同样的有限维分布, 但是可能有不同的转移函数, 正如下面的例子给出的.

例 3. 设 $\mathsf{S} = \mathbb{R}, \mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}), T = [0, \infty)$. 取初始分布 $\mathsf{Q} = \delta_0$ (狄拉克 (Dirac) 测度, 集中于 0 点的). 对 $x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 引入函数

$$P(x, t, B) = \mathbf{1}_B(x), \quad \widetilde{P}(x, t, B) = \mathbf{1}_B(x + \mathrm{sgn}\, x),$$

这里, sgn x 是根据 (IV.16) 所定义的.

很容易看出, P 和 $\widetilde{P}$ 具有在 §12 中的性质 1°)~4°), 因此, 是转移函数. 利用 (35) 式, 可得由 P 和 $\widetilde{P}$ 导出过程的有限维分布, 恒等于 0.

19. 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是对每个 t 取值于某个 Polish 空间 S 的齐次马氏过程. 试证, 存在可测函数 $h_s : \mathsf{S} \times [0,1] \to \mathsf{S}, s \geqslant 0$ (即 $h_s \in \mathscr{B}(\mathsf{S}) \otimes \mathscr{B}([0,1]) | \mathscr{B}(\mathsf{S}), s \geqslant 0$), 和具有均匀分布的随机变量 $\theta_{t,s}$, 它是独立于 $\{X_u, 0 \leqslant u \leqslant t\}$ 对任意的 $t, s \geqslant 0$, 使得有 $X_{t+s} = h_s(X_t, \theta_{t,s})$ a.s., 对所有的 $t, s \geqslant 0$.

20. 设取值于 $\mathbb{R}^m$ 的齐次马氏过程, 它的转移函数具有性质: 对所有的 $x, y \in \mathbb{R}^m, t \geqslant 0, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 有 $P(x, t, B) = P(x + y, t, B + y)$. 试证, 这个过程具有独立增量.

21. 试证, 具有强度为 $\lambda > 0$ 的标准 Poisson 过程服从 "强大数定律": 当 $t \to \infty$ 时, 有 $N(t)/t \to \lambda$ a.s..

22 (**"等待时间的悖论"**). 设根据第二章定理 2, 利用具有指数 (参数为 λ) 独立随机变量序列 $\{\xi_j\}$ 构造的 Poisson 过程 $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$. 试求, 对固定的 $t > 0$ 随机变量 $\zeta_t = \sum\limits_{j=1}^{N_t+1} \xi_j - t$ 的分布, 即积累部分和 $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j, k \geqslant 1$, "穿越" 水平 t 的量. 与这个相关的是下面**等待问题**. 设 ξ_j 是在给定的车站上, 两辆公共汽车到达之间随机时间的区间. 试问如果是时刻 t 在车站将要等候多少时间才能等到下一辆公共汽车?

23 (习题 22 的继续). 试证, 对每个固定的时刻 $t > 0$, 前面所引入的随机变量 $\zeta_t, \xi_{N_t+2}, \xi_{N_t+3}, \cdots$ 构成具有参数为 λ 指数分布的独立随机变量序列.

与 Poisson 过程有关的, 我们将较仔细地讨论*没有重复点的随机点过程*的基本构造.

设在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定随机变量序列 $\{\tau_k\}_{k\geqslant 1}$, 使得对 $\omega \in \Omega$. 这里 $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$ 有

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时有 } \tau_n \to \infty. \tag{84}$$

定义 11. 所谓*点随机测度* $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \Omega \to \overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \bigcup \{\infty\}$ 由

$$\mu(B, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{t_k(\omega)}(B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \quad \omega \in \Omega, \tag{85}$$

给定, 这里, 序列 $\{\tau_k\}_{k\geqslant 1}$ 如前面所述, δ_x 是 Dirac 测度.

对每个固定的 $\omega \in \Omega_0$, 显然, $\mu(\cdot, \omega)$ 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的取整数值的测度. 条件 (84) 导致 $\mu(\cdot, \omega)$ 是*拉东* (Radon) *测度*, 即在 $\mathbb{R}_+$ 中紧子集上有限测度, 因此, $\mu(\cdot, \omega)$ 对这些 ω 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上 $\sigma-$ 有限测度.

注意, 引入的构造给出了*没有重复点*随机点测度, 即测度, 对它有 $\mu(\{t\}, \omega) \leqslant 1$, 当所有的 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $\omega \in \Omega_0$.

定义 12. 对 $t > 0$ 以如下方式引入*随机点过程* $Y = \{Y(t), t \geqslant 0\}$ (这里 $Y(0) = 0$):

$$Y(t, \omega) = \mu((0, t], \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,t]}(\tau_k(\omega)), \tag{86}$$

这里点随机测度 μ 是由 (85) 式给出的.

显然, 对 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \cdots\}$ 有 $\{Y(t) \geqslant n\} = \{\tau_n \leqslant t\}$, 因此, 对每个 $t \in \mathbb{R}_+, Y(t) \in \mathscr{F}|\mathscr{A}$, 这里 $\mathscr{A}$ 是 $\sigma-$ 代数, 由所有有限或者可数 $\overline{\mathbb{Z}}_+$ 的子集所组成.

24. 设对所有的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), m(B) = \mathsf{E}\mu(B, \cdot)$, 这里 $\mu(B, \cdot)$ 是由 (85) 式给出. 函数 $m(\cdot)$ 是否是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的测度? 具有强度为局部有限测度 m 的 Poisson 过程是否可以表示成 (86) 式的形式?

25 (与第五章定理 14 比较). 试证随机点过程 (86) 式是 Poisson 的, 如果 Y 是独立增量的, 且在 $\mathbb{R}_+$ 上随机连续的 (参见 (I.56)).

26. 根据定理 3, 随机变量 $\tau_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k, k \in \mathbb{N}$, 如果各项是实独立随机变量, 则构成马氏链. 如果 $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是满足条件 (84) 式的任意马氏链, 那么 (86) 式是否是马氏过程?

定义 13. 设在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定具有强度为 $\lambda = 1$ 的 Poisson 过程 $N = \{N(t), t \geqslant 0\}$ 和与它独立的随机过程 $\Lambda = \{\Lambda(t), t \geqslant 0\}$, 其具有 a.s. 不降, 有限, 右连续, 从 0 出发的轨道. 被称作*考克斯* (Cox) *过程* $Z = \{Z(t), t \geqslant 0\}$, 这里 $Z(t,\omega) = N(\Lambda(t,\omega),\omega)$, 对 $t \geqslant 0, \omega \in \Omega$.

27. Cox 过程是否是马氏过程?

定义 14. 称作随机过程 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 为 "**分数白噪声**", 如果

$$X(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(t - \tau_k(\omega)), \quad t \geqslant 0 \tag{87}$$

是有限的, 这里, 有界 Borel 函数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 随机变量 $\tau_k (k \in \mathbb{N})$ 满足条件 (84) 式 (保证对每个 $t \geqslant 0$ 级数 (87) 式在集合 Ω_0 上以概率 1 收敛).

在其他的一些文献中会遇到一些与 "分数白噪声" 相关的问题. 例如, 在 (87) 式中引入随机振幅和规范因子. 甚至于研究给定在 $\mathbb{R}^d$ **上分数白噪声的随机场**.

28. 试求过程 (87) 式的协方差函数, 如果序列 $\{\tau_k\}_{k\geqslant 1}$ 给出了具有强度为 λ 的 Poisson 随机点过程. 如果有界函数 ϕ 是 Lebesgue 可积的, 是否对每个 $t \geqslant 0$, 级数 (87) 式就以概率 1 收敛.

给出*标值随机点过程*的定义, 它是前面引入的 "随机点过程" 概念的自然而然的推广. 假设除了随机变量序列 $\{\tau_k\}_{k\geqslant 1}$ 满足条件 (84) 式的之外, 在同一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上有某个实随机变量序列 $\{\eta_k\}_{k\geqslant 1}$, "栓靠" 在时刻 $\tau_k, k \geqslant 1$ 上. 例如, 可以想象在随机时刻 τ_k 保险公司要付出一些随机数值 η_k. 下面将给出量 $\eta_k, k \geqslant 1$ 为 "标值" 或 "标记", 直观解释.

定义 15. 被称作*标值*随机点过程是下面形式的过程 (以集合 C 为指标的):

$$\widetilde{\mu}(C;\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(\tau_k(\omega),\eta_k(\omega))}(C), \quad C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad \omega \in \Omega.$$

函数

$$Y(t, D;\omega) = \widetilde{\mu}((0,t] \times D;\omega), \quad t \geqslant 0, \quad D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

称作*计数函数* (与 (86) 式比较).

根据 (85) 式有

$$\mu(B,\omega) = \widetilde{\mu}(B \times \mathbb{R}, \omega).$$

除此之外,

$$Y(t, D; \omega) = \begin{cases} 0, & \text{当 } Y(t, \omega) = 0, \\ \sum_{k=1}^{Y(t)} \mathbf{1}_D(\eta_k), & \text{当 } Y(t) \geqslant 1, \end{cases} \tag{88}$$

这里过程 Y 由公式 (86) 给出的.

29. 对固定的 $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 试画出 $Y(t, D), t \geqslant 0$ 的轨道图形.

30. 设 $N = \{N(t), t \geqslant 0\}$ 是具有伴随测度 $m = m(\cdot)$ 的 Poisson 过程, 它的跳跃点 N 给出了序列 $\{\tau_k\}_{k\geqslant 1}$. 且设 $\{\eta_k\}_{k\geqslant 1}$ 是独立同分布实随机变量, $\mathrm{Law}(\eta_k) = \widetilde{\mathsf{P}}$. 取 $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 使得 $\widetilde{\mathsf{P}}(D) > 0$. 试证, 由公式 (88) 所确定的 "疏伐过程" 是具有伴随测度 $m(\cdot)\widetilde{\mathsf{P}}(D)$ 的 Poisson 过程.

关于随机点过程和场, 参见, 例如, [111, 178]; 特别是关于标值随机点过程, 参见 [156].

现在, 给出关于 (标准的) 马氏链 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 的无穷小矩阵 Q 和链本身行为之间联系的直观表示. 设

$$q_i := -q_{ii} < \infty, \quad \text{对所有的 } i \in \mathsf{S}. \tag{89}$$

过程 X 在半直线 $[0, \infty)$ 上是随机连续的, 根据第一章定理 13, 它有可分修正 (借助于任意的一个可数的可分集 $\mathbb{R} \subset [0, \infty)$). 设在时刻 $s \geqslant 0$, 过程以概率 $\mathsf{P}(X(s) = i) \neq 0$ 处于状态 i. 这时, 对任意的 $t > 0$ (考虑到过程 X 的可分性) 有

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X(u) = i, s \leqslant u \leqslant s + t | X(s) = i) \\ &= \frac{1}{\mathsf{P}(X(s) = i)} \mathsf{P}(X(u) = i, s \leqslant u \leqslant s + t) \\ &= \frac{1}{\mathsf{P}(X(s) = i)} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X(u) = i, \quad \text{对} \quad u = s + tk2^{-n}, k = 0, \cdots, 2^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (p_{ii}(t2^{-n}))^{2^n} = \exp\{-q_i t\}, \end{aligned} \tag{90}$$

因为由 q_i 的定义得到

$$p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h) \quad \text{当 } h \to 0+ \text{时}.$$

如果 $t = 0$ 则公式 (90) 左半部分等于 1, 因此给出的关系式对所有的 $t \geqslant 0$ 成立.

公式 (90) 左半部分是在时刻 s 时过程 X 处在状态 i 的条件下, 在时刻 s 以后继续待在状态的时间不少于 t 的条件概率. 这样, 结果不依赖于 s, 好像对齐次过程以前发生的那样. 因此, 可以谈论过程从任意的时刻起, X 待在状态 i 时间长度.

这样, 就证明了 (与第二章定理 2 比较)

定理 12. 设齐次马氏链 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 满足条件 (89). 这时, 过程待在任意的状态 i 条件时间长度是具有参数 q_i 的指数分布.

对马氏链, 正如在 §1 中所指出的, 重要的是状态的分类问题 (常返的, 周期的状态等). 对离散时间的马氏链, 这方面内容可以参见, 例如, [85, 78, 101].

定义 16. 状态 i, 对它有 $0 \leqslant q_i < \infty$, 称作逗留的. 当 $q_i = 0$ 时, 状态 i 称作吸引的. 如果 $q_i = \infty$, 状态 i 称作瞬时的.

如果过程进入到吸引的状态, 则它将 "永远" 待在那里 (这是由于 (90) 式, 当 $q_i = 0$ 时).

为什么称作 "瞬时的状态" 将在习题中解释.

31. 设在状态 i 有 $q_i = \infty$. 这时过程 X 待在那里正的时间长度的概率为 0, 即进入到这个状态, 瞬间即离开它.

具有瞬时状态的马氏链是非常复杂的. 有趣的是, 存在齐次马氏链的例子, 它的所有状态都是瞬时的 (参见 [21]).

设过程 X 是保守的 (参见 (63) 式). 当 $q_i \neq 0$ 量 $q_{ij}/q_i, j \neq i$ 可以解释为由状态 i 到状态 j 转移概率的强度. 准确地说, 设对 $j \neq i, t > 0$

$$F_{ij}(t) := \mathsf{P}(X(s+t) = j | X(s) = i, X(s+t) \neq i).$$

很容易看出

$$F_{ij}(t) = p_{ij}(t)/(1 - p_{ii}(t)) \to q_{ij}/q_i \quad \text{当 } t \to 0+ \text{ 时} \tag{91}$$

如果 $0 < q_i < \infty$ 和 $\sum\limits_{j \neq i} q_{ij} < q_i$, 则 $1 - \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}/q_i$. 可以看作 "过程进入到无穷" 概率的强度.

上面给出的矩阵 Q 元素的解释, 自然而然地用下面的方法可以构造马氏链, 该方法属于 Doob.

设 S 是有限或可数集, $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 是具有无穷小矩阵 Q 的保守马氏链, 且 $q_i \in (0, \infty), i \in \mathsf{S}$. 递推地构造分别取值于 S 和 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 的随机变量序列 $\{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$ 和 $\{\tau_n\}_{n \geqslant 1}$, 使得 η_1 具有任意的分布,

$$\mathsf{P}(\tau_1 > t | \eta_1 = i) = e^{-q_i t}, \quad t > 0, \quad i \in \mathsf{S}, \tag{92}$$

当 $n \geqslant 1, i, j, i_1, \cdots, i_n \in \mathsf{S}, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$ 设

$$\mathsf{P}(\eta_{n+1} = j | \tau_1 = x_1, \cdots, \tau_n = x_n, \eta_1 = i_1, \cdots, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \eta_n = i_n) = q_{ij}/q_i, \quad i \neq j,$$
$$\mathsf{P}(\tau_{n+1} - \tau_n > t | \tau_1 = x_1, \cdots, \tau_n = x_n, \eta_1 = i_1, \cdots, \eta_n = i_n, \eta_{n+1} = j) = e^{-q_j t}. \tag{93}$$

32. 试证, 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上存在前面所述的随机变量序列 $\{\eta_n\}_{n \geqslant 1}$ 和 $\{\tau_n\}_{n \geqslant 1}$, 且满足条件 (92) 和 (93) 式. 这时, $0 \leqslant \tau_0 < \tau_1(\omega) < \cdots$ a.s.. 是否有 $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ a.s.? 试证, 当 $\sup\limits_i q_i < \infty$ 时, 该结论显然成立.

33. 设 $\tau_0(\omega)=0$ a.s.. 利用在习题 32 中所述的随机变量序列 $\eta_n,\tau_n(n\geqslant 1)$, 认为满足条件 (84) 式, 引入过程 $Y=\{Y(t),t\geqslant 0\}$, 假设对 $n\geqslant 1$ 当 $\tau_{n-1}(\omega)\leqslant t<\tau_n(\omega)$ 时, $Y(t,\omega)=\eta_n(\omega)$ (对 ω 当那些 $n\geqslant 1$ 使得 $\tau_{n-1}(\omega)=\tau_n(\omega)$, 设 $Y(t,\omega)=0$). 试证 Y 是具有与过程 X (它确定了矩阵 Q) 同样有限维分布的马氏过程. 如果某个量 q_i 等于 0, 如何修正引入的构造?

与上面最后两个习题有联系的应该注意下面的习题.

34. 试证, $\sup\limits_i q_i<\infty$ 当且仅当 $t\to 0+$ 时一致地对 $i\in\mathrm{S}$ 有 $p_{ii}(t)\to 1$ (或者等价的, 一致地对 $i,j\in\mathrm{S}$, 当 $t\to 0+$ 有 $p_{ij}(t)\to\delta_{ij}$).

35. 试举出不满足条件 (49) (标准的) 例子. 试举出满足性质 (49) 式, 但不满足条件 (89) 的例子.

在习题 33 中指明了, 如何才是保守的无穷小矩阵 Q, 构造马氏过程, 其具有无穷小矩阵为 Q 的转移概率半群. 这个问题的另一种提法是根据半群的生成元 (无穷小矩阵) 来恢复半群 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ (参见, 例如, [23]). 如果我们成功地构造了随机半群 $(P(t))_{t\geqslant 0}$, 它具有给定的矩阵 Q 为无穷小矩阵, 则随后定理 5 保证构造过程本身具有转移矩阵 $P(t)$ (甚至于是一族马氏过程, 因为是依赖于初始分布而改变). 为此, 在这方面提出了下面的习题

36. 设状态空间 S 是由有限数 N 个元素所组成, 转移矩阵 $P(t)$ 是标准的. 试证, 这时这个矩阵有如下的表示:

$$P(t)=\exp\{tQ\},\quad t\geqslant 0, \tag{94}$$

这里 $N\times N$ 矩阵 Q 满足条件:

$$\text{对 } i\neq j \text{ 有 } q_{ij}\geqslant 0 \text{ 和对每一个 } i \text{ 有 } \sum_j q_{ij}=0 \tag{95}$$

相反的, 如果矩阵 Q 满足条件 (95), 则公式 (94) 确定一个标准的转移概率矩阵.

现在研究更一般的具有实的元素的矩阵 $Q=(q_{ij})_{i,j\in\mathrm{S}}$, 这里 S 是可数的,

$$\text{且当 } i\neq j \text{ 时有 } q_{ij}\geqslant 0, q_i=-q_{ii}\geqslant 0,\quad \text{对 } i\in\mathrm{S} \text{ 有 } \sum_j q_{ij}\leqslant 0. \tag{96}$$

提出如下的问题: 是否存在随机半群 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ 具有自身的无穷小矩阵是矩阵 Q?

寻求这个问题的解, 最方便是从半随机矩阵类 $(P(t))_{t\geqslant 0}$ 开始, 它正如以前所述, 满足条件 (37), 而在 (39) 式中对条件 $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1, t\geqslant 0, i\in\mathrm{S}$ 给予了较少的限制要求 $\sum\limits_j p_{ij}(t)\leqslant 1, t\geqslant 0, i\in\mathrm{S}$. 这个问题的解通常称作 Q – 解, 意味着是: 如果 $\sum\limits_j p_{ij}(t)=1$ 对所有的 $t\geqslant 0, i\in\mathrm{S}$, 则说是正常解 (或过程), 而如果满足的只是不等式 $\sum\limits_j p_{ij}(t)\leqslant 1, t\geqslant 0, i\in\mathrm{S}$, 则说是非正常解. 在第一种情况下, 事实上存在着马氏

链 (自然是可以改变初始分布), 它具有转移概率 $p_{ij}(t), t \geqslant 0, i,j \in \mathrm{S}$. 在第二种情况下, 也可以构造相应的马氏过程 $\widehat{X}$, 它是扩充了状态空间 S, 附加了补充点, 例如说 ∞, 且对它们定义如下面形式的转移概率 $\widehat{p}_{\cdot\cdot}(t)$:

$$\text{当 } i,j \in \mathrm{S}, \quad \widehat{p}_{ij}(t) = p_{ij}(t) \text{ 和 } \widehat{p}_{\infty,j}(t) = \delta_{\infty,j}, \quad \widehat{p}_{i,\infty}(t) = 1 - \sum_j p_{ij}(t), \quad t \geqslant 0.$$

与上所述有关的是研究 Kolmogorov (向前和向后) 方程组解的存在唯一性问题. 许多作者利用不同的方法研究了该问题. 费勒 (Feller) 利用拉普拉斯 (Laplace) 变换. 饶太尔 (Reuter) 和列杰尔曼 (Lederman) 采用了用 “截矩阵” 逼近矩阵 Q 的方法. 加藤敏夫 (Kato) 借助于扰动理论 (详细参见, 例如, [1]).

有趣的是, 方程 (65), (72) 本身可以认为或者是狭意义下, (即所有的 $p'_{ij}(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是连续, 且研究的方程对所有的 $t \geqslant 0$ 是成立的), 或者广意义下, 即 $p_{ij}(t)$ 绝对连续, 且研究的方程对几乎所有的 (依 Lebesgue 测度) $t \geqslant 0$ 是成立的.

37. 试证, 在上述的两种意义下 (在狭意义下和广意义下), 对 Kolmogorov 方程组来说是等价的. 对向前方程, 这个结论得到需要克服相当大的困难.

定理 13. *设满足条件 (96). 这时, 存在 $Q-$ 解, 既满足 Kolmogorov 向前方程组, 也满足 Kolmogorov 向后方程组. 除此之外, 向后方程组 (64), 在半随机矩阵类中有唯一正常 $Q-$ 解的充要条件是同时也对向前方程组 (71) 成立.*

详细的证明可以参见, 例如, [1].

定理 14 ([180]). *设矩阵 Q 满足条件 (96), 且是保守的. 这时, 下面两条件之一都是存在唯一 $Q-$ 解的充要条件.*

1. 对某个 $\lambda > 0$ 方程 $(Q - \lambda I)x = 0$ 的唯一有界解是 $x = (0,0,\cdots)^*$, 其有界解意味着 $\sup_i |x_i| < \infty$.

2. 对某个 $\lambda > 0$ 方程 $(Q - \lambda I)x = 0$ 的唯一非负有界解 $x = (x_1, x_2, \cdots)^*$, 其中所有 $x_i \geqslant 0$, 对该方程来说是 $x = (0,0,\cdots)^*$.

38 (参见习题 34). 试证, 如果 $\sup_i q_i < \infty$, 则 Kolmogorov 向前、向后方程组有唯一解.

有趣的是, Kolmogorov 方程组解的存在唯一性问题与马氏链轨道性质有关. 正如下面的定理.

定理 15 (参见, [82; p.341]). *设所有的 $q_i < \infty$. 这时 Kolmogorov 向前、向后方程组成立的充要条件是, 几乎所有的轨道具有下面的性质: 如果, 从一方面 (从左面或者从右面) 当 $s \to t$ 时有 $X(s,\omega) \to \infty$, 则当 $s \to t$ 时有 $X(s,\omega) \to \infty$ 从两方面.*

对 Kolmogorov 方程组解的唯一与不唯一性, 生灭过程是一个很好的例子.

定义 17. 具有状态空间 $\mathsf{S}=\{0,1,\cdots\}$ 的齐次马氏过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 称作生灭过程, 如果它的无穷小矩阵 Q 具有下面的形式:

$$q_{i,i-1}=\mu_i,\quad q_{ii}=-(\lambda_i+\mu_i),\quad q_{i,i+1}=\lambda_i,\quad q_{ij}=0,\ \text{当}\ |i-j|>1,$$

这里 $\mu_0=0,\mu_i>0,i\geqslant 1$ 和 $\lambda_i>0,i\geqslant 0$. 如果对所有的 $i\geqslant 0$ 有 $\mu_i=0$, 则称过程是纯生过程, 而如果对所有的 $i\geqslant 0$, 有 $\lambda_i=0$, 则称过程是纯灭过程.

39. 设纯生过程, 且 $\sum\limits_i\lambda_i^{-1}<\infty$. 试证, 这时 Kolmogorov 向前方程组有唯一解, Kolmogorov 向后方程组有无穷多个解. 试证, 对纯灭过程, 且 $\sum\limits_i\mu_i^{-1}<\infty$, 则 Kolmogorov 向后方程组有唯一解, Kolmogorov 向前方程组有无穷多个解, 其中正好有一个正常解.

为了对生灭过程的一般结果的表述, 引进如下面的符号. 设

$$\pi_0=1,\quad \pi_n=(\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1})/(\mu_0\mu_1\cdots\mu_n),\quad n\in\mathbb{N},$$
$$R=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\pi_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\pi_i,\quad S=\sum_{n=2}^{\infty}\pi_n\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i\pi_i)^{-1},\quad T=\sum_{n=0}^{\infty}(\pi_n+(\lambda_n\pi_n)^{-1}).$$

定理 16 (Leiderman – Reuter). 设矩阵 Q 是保守的, 且满足条件 (96). 这时,

1. 若 $R=\infty$, 则正好存在一个 $Q-$ 解, 它是正常解, 且满足向前方程组.

2. 若 $R<\infty$ 和 $S=\infty$, 则有无穷多个 $Q-$ 解, 且仅有一个满足向前方程组, 但该解是非正常解.

3. 若 $R<\infty$ 和 $S<\infty$, 它等价于条件 $T<\infty$, 则存在无穷多个 $Q-$ 解, 且满足向前方程组, 但仅有一个解是正常解.

前面研究的只是离散状态空间 S 的马氏链所满足的 Kolmogorov 向前、向后方程组. 应该指出的是, 与此相关的是在 1931 年 Kolmogorov 的经典工作 "概率论中的分析方法" (参见 [33]). 在那里对更广泛空间, 特别是对 $\mathsf{S}=\mathbb{R}^d$ 给出了向前、向后方程组. 这时, 相应的向前、向后方程组已经是偏微分方程. (这样的向前方程的一些类型, 较早在物理中被福克 (Fock) – 普朗克 (Planck) 研究过.) 关于这方向的研究, 可以导出扩散过程的模型, 参见, 例如, [12, 76, 192]. 在第八章我们将作为随机微分方程的解来研究扩散过程的构造.

在一般理论中与马氏过程概念相提并论, 且非常重要的是随机过程马氏族的概念.

设 $(\mathsf{S}_t,\mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 是 Borel 空间, $T\subset\mathbb{R}$, 且 $P(s,x,t,B)$ 是转移函数. 取任意的 $s\in T$ 和作为初始分布取测度 $\mathsf{Q}_s(\cdot)=\delta_x(\cdot)$, 这里 $x\in\mathsf{S}_s$. 在某个概率空间上存在马氏过程

$$X^{s,x}=\{X_t^{s,x},t\in T_s:=[s,\infty)\textstyle\bigcap T\},$$

具有给定的转移函数, 使得有 $X_s^{s,x}=x$ a.s.. 借助于 Kolmogorov 定理, 这个过程 $X^{s,x}$ 可以在空间 $(\mathsf{S}_{T_s},\mathscr{B}_{T_s})$ 上直接地给出 (参见 (I.42)), 且赋予概率 $\mathsf{Q}_{s,x}=\mathrm{Law}(X^{s,x})$. 在 $\Omega=S_T$ 上, 利用下面的公式重新定义过程

$$Y_t^{s,x}(\omega):=X_t^{s,x}(\pi_{T,T_s}\omega),\quad t\in T_s,\quad \omega\in\mathsf{S}_T. \tag{97}$$

这里 π_{T,T_s} 表示函数由集合 T 到集合 T_s 的压缩映射. 引入 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_{\geqslant s}:=\pi_{T,T_s}^{-1}\mathscr{B}_{T_s}$, 且在其上定义测度 $\mathsf{P}_{s,x}=\mathsf{Q}_{s,x}\pi_{T,T_s}^{-1}$.

不难看出, $Y^{s,x}=\{Y_t^{s,x},t\in T_s\}$ 是在 $(\Omega,\mathscr{F}_{\geqslant s},\mathsf{P}_{s,x})$ 上的随机过程.

定理 17. 对每个 $s\in T$ 和 $x\in\mathsf{S}_s$, 过程 $Y^{s,x}=\{Y_t^{s,x}(\omega),t\in T_s,\omega\in\Omega\}$ 是在 $(\Omega,\mathscr{F}_{\geqslant s},\mathsf{P}_{s,x})$ 上马氏过程, 且具有转移函数 $P(s,x,t,B)$, 除此之外, (依测度 $\mathsf{P}_{s,x}$) 有 $Y_s^{s,x}=x$ a.s..

证. 因为 $Y_s^{s,x}=x$, 等式 $\mathsf{Q}_s=\delta_x$ 是显然的. 验证, 对任意的点 $u,t\in T(u\leqslant t)$ 和 $B\in\mathscr{B}_t$ 有

$$\mathsf{P}_{s,x}(Y_t^{s,x}\in B|Y_u^{s,x})=P(u,Y_u^{s,x},t,B)\quad (\text{a.s. 依测度 }\mathsf{P}_{s,x}).$$

为此只需要证, 对任意的 $D\in\mathscr{B}_u$ 有

$$\mathsf{P}_{s,x}(Y_t^{s,x}\in B,Y_u^{s,x}\in D)=\int_{\{Y_u^{s,x}\in D\}}P(u,Y_u^{s,x},t,B)d\mathsf{P}_{s,x}. \tag{98}$$

利用在空间 $(\mathsf{S}_{T_s},\mathscr{B}_{T_s},\mathsf{Q}_{s,x})$ 上马氏过程 $X^{s,x}$ 有

$$\begin{aligned}\int_{\{Y_u^{s,x}\in D\}}P(u,Y_u^{s,x},t,B)d\mathsf{P}_{s,x}&=\int_{\{X_u^{s,x}\in D\}}P(u,X_u^{s,x},t,B)d\mathsf{Q}_{s,x}\\&=\mathsf{Q}_{s,x}(X_t^{s,x}\in B,X_u^{s,x}\in D)=\mathsf{P}_{s,x}(Y_t^{s,x}\in B,Y_u^{s,x}\in D),\end{aligned}$$

于是证明了 (98) 式.

过程 $Y^{s,x}$ 的马氏性, 即性质 (12) 类似可以验证. □

注意, 对过程 $Y^{s,x}$ 来说, (97) 式的表示是相当的复杂, 在积分由一个空间过渡到另一个空间的时候, 为了方便应用公式 (I.23), 引入下面的简化. 显然对 $t\in T_s,\omega\in\Omega$ 有 $Y_t^{s,\omega}(\omega)=\omega(t)$. 另一方面可以说, 我们已经有表示完全化了一个直接给出的过程 $Y=\{Y(t),t\in T\}$, 即 $Y(t,\omega)=\omega(t),t\in T,\omega\in\Omega=\mathsf{S}_T$, 它可以对不同的 T 中的 s, 当 $t\geqslant s(t\in T)$ 时进行研究. 这个过程, 可以看作在 T_s 和 $(\Omega,\mathscr{F}_{\geqslant s},\mathsf{P}_{s,x})$ 上的过程, 它是具有给定的转移函数马氏的, 且在时刻 s 它从点 $x\in\mathsf{S}_s$ (a.s. 依测度 $\mathsf{P}_{s,x}$) 开始.

因为 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_{\geqslant s}$ 是由对 $t\in T_s$ 空间 S_T 的坐标映射组 $\pi_{T,t}$ 所产生的, 且 $\mathscr{F}_{\geqslant s}$ 如前面所用的一样, 表示已经完全化了. 换句话说, $\mathscr{F}_{\geqslant s}=\sigma\{Y_t,t\in T_s\}$.

定义 18. 在概率空间 $(\mathsf{S}_T,\mathscr{B}_T,\mathsf{P}_{s,x})$ 上所引入的马氏过程 $Y^{s,x}$ 称作随机过程马氏族 (马氏族).

因为对每个 $s \in T$ 有 $\mathscr{F}_{\geqslant s} \subset \mathscr{B}_T$, 则测度 $\mathsf{P}_{s,x}$ 可以延拓到 $\mathscr{F} = \mathscr{B}_T$, 使得对那些不包含在 $\mathscr{F}_{\geqslant s}$, 但是 $\mathscr{B}_T$ 中集合的测度为 0. 于是这样就出现了可能在同一个可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上给出了不同的测度 $\mathsf{P}_{s,x}$ 对 $s \in T, x \in \mathsf{S}_s$. "出现" 了在时刻 s 由点 x 出发 (a.s. 依测度 $\mathsf{P}_{s,x}$) 的一些马氏过程, 且在这族中的所有过程 $Y^{s,x} = \{Y_t^{s,x}, t \in T_s\}$ 都将具有同一给定的转移函数.

很容易解释对马氏族转移函数的含义: 对 $x \in \mathsf{S}_s, B \in \mathscr{B}_t$ 有

$$\mathsf{P}_{s,x}(Y_t^{s,x} \in B) = P(s,x,t,B) \quad (\text{a.s. 依测度 } \mathsf{P}_{s,x}),$$

其中 $s,t \in T (s \leqslant t)$. 这里我们利用了 $\mathsf{P}(\xi \in B|\eta) = \mathsf{P}(\xi \in B)$ a.s., 如果 $\eta = c$ a.s., 这里 c 是常数.

马氏性的定义 (1) 式以及我们所研究的其他定义可以向不同方向进行推广. 例如, 在小册子 [23] 中给出了马氏过程的定义, 它的生存时间是随机的, 即轨道可以在随机时刻可以断掉 (可以直观地想象突然间粒子 "毁灭" 了). 为了将马氏性的概念推广到随机场上, 我们还需要下面的定义.

定义 19. 设给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 和 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{E}, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{F}$. 称 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{E}$ 分离 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$, 如果对任意的 $A_k \in \mathscr{A}_k, k = 1, 2$, 有

$$\mathsf{P}(A_1 A_2|\mathscr{E}) = \mathsf{P}(A_1|\mathscr{E})\mathsf{P}(A_2|\mathscr{E}). \tag{99}$$

根据这个定义, 关系式 (83) 意味着, 对每个 $t \in T$, $\sigma-$ 代数 $\sigma\{X_t\}$ 分离 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_t$ 和 $\mathscr{F}_{\geqslant t}$.

40 (与 (1) 式比较). 试验证, 如果 $\mathscr{E}$ 分离 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$, 则 $\mathscr{E}$ 分离 $\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{E}$ 和 $\mathscr{A}_2 \vee \mathscr{E}$ (如以前所定义, $\mathscr{A} \vee \mathscr{E} = \sigma\{\mathscr{A}, \mathscr{E}\}$). 验证条件 (99) 等价于, 对所有的 $A \in \mathscr{A}_2$ 有

$$\mathsf{P}(A|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{E}) = \mathsf{P}(A|\mathscr{E}).$$

设 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{E}_\alpha \subset \mathscr{A}_1$ 和对每个 $\alpha \in I$, $\sigma-$ 代数 $\mathscr{E}_\alpha$ 分离 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 则有 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathscr{E}_\alpha$ 分离 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$. 如果满足 (99) 式, 则 $\mathscr{A}_1 \bigcap \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{E}$. 特别的, 因为 $\sigma\{X_t\} \subset \mathscr{F}_t \bigcap \mathscr{F}_{\geqslant t}$, 在 (83) 中作为最小分离 $\sigma-$ 代数.

注意, $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 的独立性等价于它们被平凡 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{E} = \{\varnothing, \Omega\}$ 所分离.

简述, 当参数集 T 不一定是数轴 $\mathbb{R}$ 上的子集的情况.

随机函数 $X = \{X_t, t \in T\}$ 产生出 $\sigma-$ 代数族 $\mathscr{A}(U) = \sigma\{X_t, t \in U\}, U \subset T$. 在一般的情况下, 这里自然没有 "过去" 和 "将来" 的概念, 而借助于它们的很容易定义马氏性的概念. 因此, 对引入马氏随机函数 $U_1, U_2 \subset T$, 什么样的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A}(U_1)$ 和 $\mathscr{A}(U_2)$ 可能有不同的 "过去" 和 "将来"的定义, 又什么样的 $\sigma-$ 代数可以去分离 (参见, 例如, [62; 第 2 章], 那里研究 $\sigma-$ 代数族, 其指标为局部紧距离空间 T 中某个

开集族 Λ). 我们在这里将不涉及广义随机场的马氏性问题. 关于在格点 $\mathbb{Z}^d$ 上吉布斯 (Gibbs) 场和马氏场可参见, 例如, [54].

对要进一步学习马氏过程和场, 可参见 [23, 24, 47, 56, 59, 62, 76, 82, 107, 113, 150, 184].

第七章

平稳过程. 离散与连续时间

内容摘要: 正交随机测度及其 σ - 有限构造 (均方) 测度. 根据给定的构造 (均方) 测度来构造正交随机测度. 对正交随机测度的积分及其性质. 关于相关函数谱分解卡鲁宁 (Karhunen) 定理以及用对正交随机测度的积分来表示该过程. 广义平稳过程及其相关函数. 赫格洛茨 (Herglotz) 定理. 博赫纳 (Bochner) – 辛钦 (Khinchin) 定理. 连续和离散时间平稳过程的谱表示. 在 $L^2(\Omega)$ 空间中的遍历性. 滑动平均过程. 相关函数及谱密度的统计估计. 线性预测问题. 规则和奇异过程. 沃尔德 (Wold) 分解. 规则过程作为物理上可实现的滤波器. 规则过程的柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 准则. Kolmogorov – 塞格 (Szego) 定理.

§1. 这一章研究的基本对象是广义平稳 (随机) 过程. 重点是借助 "简单" 已作好的对象给出它们的典型表示 (谱展式). 对初学者必须要掌握 Karhunen 定理 (§8), 它给出了构造随机过程或场的典型表示 (谱展式) 的一般途径. 为此, 需要搞清楚确定性函数对随机测度的积分, 它在 §1~§7 中详细的给出. 在 §9 中可以只限制于研究离散时间的过程, 它的谱展式, 以及利用这个谱展式去建立大数定律的不同结果 (§10). 一类重要的平稳过程是*滑动平均过程*, 它在 §13 中引入的. 希望能够熟识谱密度的统计估计问题 (§14). 至于本章的其他结果可以在复读时再去光顾.

我们所关心的那个被称作随机函数的*典型表示* (谱展式), 需要详细研究根据给定的构造函数构造正交随机测度的问题, 并且从对那样测度的随机积分中给出了构造.

设 $\mathscr{K}$ 是某个集合 Λ 的子集所组成的半环, 即对任意的 $A, B \in \mathscr{K}$ 有 $A \bigcap B \in \mathscr{K}$, 如果 $A \subset B$ 则 $B \backslash A$ 可以表示成有限个 $\mathscr{K}$ 中集合的并, 它们可能依赖于 A 和 B. 假设每个集合 $B \in \mathscr{K}$ 对应一个复数值的随机变量 $Z(B) = Z(B, \omega)$, 且值在

$L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中.

定义 1. 在 $L^2(\Omega)$ 中族 $Z = \{Z(B), B \in \mathscr{K}\}$, 其指标是由半环 $\mathscr{K}$ 中的集合给出, 称作*正交随机测度*, 如果

1) 对 $B, C \in \mathscr{K}, B \bigcap C = \varnothing$, 有 $Z(B) \perp Z(C)$, 即 $(Z(B), Z(C)) = 0$, 这里 $(\cdot, \cdot)$ 是在 $L^2(\Omega)$ 中的内积 (数量积);

2) 对每个 $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 这里 $B, B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{K}$ 和 $B_n \bigcap B_m = \varnothing (n \neq m)$, 有

$$Z(B) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(B_k) \quad \text{a.s.}, \tag{1}$$

而级数均方收敛.

应该强调的是, 由那些 $\omega \in \Omega$, 使得性质 (1) 成立组成的集合, 虽然有概率 1, 但是依赖于集合 $B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{K}$ (以后凡是随机变量的等式都理解为 a.s. 等式). 不难验证, 性质 1) 和 2) 保证了 Z 在 $\mathscr{K}$ 上的有限可加性.

引入测度 Z 的*构造函数* (或者*构造测度*, 或者*均方测度*), 设

$$\mu(B) = \mathsf{E}|Z(B)|^2, \quad B \in \mathscr{K}.$$

利用内积的连续性, 很容易相信集函数 $\mu = \mu(\cdot)$ 具有*可数可加性*. 如果集合 $\Lambda \in \mathscr{K}$, 则 μ 是在 $\mathscr{K}$ 上的*有限*测度. 我们将研究较一般的情况, 当 μ 是 $\sigma-$ *有限*测度, 即集合 Λ 可以表示成 $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ 形式, 这里 $\Lambda_n \in \mathscr{K}, \mu(\Lambda_n) < \infty$ 和对所有 $n \neq m$ 有 $\Lambda_n \bigcap \Lambda_m = \varnothing$.

不难验证, 如果在半环 $\mathscr{K}$ 上给定 $\sigma-$ 有限测度 μ, 则在 $\mathscr{K}$ 上具有构造测度 μ 的正交随机测度 Z 的*等价定义*是: 对所有的 $B \in \mathscr{K}$, 有 $Z(B) \in L^2(\Omega)$, 且对任意的 $B, C \in \mathscr{K}$ 有

$$(Z(B), Z(C)) = \mu(B \bigcap C), \tag{2}$$

注意, $(\xi, \eta) = \mathsf{E}\xi\bar{\eta}$ 对 $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

正交随机测度 Z 称作*中心化的*, 如果对任意的 $B \in \mathscr{K}$ 有 $\mathsf{E}Z(B) = 0$.

例 1. 设 $\Lambda = [0, \infty), \mathscr{K} = \{[a, b), 0 \leqslant a \leqslant b < \infty\}$ ([a,a)=$\varnothing$). 设 $Z([a, b)) = W(b) - W(a)$, 这里 W 是 Wiener 过程. 考虑到 Wiener 过程是独立增量的, 可以看出 Z 是在 $\mathscr{K}$ 上具有构造测度是 Lebesgue 测度 μ 的正交随机测度.

§2. 在半环 $\mathscr{K}$ 上给定 $\sigma-$ 有限测度 μ, 以它作为构造测度来构造 (甚至于是中心化的) 正交随机测度 Z. 可以看出那样的构造并不是唯一的.

定理 1. *设 μ 是在由 Λ 子集组成的半环 $\mathscr{K}$ 上 $\sigma-$ 有限测度 (可以扩张到 $\mathscr{A} = \sigma\{\mathscr{K}\}$ 上). 这时, 存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 和在 Ω 及集合族 $\mathscr{G} = \{B \in \mathscr{A} : \mu(B) < \infty\}$ 上的中心化的正交随机测度 $Z = Z(\cdot)$, 且它的构造函数是测度 μ.*

证. 下面构造概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$. 取 $\Omega=\Lambda,\mathscr{F}=\mathscr{A}$.

如果 $0<\mu(\Lambda)<\infty$ ($\mu(\Lambda)=0$ 是平凡的), 则设 $\mathsf{P}(B)=\mu(B)/\mu(\Lambda)$. 根据公式取 $Z(B,\omega)=\sqrt{\mu(\Lambda)}\mathbf{1}_B(\omega),B\in\mathscr{A}$ 作正交随机测度 Z (但是还没有中心化). 显然, $Z(B,\omega)\in L^2(\Omega)$, 且对任意的集合 $B_1,B_2\in\mathscr{A}$ 有 (省略 $\omega\in\Omega$) 有

$$(Z(B_1),Z(B_2))=(\sqrt{\mu(\Lambda)})^2\int_\Omega \mathbf{1}_{B_1}\mathbf{1}_{B_2}d\mathsf{P}=\mu(\Lambda)\mathsf{P}(B_1\bigcap B_2)=\mu(B_1\bigcap B_2),$$

即满足性质 2). 如果 $\mu(\Lambda)=\infty$ 和 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots$ 是 Λ 的分割, 且 $\mu(\Lambda_n)<\infty,n\geqslant 1$, 则对 $A\in\mathscr{A}$ 设

$$\mathsf{P}(A)=\sum_{n=1}^\infty\frac{\mu(A\bigcap\Lambda_n)}{\mu(\Lambda_n)2^n}.$$

明显地, P 是在 $\mathscr{A}$ 上的概率 $\left(\mathsf{P}(\Lambda)=\sum\limits_{n=1}^\infty 2^{-n}=1\right)$.

在 $\mu(\Lambda)=\infty$ 的情况下, 对 $B\in\mathscr{G}$ 定义

$$Z(B,\omega)=\sum_{n=1}^\infty\sqrt{2^n\mu(\Lambda_n)}\mathbf{1}_{B_n}(\omega),$$

这里 $B_n=B\bigcap\Lambda_n,n\geqslant 1$. 级数在 $L^2(\Omega)$ 中收敛 (求和的各项具有不相交的支撑), 因此

$$\sum_{n=1}^\infty\mathsf{E}\left(\sqrt{2^n\mu(\Lambda_n)}\mathbf{1}_{B_n}\right)^2=\sum_{n=1}^\infty 2^n\mu(\Lambda_n)\mathbf{1}_{B_n}=\sum_{n=1}^\infty 2^n\mu(\Lambda_n)\frac{\mu(B_n)}{\mu(\Lambda_n)2^n}=\mu(B)<\infty.$$

由于内积的连续性, 有

$$(Z(B),Z(C))=\sum_{n=1}^\infty 2^n\mu(\Lambda_n)(\mathbf{1}_{B_n},\mathbf{1}_{C_n})=\sum_{n=1}^\infty\mu(B_n\bigcap C_n)=\mu(B\bigcap C),$$

这里 $B_n=B\bigcap\Lambda_n,C_n=C\bigcap\Lambda_n,n\geqslant 1$, 即也满足性质 2).

构造出的测度 Z, 无论在 $\mu(\Lambda)<\infty$ 时, 还是在 $\mu(\Lambda)=\infty$ 时都没有中心化. 为了得到具有给定的构造函数 μ 中心化的正交随机测度 Z, 我们进行下面的步骤 (注意, 如果取 $Z(B)-\mathsf{E}Z(B),B\in\mathscr{G}$ 的形式, 将得不到所要求的结果). 研究在某个概率空间 $(\Omega',\mathscr{F}',\mathsf{P}')$ 上实随机变量 η, 使得 $\mathsf{E}'\eta=0,\mathsf{E}'(\eta^2)=1$, 这里 E' 表示对测度 P' 求均值. 设 Z 是如前所述的在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上构造出的正交随机测度. 取 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{P})=(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})\otimes(\Omega',\mathscr{F}',\mathsf{P}')$, 且在这空间上定义 $\widetilde{Z}(B,\widetilde{\omega}):=Z(B,\omega)\eta(\omega')$, 对 $B\in\mathscr{G},\widetilde{\omega}=(\omega,\omega')\in\Omega\times\Omega'$. 很容易看出, 这样构造出的测度 $\widetilde{Z}$ 已经是中心化的正交随机测度. □

§3. 定义在半环 $\mathscr{K}$ 上的随机测度Z. 此时定义了构造测度 μ, 它可以唯一地扩张到 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A}=\sigma\{\mathscr{K}\}$ 上. 因此自然会提出问题: 随机测度 Z 由 $\mathscr{A}$ 中集合可以

扩张出去的可能性. 后面将看到, 可以扩张到集合类 $\mathscr{G}=\{B\in\mathscr{A}:\mu(B)<\infty\}$ 上. 为此, 需要引入对随机测度 Z 的积分.

因为 μ 是在 $\mathscr{K}$ 上 $\sigma-$ 有限的测度, 则存在集合 $\Lambda_n\in\mathscr{K},n\geqslant 1$, 使得 $\Lambda=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$, 且 $\Lambda_n\bigcap\Lambda_m=\varnothing$, 对 $n\neq m$ 和 $\mu(\Lambda_n)<\infty,n\geqslant 1$ (如果 μ 是有限测度, 则 $\Lambda_1=\Lambda$). 设 $\mathscr{K}_n=\mathscr{K}\bigcap\Lambda_n$, 即设 $\mathscr{K}_n=\{B\in\mathscr{K}:B\subset\Lambda_n\}$, 研究 $\mathscr{A}_n=\sigma\{\mathscr{K}_n\}$ 是具有单位 1 为 Λ_n 的 $\sigma-$ 代数. 这时,

$$A\in\mathscr{A}=\sigma\{\mathscr{K}\}\Leftrightarrow A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\quad\text{其中 } A_n\in\mathscr{A}_n,\tag{3}$$

此时,

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_n)\leqslant\infty,\tag{4}$$

这里 μ_n 是测度 $\mu|_{\mathscr{K}_n}$ 由半环 $\mathscr{K}_n$ 到 $\mathscr{A}_n$ 的 Lebesgue 扩张. 不难验证, $\mathscr{A}$ 不依赖于 Λ 的分割 $\Lambda_n\in\mathscr{K},n\geqslant 1$, 且这时, 公式 (4) 右边部分对不同的分割给出了同一个数值.

假设, 同样在下面的 §4 和 §5 中, $\mu(\Lambda)<\infty$ (作为 Λ 可以用前面所引入的任意集合 $\Lambda_n,n\geqslant 1$, 来代替, 且有 $\mu(\Lambda_n)<\infty$).

用 $\mathscr{E}$ 表示由 $\mathscr{K}$ 中 $(\Lambda\in\mathscr{K})$ 所有有限个不相交集合的并所组成代数.

定义 2. 对 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i$, 这里 $B_i\in\mathscr{K},i=1,\cdots,m,B_i\bigcap B_j=\varnothing(i\neq j)$. $Z(B)$ 由下面公式引入:

$$Z(B)=\sum_{i=1}^{m}Z(B_i).\tag{5}$$

给出的定义是相容的. 事实上, 设集合 B 有另一个表示 $B=\bigcup\limits_{j=1}^{r}D_j,D_j\in\mathscr{K},j=1,\cdots,r,D_j\bigcap D_l=\varnothing,(j\neq l)$. 这时得出

$$\sum_{i=1}^{m}Z(B_i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}Z(B_i\bigcap D_j)\quad\text{和}\quad\sum_{j=1}^{r}Z(D_j)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{m}Z(D_j\bigcap B_i)$$

(随机变量的等式是 a.s. 的). 由此可得

$$\sum_{i=1}^{m}Z(B_i)=\sum_{j=1}^{r}Z(D_j).$$

现在构造对正交随机测度的随机积分.

称作函数 $f:\Lambda\to\mathbb{C}$ 为简单的, 如果

$$f=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{1}_{B_i},\tag{6}$$

这里 $c_i \in \mathbb{C}, B_i \in \mathscr{E}, i = 1, \cdots, m$, 且 $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \Lambda$ 和 $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ 对 $i \neq j$, 即集合 $\{B_i\}_{i=1,\cdots,m}$ 构成 Λ 的一个分割.

定义 3. 对具有形式 (6) 的**简单函数对正交随机测度的积分** (用 $J(f)$ 表示) 由下面公式给出:

$$J(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i). \tag{7}$$

证明这定义是相容的. 设与 (6) 式同时存在函数 f 的另一种表示 $f = \sum_{j=1}^{r} d_j \mathbf{1}_{D_j}$, 这里 $d_j \in \mathbb{C}, D_j \in \mathscr{E}, j = 1, \cdots, r; \bigcup_{j=1}^{r} D_j = \Lambda, D_i \bigcap D_j = \varnothing (i \neq j)$. 这时, 如果 $\mu(B_i \bigcap D_j) \neq 0$, 则 $c_i = d_j$.

考虑到 $Z(\varnothing) = 0$, 因此有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j) &= \sum_{j=1}^{r} d_j \sum_{i=1}^{m} Z(D_j \bigcap B_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j:\mu(B_i \cap D_j) \neq 0} d_j Z(B_i \bigcap D_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j:\mu(B_i \cap D_j) \neq 0} c_i Z(B_i \bigcap D_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} c_i Z(B_i \bigcap D_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i),
\end{aligned}$$

由此可见, $J(f)$ 的值不依赖于函数 (简单) f 的表示方法. □

§4. 为了给出的积分 $J(f)$ 定义能够扩充到更广的函数 f 类, 需要研究已经构造出的简单函数积分的性质.

引理 1. 设 f 和 g 是简单函数. 这时, $(J(f), J(g)) = \langle f, g \rangle$, 这里 $(\cdot,\cdot)$ 是在 $L^2(\Omega)$ 中的内积, 而 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 是在空间 $L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ 中的内积.

证. 设函数具有公式 (6) 的形式; $g = \sum_{j=1}^{r} d_j \mathbf{1}_{D_j}$, 这里 $D_1, \cdots, D_r$ 构成 Λ 的分割. 这时,

$$\begin{aligned}
(J(f), J(g)) &= \left(\sum_{i=1}^{m} c_i Z(B_i), \sum_{j=1}^{r} d_j Z(D_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} c_i \bar{d}_j \mu(B_i \bigcap D_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} c_i \bar{d}_j \int_{\Lambda} \mathbf{1}_{B_i \cap D_j} \mu(d\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} c_i \bar{d}_j \int_{\Lambda} \mathbf{1}_{B_i}(\lambda) \mathbf{1}_{D_j}(\lambda) \mu(d\lambda) = \int_{\Lambda} \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{1}_{B_i} \overline{\sum_{j=1}^{r} d_j \mathbf{1}_{D_j}} \mu(d\lambda) \\
&= \int_{\Lambda} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} \mu(d\lambda) = \langle f, g \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

推论 1. 映射 $f \mapsto J(f)$ 是在 $L^2(\Omega)$ 空间中简单函数的线性流形 (线性组合的闭包) 上的线性映射.

证. 如果 f 和 g 是简单函数, 显然, 对 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 函数 $\alpha f + \beta g$ 依然是简单函数. 由于内积的 "**半双的线性性**" (sesquilinear) 和引理 1 有

$$\begin{aligned}&(J(\alpha f+\beta g)-\alpha J(f)-\beta J(g), J(\alpha f+\beta g)-\alpha J(f)-\beta J(g))\\ =&\langle\alpha f+\beta g,\alpha f+\beta g\rangle-\alpha\langle f,\alpha f+\beta g\rangle-\beta\langle g,\alpha f+\beta g\rangle\\ &-\overline{\alpha}\langle\alpha f+\beta g,f\rangle+\alpha\overline{\alpha}\langle f,f\rangle+\beta\overline{\alpha}\langle g,f\rangle-\overline{\beta}\langle\alpha f+\beta g,g\rangle\\ &+\alpha\overline{\beta}\langle f,g\rangle+\beta\overline{\beta}\langle g,g\rangle=0.\end{aligned}$$

这样, 映射的线性性保持着:

$$J(\alpha f+\beta g)=\alpha J(f)+\beta J(g). \quad \square \tag{8}$$

引理 2. 具有公式 (6) 形式的简单函数在空间 $L^2(\Lambda)$ 中稠密.

证. 设 $f \in L^2(\Lambda)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 选取 $H = H(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\int_\Lambda |f(\lambda)|^2 \mathbf{1}_{\{|f(\lambda)|>H\}}\mu(d\lambda) < \varepsilon.$$

利用 (I.4) 和第一章引理3, 容易得到, 形式(6) 的阶梯函数序列来逼近 $f(\lambda)\mathbf{1}_{\{|f(\lambda)|\leqslant H\}}$. 这就证明了在 $L^2(\Lambda)$ 中稠密. □

§5. 现在从简单函数 f 的积分 $J(f)$ 扩充到 $L^2(\Lambda)$ 中的函数 f.

定义 4. 对函数 $f \in L^2(\Lambda)$, 设

$$J(f)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}J(f_n) \ (\text{l.i.m. 是在 } L^2(\Omega) \text{ 中的极限}) \tag{9}$$

这里 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是简单函数序列, 使得当 $n\to\infty$ 时有 $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$.

证明定义 4 是相容的. 根据引理 2 存在简单函数序列 f_n, 当 $n \to \infty$ 时有 $f_n \xrightarrow{L_2(\Lambda)} f$. $\|\cdot\|$ 表示在空间 $L^2(\Omega)$ 中的范数, 利用推论 1 和引理 1 得到, 当 $n, m \to \infty$ 时有

$$\|J(f_n)-J(f_m)\|=\|J(f_n-f_m)\|=|f_n-f_m|\to 0,$$

这里 $|\cdot|$ 是空间 $L^2(\Lambda)$ 中的范数, 由于收敛序列 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是基本点列. 因为空间是完备的, 所以在 $L^2(\Omega)$ 中存在 $J(f_n)$ 的极限. 验证这个极限是不依赖于逼近的简单函数序列的选取. 设 $g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$, 这里 g_n 是简单函数. 这时, 当 $n\to\infty$ 时有 $|g_n - f_n| \leqslant |g_n - f| + |f - f_n| \to 0$, 因此,

$$\|J(f_n)-J(g_n)\|=\|J(f_n-g_n)\|=|f_n-g_n|\to 0, \quad 当\ n\to\infty\ 时.$$

如果 $J(f_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi$ 和 $J(g_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \zeta$, 则 $J(f_n) - J(g_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \xi - \zeta$. 这样, $\|J(f_n) - J(g_n)\| \to \|\xi - \zeta\| = 0$, 即 $\xi = \zeta$ a.s.. □

推论 2. 对任意的函数 $f, g \in L^2(\Lambda)$ 有

$$(J(f), J(g)) = \langle f, g\rangle; \tag{10}$$

$J(f)$ 是由 $L^2(\Lambda)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的线性映射. 设 $h_n \in L^2(\Lambda)$ (不一定是简单函数) 且 $h_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f$ 这时,

$$J(h_n) \xrightarrow{L^2(\Omega)} J(f), \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}. \tag{11}$$

证. 为了验证性质 (10), 利用引理 1 和考虑到内积的连续性, 只需要取简单函数 $f_n, g_n, n \geqslant 1$ 使得 $f_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} f, g_n \xrightarrow{L^2(\Lambda)} g$ (参见引理 2). 类似于推论 1 的证明, 可以验证 $J = J(f)$ 的线性性. 利用 J 的线性性和关系式 (10) 有

$$\|J(f) - J(h_n)\| = \|J(f - h_n)\| = |f - h_n| \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}. \quad \square$$

§6. 前面所构造的积分 $J(f)$ 是对 $f \in L^2(\Lambda) = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$, 且假设 $\mu(\Lambda) < \infty$. 现在要构造积分 $J(f)$ 是对 $f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$, 且当 μ 是 $\sigma-$ 有限测度.

考虑集合 Λ, 将其分割成集合 $\Lambda_n \in \mathscr{K}$, 且 $\mu(\Lambda_n) < \infty, n \geqslant 1$. 这时,

$$f \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu) \Leftrightarrow \begin{cases} f_n := f|_{\Lambda_n} \in L^2(\Lambda_n, \mathscr{A}_n, \mu_n), n \geqslant 1, \\ \displaystyle\int_\Lambda |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \int_{\Lambda_n} |f(\lambda)|^2 \mu_n(d\lambda) < \infty, \end{cases} \tag{12}$$

这里 $\mathscr{A}_n = \sigma\{\mathscr{K}_n\}, \mu_n$ 是测度 $\mu|_{\mathscr{K}_n}$ 由 $\mathscr{K}_n = \mathscr{K} \bigcap \Lambda_n$ 到 $\mathscr{A}_n$ 的 Lebesgue 扩张. 这时, 积分 $\int_\Lambda |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda)$ 的值不依赖于集合 Λ 的分割 $\Lambda_n \in \mathscr{K}, n \in \mathbb{N}$ 的选取.

定义 5. 对函数 $f \in L^2(\Lambda)$ 根据下面公式引入**对正交随机测度 Z 的积分** $J(f)$:

$$J(f) = \sum_{n=1}^\infty J_n(f_n), \tag{13}$$

这里级数是在 $L^2(\Omega)$ 中收敛, 函数 f_n 如 (12) 式中所述, 映射 J_n 如前所述的, 定义在 $L^2(\Lambda_n)$ 上对所有的 n (需强调的是 Λ_n 和 μ_n 与指标 n 有关).

证明 (13) 式是相容的. 如果 $f \in L^2(\Lambda)$, 则根据 (12) 式对所有的 $n \geqslant 1$ 有 $f_n \in L^2(\Lambda_n)$. 注意, 当 $n \neq m$ 时, $J_n(f_n) \perp J_m(f_m)$. 事实上, 如果 f_n 和 f_m 是简单函数, 则这是显然的, 因为对 $B \in \mathscr{E}_n$ 和 $D \in \mathscr{E}_m$ 有 $(Z(B), Z(D)) = 0$ ($\mathscr{E}_n$ 是由在 Λ_n 中的 $\mathscr{K}_n$ 所产生的代数, $n \in \mathbb{N}$). 对函数 f_n 和 f_m, 不是简单函数时, 需要取逼近它们的简单函数. 因此, 由于 J_n 的等距性和级数在 (12) 式中的收敛性. 当 $N, M \to \infty$

时, 有

$$\left\|\sum_{n=1}^{M} J_n(f_n)-\sum_{n=1}^{N} J_n(f_n)\right\|^2=\sum_{n=M\wedge N}^{M\vee N}\|J_n(f_n)\|^2=\sum_{n=M\wedge N}^{M\vee N}\int_{\Lambda_n}|f_n(\lambda)|^2\mu_n(d\lambda)\to 0.$$

验证 $J(f)$ 不依赖于 Λ 的分割形式. 设 $\Lambda=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n, \Gamma_n\in\mathscr{K}, \Gamma_n\bigcap\Gamma_m=\varnothing(n\neq m), \mu(\Gamma_n)<\infty, n\in\mathbb{N}$. 设 $h_{n,m}=f|_{\Lambda_n\bigcap\Gamma_m}, m,n\in\mathbb{N}$. 这时, 有 $f_n=f|_{\Lambda_n}=\sum_{m=1}^{\infty} f|_{\Lambda_n\bigcap\Gamma_m}, n\in\mathbb{N}$. 注意到, 当 $N\to\infty$ 时, 有 $\sum_{m=1}^{N} h_{n,m}\xrightarrow{L^2(\Lambda_n)} f_n$, 意味着, 由于 (11) 式有

$$J_n(f_n)=\sum_{m=1}^{\infty} J_n(h_{n,m}),$$

这里, 级数在 $L^2(\Omega)$ 中收敛. 根据 $J_{n,m}$ 的构造, 对 $h\in L^2(\Lambda_n\bigcap\Gamma_m)\subset L^2(\Lambda_n)$ 有 $J_{n,m}(h)=J_n(h), n,m\geqslant 1$. 考虑到可数个 0 测度集合的并, 还是个 0 测度集合, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_{n,m}(h_{n,m}).$$

类似地, 设 $g_m=f|_{\Gamma_m}$, $\widetilde{J}_m$ 是映射, 它建立在 $L^2(\Gamma_m)$ 上, 如同 J_n 建立在 $L^2(\Lambda_n)$ 上一样, $m,n\geqslant 1$. 有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{J}_m(g_m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{n,m}(h_{n,m}).$$

考虑到如果 $(n,m)\neq(k,l)$, 则 $J_{n,m}(h_{n,m})\perp J_{k,l}(h_{k,l})$, 这样由被此垂直的项组成求和的级数, 它能以任何次序求和, 且因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\|J_{n,m}(h_{n,m})\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\|h_{n,m}\|^2_{L^2(\Lambda_n\cap\Gamma_m)}=\int_{\Lambda}|f(\lambda)|^2\mu(d\lambda)<\infty. \quad \square$$

J 对函数 $f\in L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$ 的作用 (参见 (13) 式), 一般地表示成积分形式

$$J(f)=\int_{\Lambda} f(\lambda)Z(d\lambda). \tag{14}$$

(14) 式右半部分的积分称作**对正交随机测度的随机积分** (是关于确定性函数 $f\in L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$ 的; 试将给出的定义与第八章中关于随机函数 $f=f(\lambda;\omega)$ 的**伊藤 (Ito) 随机积分**相比较).

§7. 下面的定理给出了随机积分 $J=J(f)$ 的基本性质.

定理 2. 随机积分 (14) 是一个由空间 $L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$ (这里 μ 是 $\sigma-$ 有限测度) 到某个子空间 $L^2_Z\subset L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 的保距映射. 这时, 根据下面的公式, Z 可以延拓到集合族 $\mathscr{G}=\{B\in\mathscr{A}:\mu(B)<\infty\}$ 上成为正交随机测度 (且具有构造函数 μ 的):

$$Z(B)=J(\mathbf{1}_B). \tag{15}$$

证. 当 $\mu(\Lambda)<\infty$ 时, 类似于前面所述的一样. 只需要对 $\mu(\Lambda)=\infty$ 时. 设 $\Lambda=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$, 这里 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots$ 是 Λ 的分割, 且 $\mu(\Lambda_n)<\infty, n\geqslant 1$. 取 f 和 $g\in L^2(\Lambda)$. 这时, $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n, g=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n$, 这里 $f_n=f|_{\Lambda_n}, g_n=g|_{\Lambda_n}$, 并且级数在 $L^2(\Lambda)$ 中收敛. 由此可得

$$\begin{aligned}(Jf,Jg)&=\left(\sum_n J_nf_n,\sum_m J_mg_m\right)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}J_nf_n,\sum_{m=1}^{N}J_mg_m\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle J_nf_n,J_ng_n\rangle=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle f_n,g_n\rangle\\&=\lim_{N\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{N}f_n,\sum_{m=1}^{N}g_m\right\rangle=\langle f,g\rangle,\end{aligned}\tag{16}$$

这里考虑到了对 $n\neq m, J_n(f_n)\perp J_m(g_m)$ 和

$$\langle f_n,g_n\rangle_{L^2(\Lambda_n)}=\langle f\mathbf{1}_{\Lambda_n},g\mathbf{1}_{\Lambda_n}\rangle_{L^2(\Lambda)}$$

这样, J 是保距的. 显然, 在保距映射 J 下, $L^2(\Lambda)$ 的像是 $L^2(\Omega)$ 中的子空间, 用 L_Z^2 来表示. 对 $B\in\mathscr{K}$ 有 $\mu(B)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)<\infty$, 这里 $B_n=B\bigcap\Lambda_n, n\in\mathbb{N}$. 对 $\mathbf{1}_B\in L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$ 和 $\mathbf{1}_B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{B_n}$, 级数是在 $L^2(\Lambda)$ 中收敛. 因此, 由 (13) 式有

$$J(\mathbf{1}_B)=\sum_{n=1}^{\infty}J_n(\mathbf{1}_{B_n}).$$

由于 (7) 式有 $J_n(\mathbf{1}_{B_n})=Z(B_n)$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Z(B_n)=Z(B)$ (级数是在 $L^2(\Omega)$ 中收敛). 这样, 对任意的 $B\in\mathscr{K}$ 得到 $J(\mathbf{1}_B)=Z(B)$, 即公式 (15) 确定了 Z 从 $\mathscr{K}$ 到 $\mathscr{G}$ 上的延拓. 除此之外, 对 $B,C\in\mathscr{G}$ 根据 J 的保距性, 有

$$(Z(B),Z(C))=(J(\mathbf{1}_B),J(\mathbf{1}_C))=\langle\mathbf{1}_B,\mathbf{1}_C\rangle=\mu(B\bigcap C).\quad\square$$

注 1. 由于 (11) 式很容易看出, 如果 Z 是在 $\mathscr{K}$ 上的中心化的正交随机测度, 则对所有的 $f\in L^2(\Lambda)$ 有

$$\mathsf{E}(J(f))=0.$$

特别的, 对 $B\in\mathscr{G}$ 有 $\mathsf{E}Z(B)=0$.

§8. 设 $X=\{X(t),t\in T\}$ 是定义在某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上的复数值 L^2- 过程 **(二阶矩过程)**, 即对每个 $t\in T$ 有 $\mathsf{E}|X(t)|^2<\infty$. 对复数值 L^2- 过程的相关函数 **(协方差函数)** 由下面公式所确定:

$$r(s,t)=\operatorname{cov}(X(s),X(t))=\mathsf{E}(X(s)-\mathsf{E}X(s))(\overline{X(t)-\mathsf{E}X(t)}),\quad s,t\in T.\tag{17}$$

今后将假设 $\mathsf{E}X(t)=0, t\in T$. 这个假设并不失一般性, 因为这时可以由对随机变量 $X(t)$ 转化到对中心化随机变量 $\widetilde{X}(t)=X(t)-\mathsf{E}X(t)$ 的研究.

下面的定理是一个最基本结果, 它是借助于已经建立的 "简单的" 对象 (这里应该理解为正交随机测度) 来给出随机过程的表示.

定理 3 (卡鲁宁 (Karhunen)). 设在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上给定中心化复数值 L^2- 过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 的相关函数允许因子分解 (factorization), 即表示成:

$$r(s,t)=\int_\Lambda f(s,\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\mu(d\lambda),\quad s,t\in T, \tag{18}$$

这里对每个 $t\in T, f(t,\cdot)\in L^2(\Lambda)=L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$, 而 μ 是某个 $\sigma-$ 有限测度. 这时, 存在中心化的正交随机测度 Z 在集合类 $\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{A}:\mu(A)<\infty\}$ 上. 并且, 一般来说, 在原来概率空间的扩张上有构造测度 μ, 使得对每个 $t\in T$ 有

$$X(t)=\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda). \tag{19}$$

如果函数系 $\{f(t,\cdot),t\in T\}$ 在空间 $L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$ 中完备, 即

$$\Psi\in L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)\quad 和\quad \int_\Lambda f(t,\lambda)\overline{\Psi(\lambda)}\mu(d\lambda)=0,\quad \forall t\in T\Rightarrow\Psi=0,\mu-\text{a.s.}, \tag{20}$$

则该测度 Z 可以建立在原来概率空间上.

注 2. 如果过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 有 (19) 式的表示 (具有 $L^2(\Lambda,\mathscr{A},\mu)$ 中函数 $f(t,\cdot)$, 这里 μ 是 $\sigma-$ 有限中心化的正交随机测度 Z 的构造测度), 则由于定理 2 性质 (18) 成立. 这样, 根据注 1, L^2- 过程 X 将是中心化的.

这个注说明了, 有 (19) 式的表示的充分条件也是必要的.

定理的证明. 设满足条件 (20). 对 $t\in T$ 研究映射 G,

$$G:f(t,\cdot)\mapsto X(t,\cdot) \tag{21}$$

和根据线性性, 延拓它

$$G\left(\sum_{k=1}^n c_kf(t_k,\cdot)\right)=\sum_{k=1}^n c_kX(t_k,\cdot), \tag{22}$$

这里 $c_k\in\mathbb{C},t_k\in T,k=1,\cdots,n$.

验证这个定义是相容的, 即验证, 如果

$$\sum_{k=1}^n c_kf(t_k,\cdot)=\sum_{l=1}^m d_lf(s_l,\cdot),$$

这里 $d_l \in \mathbb{C}, s_l \in T, l = 1, \cdots, m$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) = \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l), \quad \text{(a.s.)}.$$

为此, 考虑到 (18) 式, 注意到,

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, \cdot), \sum_{l=1}^{m} d_l f(s_l, \cdot) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \overline{d}_l \int_\Lambda f(t_k, \lambda) \overline{f(s_l, \lambda)} \mu(d\lambda)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \overline{d}_l r(t_k, s_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_k \overline{d}_l \mathsf{E} X(t_k) \overline{X(s_l)}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k), \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \right).$$

这意味着

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, \cdot) - \sum_{l=1}^{m} d_l f(s_l, \cdot) \right| = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) - \sum_{l=1}^{m} d_l X(s_l) \right\|,$$

由此可得定义 (22) 的相容性.

映射 G 的保距性可以延拓到子空间 $L^2[f]$, 它是在 $L^2(\Lambda)$ 中形如函数 $\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, \cdot)$, 这里函数 f 是表示式 (18) 中的函数, 所生成的闭包. 这样, 由于 (20) 式有 $L^2[f] = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ 和 $G(L^2[f]) = L^2[X]$, 这里 $L^2[X]$ 是过程 $X(t)$ 的线性包络 (envelop) 的闭包, 即在 $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中取形如线性组合 $c_1 X(t_1) + \cdots + c_n X(t_n) (c_i \in \mathbb{C}, t_i \in T, i = 1, \cdots, n)$ 的闭包.

对 $B \in \mathscr{G}$ 有 $\mathbf{1}_B \in L^2(\Lambda)$, 我们可以定义

$$Z(B) = G(\mathbf{1}_B) \tag{23}$$

这时有

$$(Z(B), Z(C)) = (G(\mathbf{1}_B), G(\mathbf{1}_C)) = \langle \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_C \rangle = \mu(B \cap C).$$

因此, $Z = Z(\cdot)$ 是在 $\mathscr{G}$ 上具有构造测度 μ 的正交随机测度. 因为过程 X 有 0 中值, 所以对任意的 $\zeta \in L^2[X]$, 有 $\mathsf{E}\zeta = 0$. 又因为对每个 $B \in \mathscr{G}$ 有 $Z(B) \in L^2[X]$, 所以测度 Z 是中心化的.

对任意的函数 $h \in L^2(\Lambda)$ 可以引入随机积分

$$J(h) = \int_\Lambda h(\lambda) Z(d\lambda).$$

根据定理 2, J 是由 $L^2(\Lambda)$ 到 L^2_Z 的保距映射.

这样有了两个保距映射:

$$G: L^2(\Lambda) \to L^2[X] \subset L^2(\Omega) \quad \text{和} \quad J: L^2(\Lambda) \to L_Z^2 \subset L^2(\Omega),$$

这时, 由于 (23) 式和 (15) 式对 $B \in \mathscr{G}$, 等式 $G(\mathbf{1}_B) = J(\mathbf{1}_B)$ 成立. 但是由引理 2 保证了, 那样示性函数的有限的线性组合在 $L^2(\Lambda)$ 中是稠密的. 因此, 在 $L^2(\Lambda)$ 中有 $G = J$, 除此之外, $L^2[X] = L_Z^2$. 由 (21) 式得到 $J(f(t,\cdot)) = X(t)$. 这样, 得到表示 (19) 式 (没有扩张原来的概率空间).

假设条件 (20) 式不成立. 这时, $L^2[f] \subset L^2(\Lambda)$ 和 $L^2[f] \neq L^2(\Lambda)$. 研究 $L^2(\Lambda) \ominus L^2[f]$, 即在 $L^2(\Lambda)$ 中 $L^2[f]$ 的正交补, 且在其中任取由函数 $g(u,\cdot) \in L^2(\Lambda), u \in T'$ 组成的基, 这里 $T' \bigcap T = \varnothing$ (参见 [60; 第 1 卷, p.59]) 引入函数

$$\rho(s,t) = \int_\Lambda g(s,\lambda)\overline{g(t,\lambda)}\mu(d\lambda) = (g(s,\cdot), g(t,\cdot))_{L^2(\Lambda)}, \quad s,t \in T'.$$

显然, 对 $c_k \in \mathbb{C}, t_k \in T', k = 1, \cdots, n$ 和 $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k,l=1}^n c_k \bar{c}_l \rho(t_k, t_l) = \int_\Lambda \left| \sum_{k=1}^n c_k g(t_k, \lambda) \right|^2 \mu(d\lambda) \geqslant 0.$$

由于第二章定理 4 存在某个概率空间 $(\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$ 上及中心化复数值 Gauss 过程 $\{Y(t), t \in T'\}$, 使得

$$\operatorname{cov}(Y(s), Y(t)) = \mathsf{E}' Y(s)\overline{Y(t)} = \rho(s,t), \quad s,t \in T'.$$

取 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mathsf{P}}) = (\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) \times (\Omega', \mathscr{F}', \mathsf{P}')$. 这时, 对每个 $t \in T, s \in T'$ 随机变量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 在这个空间上是独立的 (对 $\widetilde{\omega} = (\omega, \omega') \in \widetilde{\Omega}$ 有 $X(t) = X(t, \widetilde{\omega}) = X(t, \omega), Y(s) = Y(s, \widetilde{\omega}) = Y(s, \omega')$).

在 $(T \bigcup T') \times \widetilde{\Omega}$ 上引入中心化随机函数

$$\xi(t, \widetilde{\omega}) = \begin{cases} X(t, \omega), & t \in T, \\ Y(t, \omega'), & t \in T'. \end{cases}$$

对它有

$$\operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \widetilde{\mathsf{E}}\xi(s)\overline{\xi(t)} = \begin{cases} r(s,t), & s,t \in T, \\ \rho(s,t), & s,t \in T', \\ 0, & s \in T, t \in T' \text{ 或 } s \in T', t \in T. \end{cases}$$

换句话说,

$$\operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \int_\Lambda h(s,\lambda)\overline{h(t,\lambda)}\mu(d\lambda),$$

这里

$$h(t,\lambda)=\begin{cases} f(t,\lambda), & t\in T,\\ g(t,\lambda), & t\in T',\end{cases}$$

考虑到在 $L^2(\Lambda)$ 中对 $t\in T$ 和 $s\in T'$ 有 $f(t,\cdot)\perp g(s,\cdot)$.

除此之外, 因为不存在 $\Psi\in L^2(\Lambda)$, 使得 $\Psi\perp h(t,\cdot)$ 对所有的 $t\in T\bigcup T'$, 有 $L^2[h]=L^2(\Lambda)$. 这样, 根据已证的在 $\mathscr{G}\times\widetilde{\Omega}$ 上存在中心化正交随机测度 Z, 使得 $L^2[\xi]=L^2_Z$ 和

$$\xi(t)=\int_\Lambda h(t,\lambda)Z(d\lambda),\quad t\in T\bigcup T'.$$

但是, 对 $t\in T$ 有 $\xi(t,\widetilde{\omega})\equiv X(t,\widetilde{\omega})$. 因此, 对所有的 $t\in T$ 有

$$X(t,\widetilde{\omega})=X(t,\omega)=\int_\Lambda h(t,\lambda)Z(d\lambda)=\int_\Lambda f(t,\lambda)Z(d\lambda).\quad\square$$

§9. 正如本章标题所示, 我们的基本目标是研究*平稳随机过程*. 前面所介绍的对这类过程的 Karhunen 定理, 它告诉我们, 对这类过程可以有随机表示, 它具有非常明显"谱"的直观解释.

回顾一下, 随机过程的平稳性概念实质上是说, 相对于推移 $t\mapsto t+u$ 这类过程的随机特征有不变性. 这还需要再解释清楚. 首先, 为了使所研究的过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 的变量 t 有产生推移的可能, 要假设 T 是某个群 (每处都是按加法运算的). 作为时间集合 T, 一般规定, 将研究集合 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\cdots\}$ 或 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, 相应的所研究过程是离散时间的或是连续时间的时间. 除此之外, 对每个 $t\in T$ 过程 $X(t)$ 的值取于同一个空间 S (一般地说, $\mathsf{S}=\mathbb{C}$ 或 $\mathsf{S}=\mathbb{R}$).

第六章定义 8 关于*狭义平稳过程*的定义, 对 T 是群来说依然有效.

在许多研究工作中非常关心的随机过程的性质, 该过程只是依赖于有一定阶的*混合矩*, 即依赖于形如 $\mathsf{E}X(t_1)^{k_1}\cdots X(t_n)^{k_n}$, 这里 $n\in\mathbb{N},t_1,\cdots,t_n\in T,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}_+$ 的函数. 对 L^2- 过程类这自然而然地也就是

定义 6. 复数值 (特别是, 实的) L^2- 过程 $X=\{X(t),t\in T\}$, 这里 T 是某个群, 称作*广义平稳的* (或*二阶平稳的*), 如果有

$$\mathsf{E}X(t)=a,\quad 对任意的\ t\in T, \tag{24}$$

$$r(s,t)=\operatorname{cov}(X(s),X(t))=r(s-t,0)(:=R(s-t)),\quad 对所有的\ s,t\in T. \tag{25}$$

很容易看出, 所有狭义平稳 L^2- 过程都是广义平稳过程. 对 Gauss 过程来说, 两种相重合. 独立同分布随机变量 (不存在数学期望) 的序列是狭义平稳过程的例子, 但谈不上是广义平稳过程的例子.

下面我们将集中精力研究广义平稳过程. 这类过程的理论与**希尔伯特** (Hilbert) *空间曲线理论* 紧密相关的, 且与确定性函数的*非负定性质*相关.

定义 7. 在某个群 T 上, 给定复数值函数 $R=R(t), t\in T$, 称作非负定的, 如果 $r(s,t)=R(s-t), s,t\in T$ 是非负定函数, 即满足条件 (Ⅱ.13).

由第二章定理 4 得出, $R=R(t), t\in T$, 这里 T 是群, 非负定函数类与平稳 Gauss 过程 $X=\{X(t), t\in T\}$ 的协方差函数类相重合.

描述在群 $T=\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\cdots\}$ 上的非负定函数给出了下面定理.

定理 4 (赫格洛茨 (Herglotz)). 函数 $R=R(n), n\in\mathbb{Z}$, 是非负定的当且仅当有 "**谱表示**" ("**谱展式**")

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}Q(d\lambda),\quad n\in\mathbb{Z},\tag{26}$$

这里 Q 是在 $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ 上有限测度 ("谱测度").

在公式 (26) 中给出的由 $-\pi$ 到 π 的积分应该理解为积分是在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上.

证. 充分性. 显然, 函数 (26) 是非负定的, 因为对所有的 $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{Z}, z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$ 和任意的 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\sum_{k,q=1}^{n}z_k\overline{z}_qR(t_k-t_q)=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{n}z_ke^{it_k\lambda}\right|^2Q(d\lambda)\geqslant 0.\tag{27}$$

必要性. 对 $N\geqslant 1$ 和 $\lambda\in[-\pi,\pi]$ 引入连续非负定 (因为 $R=R(n)$ 的非负定性) 函数

$$\begin{aligned}g_N(\lambda)&=\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}R(k-q)e^{-ik\lambda}e^{iq\lambda}\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{|m|<N}(1-|m|/N)R(m)e^{-im\lambda},\end{aligned}\tag{28}$$

这里二次求和转化为一次求和成立, 是因为有 $N-|m|$ 个 "对" (k,q), 对它来说 $k-q=m$ (这里 $k,q\in\{1,\cdots,N\}, |m|<N$). 在 $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ 上定义具有相对于 Lebesgue 测度的密度 g_N 的测度 Q_N, 即设

$$Q_N(B)=\int_B g_N(\lambda)d\lambda,\quad B\in\mathscr{B}([-\pi,\pi]).$$

这时, 根据公式 (I.25), 对 $N\geqslant 1$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}Q_N(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}g_N(\lambda)d\lambda=\begin{cases}(1-|n|/N)R(n), & |n|<N,\\ 0, & |n|\geqslant N.\end{cases}\tag{29}$$

注意, 对所有的 N (由于 (29) 式, 当 $n=0$ 时) 有 $Q_N([-\pi,\pi])=R(0)<\infty$. 因此根据 Prokhorov 定理对有限测度 (参见, 附录 2), 取紧集 $K=[-\pi,\pi]$, 可以找到子

序列 $\{N_k\} \subset \mathbb{N}$, 使得 $Q_{N_k} \Rightarrow Q$, 这里 Q 是 $[-\pi,\pi]$ 上的某个非负有限测度. 这时考虑到 (29) 式, 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 得到关系式

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q(d\lambda) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} Q_{N_k}(d\lambda) = R(n). \quad \square$$

借助于已证明的定理可以得到平稳 (广义) 随机过程的 "谱表示".

定理 5. 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 是在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的中心化广义平稳过程. 这时, 在同一个概率空间上存在定义在 $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ 上的正交随机测度 Z, 使得 a.s. 有随机 "谱表示"

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda), \tag{30}$$

证. 根据 Herglotz 定理, 对 $s, t \in \mathbb{Z}$

$$r(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda} Q(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda}\overline{e^{it\lambda}} Q(d\lambda), \tag{31}$$

这里 Q 是在 $\mathscr{B}([-\pi,\pi])$ 上的非负有限测度. 这意味着满足 Karhunen 定理 (定理 3) 的条件 (18), 具有 $f(t,\lambda) = e^{it\lambda}, \lambda \in [-\pi,\pi], t \in \mathbb{Z}$. 因为空间 $L^2 = L^2([-\pi,\pi], \mathscr{B}([-\pi,\pi]), Q)$ 中的任意的函数, 在 L^2 中可以用连续函数来逼近, 且在端点 $-\pi, \pi$ 取同样的值, 而每个这样的函数又能被费耶尔 (Fejer) 和一致逼近 (参见, 例如, [35; 第VIII章, §2, 第 1 段]), 因此也满足条件 (20). 这样, 由 Karhunen 定理直接得到所要求的表示 (30). $\square$

注意, 由于 Karhunen 定理, 在 (31) 式中的*谱测度* Q 不是别的, 正是正交随机测度 Z 的*构造测度* (参见 (2)), 也正是在 (30) 中对它的积分.

在 (26) 式中所利用的测度 Q 可以重新定义 (而不改变符号), 将 "质量" $Q(\{-\pi\})$ 从点 $-\pi$ 移到点 π 处, 这里就有了 "质量" 为 $Q(\{-\pi\}) + Q(\{\pi\})$. 这时在 (26) 式的右半部分积分值不变, 因为对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $e^{-in\pi} = e^{in\pi}$. 重新定义的作法只是为了将积分区间变成 $(-\pi,\pi]$, 如同积分在单位圆周上. 如果这种移动 "质量" 成了, 则由于定理 2, $Z(\{-\pi\}) = 0$ a.s., 因此在 (30) 式中积分实际上是在区间 $(-\pi,\pi]$ 上. 自然而然, 类似地在 (30) 式中的积分可以是半开区间 $[-\pi,\pi)$ 上.

在所研究 (30) 式中的谱表示完成后, 不难发现给出的 ("谱") 术语引出是由 (根据 (30) 式) X_t 的值好像是由带有 "权重" $Z(d\lambda)$ 谱的调和因子 $e^{i\lambda t}$ "累加" 而成的.

§10. 作为随机谱表示的应用, (30) 式看作下面形式的*大数定律*.

定理 6. 设满足定理 5 的条件. 这时, 当 $N \to \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(\{0\}). \tag{32}$$

证. 利用 (30) 式的表示. 由于对正交随机测度的随机积分的线性性, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\lambda} Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_N(\lambda) Z(d\lambda),$$

这里

$$\Psi_N(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{(1-e^{iN\lambda})}{(1-e^{i\lambda})}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases}$$

因此, 由于定理 2

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k - Z\{0\} \right\|_{L^2(\Omega)} = \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_N(\lambda)|^2 Q(d\lambda), \tag{33}$$

这里 $\chi_N(\lambda) = \Psi_N(\lambda) - \mathbf{1}_{\{0\}}(\lambda), Q(\cdot)$ 是正交随机测度 $Z(\cdot)$ 的构造测度. 考虑到 $\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} e^{i\lambda k}\right| \leqslant 1, \lambda \in \mathbb{R}$, 同时 $\chi_N(0) = 0$ 和对 $\lambda \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\}$, 当 $N \to \infty$ 时有

$$|\chi_N(x)| \leqslant \frac{2}{N|1-e^{i\lambda}|} \to 0,$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理, 由 (33) 式得到性质 (32) 式. □

注 3. 如果 $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 是广义平稳过程, 且 $\mathsf{E}X_t = a, t \in \mathbb{Z}$, 则

$$X_t - a = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} Z(d\lambda)$$

和 $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(X_k - a) = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} X_k - a \xrightarrow{L^2(\Omega)} Z(\{0\})$. 因此, 当 $N \to \infty$ 时有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} a \tag{34}$$

当且仅当 $\mathsf{E}|Z(\{0\})|^2 = 0$; 这等价于条件$Q(\{0\}) = 0$. 意味着在 0 点谱测度没有原子.

性质 (34) 式经常被称作在 $L^2(\Omega)$ 中过程 X 的遍历性.

§11. 已经有了离散时间平稳过程的谱表示 (30) 式, 自然而然地也会提出关于连续时间平稳过程的谱表示问题.

带着这个目的, 我们还需要介绍下面的定义.

定义 8. 设 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上复数值 L^2- 过程称作过程 X 在某一点 $t \in \mathbb{R}$ 上均方连续, 如果, 当 $s \to t$ 时有

$$\|X(s) - X(t)\| \to 0, \tag{35}$$

这里 $\|\xi\|^2 = (\mathsf{E}|\xi|^2)^{1/2}, \xi \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. 在某个集合上的连续性就是指在该集合的任意点上的连续性.

定理 7. *广义平稳过程 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上均方连续当且仅当 (25) 式中的相关函数 $R = R(t)$ 在 0 点上连续.*

证. 必要性. 过程 $X(t)$ 和 $X(t) - a$, 这里 a 是常数, 显然, 它们同时是连续的 (均方意义下). 不失一般性, 可以假定过程有 0 中值. 它的相关函数 (协方差) $r(s,t) = \mathsf{E}X(s)\overline{X(t)} = R(s-t)$, 对 $s, t \in \mathbb{R}$.

显然,

$$|R(t) - R(0)| = |r(t,0) - r(0,0)| \leqslant \|X(t) - X(0)\| \cdot \|X(0)\|.$$

因此, 在 $\mathbb{R}$ 上过程 X 均方连续 (甚至于只是在 0 点) 导致当 $t \to 0$ 时有 $R(t) \to R(0)$.

充分性是由于 $\|X(s) - X(t)\|^2 = -(R(t-s) - R(0)) - (R(s-t) - R(0)) \to 0$, 当 $s \to t$ 时, 因为相关函数 $R = R(t)$ 在 0 点上连续. □

推论 3. *在 $\mathbb{R}$ 上非负定函数 $R = R(t)$, 如果它在 0 点连续, 则在 $\mathbb{R}$ 上连续.*

证. 设在 $\mathbb{R}$ 上非负定函数 R 在 0 点连续. 根据第二章定理 4 构造中心化具有协方差函数 $r(s,t) = \mathsf{E}X(s)\overline{X(t)} = R(s-t), s, t \in \mathbb{R}$ 的广义平稳 (Gauss) 过程 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$. 由于定理 7, 这个过程在 $\mathbb{R}$ 上均方连续. 这时, 当 $s \to t$ 时有

$$|R(s) - R(t)| = |\mathsf{E}X(s)\overline{X(0)} - \mathsf{E}X(t)\overline{X(0)}| \leqslant \|X(s) - X(t)\|\|X(0)\| \to 0$$

这样, 函数 $R = R(t)$ 在每一点 $t \in \mathbb{R}$ 上连续. □

§12. 描述在 $T = \mathbb{R}$ 上均方连续的平稳 (广义的) 过程的相关函数给出下面的结果.

定理 8 (博赫纳 (Bochner) – 辛钦 (Khinchin)). *设 $R = R(t), t \in \mathbb{R}$ 是在 0 点连续的非负定函数. 这时, 对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 有*

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} G(d\lambda), \tag{36}$$

这里 $G = G(d\lambda)$ 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的某个非负有限 (“谱的”) 测度.

显然, 在 (36) 式右半部分函数在整个直线上连续. 因此, 完全类似于 (27) 式, 可以确信它同样是非负定的. 这样定理 8 条件是必要的. 该条件充分性的证明将放到附录 4 当中.

定义 9. 如果对平稳过程 $X = \{X(t), t \in \Lambda\}$ 相关函数 (这里 $\Lambda = [-\pi, \pi]$ 或者 $\Lambda = \mathbb{R}$) 的表示式 (26) 或者 (36) 式中谱测度相对于 Lebeque 测度有密度 $g = g(\lambda)$, 则函数 g 称作过程 X 的*谱密度*.

由 (36) 式和 (I.25) 看出, 如果存在测度 G 的谱密度 g 时, 有

$$R(t)=\int_\Lambda e^{it\lambda}g(\lambda)d\lambda.$$

将在附录 4 中给出定理 8 的证明中, 得到如果相关函数 $R\in L'(\mathbb{R})$, 则对测度 G 存在在全直线上连续和有界的谱密度 $g=g(\lambda)$, 且这个密度可以由下面公式给出

$$g(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\lambda}R(t)dt. \tag{37}$$

定理 9 (克拉默(Cramer)). 设在某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上给定中心化广义平稳均方连续的随机过程 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}\}$ (只需要在 0 点连续). 这时, 在同一概率空间上存在在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上正交随机测度 $Z=Z(\cdot)$, 使得过程有如下面的随机 "谱表示".

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\lambda}Z(d\lambda),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{38}$$

证. 根据定理 7 和推论 3 函数 $R(t)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(0)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 根据第二章定理 4 有非负定性. 由 Bochner – Khinchin 定理有 (36) 式的表示. 因此,

$$r(s,t)=\operatorname{cov}(X(s),X(t))=R(s-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(s-t)\lambda}G(d\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{is\lambda}\overline{e^{it\lambda}}G(d\lambda),$$

这里 $G(\cdot)$ 是在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的有限 (非负) 测度. 这样, 得到相关函数具有如 (18) 式的表达式, 其中 $f(t,\lambda)=e^{it\lambda}(t,\lambda\in\mathbb{R})$.

所研究情况条件 (20) 同样成立. 事实上, $L^2=L^2(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),G)$ 中的任意函数 $f=f(\lambda)$ 可以用 "截割的" $f(\lambda)\mathbf{1}_{\{|\lambda|\leqslant a\}}$ 来逼近, 而后者又可以在 L^2 中用连续函数, 且在 $-a$ 和 a 取同一个值, 来逼近. 然后再取有限个形如 $\exp\{in\lambda\pi/a\},n\in\mathbb{Z}$ 函数的线性组合来逼近.

进而, 表示 (38) 式可由定理 3 (Karhunen 定理) 得出. 注意, 由于这个定理 3, 谱测度 G 重合于在 (38) 式积分中正交随机测度 Z 的构造测度. □

§13. 现在研究平稳过程的谱密度 (已经在 §10 末给出了解释), 它在谱表示中作为调和因子 $e^{i\lambda t}$ 的 "势". 为了简化, 仅仅限制于离散时间的情况.

定义 10. 中心化, 且在 $L^2(\Omega)$ 中标准正交化过程 $\varepsilon=\{\varepsilon_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 称作*白噪声*.

很容易看出, 那样的过程是具有谱密度 $g(\lambda)=1/(2\pi),\lambda\in[-\pi,\pi]$ 的广义平稳过程. 换句话说, 可以想象 "白色光" 过程 ε 看作是具有相同强度, 但各种不同调和因子 (振动) 的混合 (在谱表示的意义下).

下面的定理将给出关于存在谱密度的离散时间随机过程构造的一般结果.

定理 10. 设在某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 上给定中心化广义平稳随机过程 $X=\{X_t,t\in\mathbb{Z}\}$ 有谱密度当且仅当可找到数列 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l^2$ 和白噪声 $\varepsilon=\{\varepsilon_n,n\in\mathbb{Z}\}$,

它可能定义在扩充的概率空间上, 使得 a.s. (相对于扩充的概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 的概率 $\widetilde{\mathsf{P}}$) 有

$$X_t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\varepsilon_{t-k}\left(=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{t-k}\varepsilon_k\right),\quad t\in\mathbb{Z},\tag{39}$$

这里, 级数是均方收敛.

回顾, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l^2$, 如果 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(c_k)^2<\infty$.

在证明之前, 需要说的是, 如果过程 X 有 (39) 式的表示, 则称过程为*滑动平均过程*. 也说过程 X 是借助于 "滤波器" (filter), 且在 "入口" 处遭受到白噪声 ε 所得到的. 滤波器称作*物理上可实现的*, 如果 $c_k=0$, 对 $k<0$. 这种情况说明, 在时刻 t 过程的值可以由在 $k\leqslant t$ 时量 ε_k 所确定 (即在滤波器的 "出口" 处量 X_t 的公式中没有在 "入口" 处过程 ε "将来" 值的参与).

证. 设关系式 (39) 成立. 这里 $\{c_k\}$ 和 $\{\varepsilon_k\}$ 如定理条件所述. 很容易看出, 因为对 $-\infty<M\leqslant N<\infty$ 有 $\widetilde{\mathsf{E}}\sum\limits_{k=M}^{N}c_{t-k}\varepsilon_k=0$ 和在 (39) 式中的级数在 $L^2(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 中收敛, 则有对所有的 $t\in\mathbb{Z}$ 有 $\widetilde{\mathsf{E}}X_t=0$, 这里 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 依测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 取平均. 根据**帕塞瓦尔 (Parseval) 不等式**, 对任意的 $s,t\in\mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned}r(s,t)&=\widetilde{\mathsf{E}}\left(\sum_k c_{s-k}\varepsilon_k\overline{\sum_l c_{t-l}\varepsilon_l}\right)=\sum_k c_{s-k}\bar{c}_{t-k}=\sum_j c_j\bar{c}_{j-(s-t)}\\&=R(s-t).\end{aligned}\tag{40}$$

因此, X 是中心化广义平稳随机过程.

引入函数

$$\Phi(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{-k}e^{ik\lambda}.\tag{41}$$

因为 $\{c_k\}\in l^2$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{is\lambda}\overline{e^{it\lambda}}d\lambda=\begin{cases}2\pi, & \text{当 } s=t,\\ 0. & \text{当 } s\neq t\ (s,t\in\mathbb{Z}),\end{cases}\tag{42}$$

则级数 (41) 在 $L^2([-\pi,\pi])=L^2([-\pi,\pi],\mathscr{B}([-\pi,\pi]),\mathrm{mes})$ 中收敛, 这里 mes 是 Lebesgue 测度 (在 (41) 式中的 Φ 是在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中等价函数类的代表).

在同一空间 $L^2([-\pi,\pi])$ 中, 对函数 $\Phi(\lambda)e^{is\lambda}$ 有表示

$$\Phi(\lambda)e^{is\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{-k}e^{i(k+s)\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_{s-j}e^{ij\lambda}.\tag{43}$$

根据 Parseval 不等式, 由 (43) 式和 (42) 式, 考虑到 (40) 式有

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda}|\Phi(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\lambda)e^{is\lambda}\overline{\Phi(\lambda)e^{it\lambda}}d\lambda = \sum_j c_{s-j}\overline{c}_{t-j} = r(s,t). \tag{44}$$

函数 $\Phi(\cdot) \in L^2([-\pi,\pi])$, 即 $|\Phi(\cdot)|^2 \in L^1([-\pi,\pi])$. 因此 (44) 式说明, 如果有 (39) 式, 则函数 $g(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2, \lambda \in [-\pi,\pi]$ 是过程 $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 的谱密度.

为了证明相反的结论, 假设 $g = g(\lambda)$ 是过程 $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 的谱密度. 这时, $g(\cdot) \in L^1([-\pi,\pi])$ 和几乎所有的 (依 Lebesgue 测度) $g(\lambda) \geqslant 0$ (对过程 X 的谱测度 G 有 $G(B) = \int_B g(\lambda)d\lambda, B \in \mathscr{B}([-\pi,\pi])$). 设 $\Phi(\lambda) = \sqrt{g(\lambda)}$ (在 $g(\lambda) < 0$ 的 0 测度集上, 设 $\Phi(\lambda) = 0$). 这时 $\Phi(\lambda) \in L^2([-\pi,\pi])$, 而完备的标准正交函数系 $\{(2\pi)^{-1/2}e^{ik\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}, k \in \mathbb{Z}$ 给出了

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}e^{ik\lambda}, \tag{45}$$

这里 $\{c_k\} \in l^2$ 和级数 (45) 在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中收敛. 重新利用 Parseval 不等式, 有

$$\begin{aligned} r(s,t) = R(s-t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda}g(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{is\lambda}\Phi(\lambda)\overline{e^{it\lambda}\Phi(\lambda)}d\lambda = \sum_k c_{s-k}\overline{c}_{t-k}. \end{aligned} \tag{46}$$

取 $\Lambda = \mathbb{Z}$, 设 μ 是在 $\mathbb{Z}$ 中所有子集组成的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}$ 上的计数测度, 即 σ 有限测度, 它集中在集合 $\mathbb{Z}$ 上, 且 $\mu(\{k\}) = 1, k \in \mathbb{Z}$. 设 $f(t,\alpha) = c_{t-\alpha}$, 这里 $t,\alpha \in \mathbb{Z}, \{c_k\} \in L^2(\Lambda,\mathscr{B},\mu)$, 即 $\{c_k\} \in l^2$. 这时, 公式 (46) 可以写成 (18) 式的形式. 因此, 根据定理 3 存在 (原概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 可能在扩充的空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 上) 中心化正交随机测度 $Z(\cdot)$ 使得

$$X_t = \int_{\Lambda} f(t,\alpha)Z(d\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{t-k}\varepsilon_k, \tag{47}$$

这里 $\varepsilon_k = Z(\{k\})$, 而级数 (47) 在 $L^2(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathsf{P}})$ 中收敛. 同时, 中心化变量 $\varepsilon_k, k \in \mathbb{Z}$ 不仅是正交的, 而且是标准正交的, 因为 $\mathsf{E}|\varepsilon_k|^2 = \mu(\{k\}) = 1, k \in \mathbb{Z}$. □

注 4. 由给出的证明可以看出, 表示 (39) 式等价于中心化广义平稳过程 $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 具有下面的谱密度:

$$g(\lambda) = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}e^{ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi,\pi].$$

§14. 要研究一个在应用方面非常重要的问题, 即前面所述的*平稳过程谱密度的统计估计问题*. 就是要问在平稳过程的表示中, 这样或者那样的谱频率上具有什么样的 "权重".

设 $X=\{X_t, t\in\mathbb{Z}\}$ 是具有相关函数 $R(n)=\mathsf{E}X_{n+k}\overline{X}_k, k,n\in\mathbb{Z}$ 的中心化广义平稳过程. 公式 (29) 指出在 (28) 式中引入的函数 $g_N(\lambda)$ 可以看作谱密度 $g(\lambda)$ 的逼近 (当它存在时). 由此可得, 如果根据观测 $X_0, X_1, \cdots, N_{N-1}$ 作为相关函数 $R(m)$ 的估计量取量

$$\widehat{R}_N(m)=\begin{cases}\dfrac{1}{N-m}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-m-1}X_{m+k}\overline{X}_k, & \text{当 } 0\leqslant m\leqslant N-1,\\ \overline{\widehat{R}_N(-m)}, & \text{当 } -(N-1)\leqslant m<0,\\ 0, & \text{当 } m \text{ 其余的 } (m\in\mathbb{Z}),\end{cases}\tag{48}$$

则对谱密度 $g(\lambda)$ 的估计量自然是 (参见 (28) 式) 函数

$$\widehat{g}_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{|m|<N}\widehat{R}_N(m)e^{-i\lambda m}\left(1-\frac{|m|}{N}\right).$$

经过简单的变换, 函数 $\widehat{g}_N(\lambda)$ 可以表示成

$$\widehat{g}_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{-i\lambda k}\right|^2,\tag{49}$$

它称作 "周期图" (periodogram). 很容易看出, 因为对 m 且 $|m|\leqslant N-1$ 有 $\mathsf{E}\widehat{R}_N(m)=R(m)$, 则

$$\mathsf{E}\widehat{g}_N(\lambda)=g_N(\lambda).\tag{50}$$

注意,

$$\begin{aligned}g_N(\lambda)&=\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}R(k-l)e^{-i\lambda(k-l)}\\&=\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\nu(k-l)}g(\nu)d\nu\right)e^{-i\lambda(k-l)}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}e^{i(\nu-\lambda)k}e^{-i(\nu-\lambda)l}g(\nu)d\nu\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=0}^{N-1}e^{i(\nu-\lambda)k}\right|^2 g(\nu)d\nu=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(\nu-\lambda)g(\nu)d\nu,\end{aligned}\tag{51}$$

这里函数 (Fejér 核)

$$\Phi_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\lambda k}\right|^2=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi N}\left(\dfrac{\sin(N\lambda/2)}{\sin(\lambda/2)}\right)^2, & \lambda\neq 2\pi m, m\in\mathbb{Z},\\ \dfrac{N}{2\pi}, & \lambda=2\pi m, m\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

这样, 公式 (50) 和 (51) 显示周期图是谱密度的**渐近无偏 (unbiased) 估计**, 即对几乎所有 $\lambda \in [-\pi, \pi]$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(\nu - \lambda) g(\nu) d\nu \to g(\lambda), \quad 当\ N \to \infty. \tag{52}$$

由 Fejér 核的性质得到 (参见, 例如, [35; 第 VIII 章, §2]), 对所有函数 $g \in C([-\pi, \pi])$ 成立. 但是均方误差 $\mathsf{E}|\widehat{g}_N(\lambda) - g(\lambda)|^2$ 随着 N 的增加, 一般地说并不趋于 0. 因此, 在实践中代替估计 $\widehat{g}_N(\lambda)$ 采用平滑化的估计 $\widehat{g}_N^W$, 即估计量

$$\widehat{g}_N^W(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \nu) \widehat{g}_N(\nu) d\nu,$$

这里 $W_N(\cdot), N \in \mathbb{N}$ 称作 "谱窗口", 它的选取, 使得:

a) 函数 $W_N(\lambda)$ 在 0 点的邻域有很尖锐的极大值;

b) $\int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda) d\lambda = 1$;

c) 当 $N \to \infty$ 时, 对 $\lambda \in [-\pi, \pi]$ 有 $\mathsf{E}|\widehat{g}_N^W(\lambda) - g(\lambda)|^2 \to 0$.

例如, 借助窗口 $W_N(\lambda) = a_N B(a_N \lambda)$ 的**巴特利特 (Bartlett) 估计**, 这里

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} \right|^2, \quad B(0) = \frac{1}{2\pi},$$

而序列 $a_N \uparrow \infty, a_N / N \to 0 (N \to \infty)$.

在条件 a),b),c) 下, 其他形式的谱窗口, 可参见, 例如, [85; 第 VI 章, §4]), 还可以看 [6,80].

§15. 平稳过程各章节中最有意义的 (无论从理论上, 还是从应用上) 一节是关于利用这个过程的 "过去" 值来**预测 (forecast) (外插 (extrapolation))** 它的 "将来" 值.

从预测问题的最简单情况开始. 设 $X = \{X(t), t \in T\}$, $T \subset \mathbb{R}$ 是 L^2- 过程. 需要找出随机变量 $X(t)$ 的最佳逼近 (依照 $L^2(\Omega)$ 空间的范数 $\|\cdot\|$), 基于在时刻 $s < t$ 以前所有过程 X 的值. 如果假设所有随机变量 y 是 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_s = \sigma\{X(u), u \leqslant s, u \in T\}$ 可测的, 且模的平方是可积的, 即随机变量 $y \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, \mathsf{P})$, 则问题归结为求量

$$\inf\{\|X(t) - y\| : y \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, \mathsf{P})\}$$

和那样的值 y, 使得这个 inf 可以达到 (那样的元素是存在的).

根据 Hilbert 空间 H 的定理, 所有的元素 $x \in H$ 可以表示成 (对给定的子空间 $L \subset H$) 如下唯一形式: $x = y + z$, 这里 $y \in L$ 和 $z \in L^\perp$ (在 H 中 L 的正交补). 量 y 一般用 $\mathrm{Pr}_L x$ 来表示, 这里算子 Pr_L 称作从 H 投影到 L 的投影算子.

进而, 取 $H = L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 和 $L = L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, \mathsf{P})$, 找到

$$\inf\{\|X(t) - y\| : y \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, \mathsf{P})\} = \|X(t) - \mathrm{Pr}_{L^2(\Omega,\mathscr{F}_s,\mathsf{P})} X(t)\|.$$

在第四章习题 1 中, 已经指出如果 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$ 和随机变量 $Y \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, 则 (依概率 P - a.s.) 有

$$\mathrm{Pr}_{L^2(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})} Y = \mathsf{E}(Y|\mathscr{A}).$$

这样, 在均方意义下在 $L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, \mathsf{P})$ 中对 $X(t)$ 的最佳估计是条件数学期望 $\mathsf{E}(X(t)|\mathscr{F}_s)$.

寻求关于 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_s$ 的条件数学期望, 一般来说是一个非常复杂的问题. 但是, 如果只是限制基于在随机变量 $X_u, u \leqslant s, u \in T$ 的线性组合 (和它们在空间 $L^2(\Omega)$ 的极限) 上的**线性预测**, 则问题本质上有简化. 对于它的解采用 Hilbert 空间理论非常有利, 它可以帮助得到一系列有趣的结果. 这些结果是关于某些重要平稳过程类的构造.

为研究线性预测, 对 $s \in T$ 引入空间 $H_s(X)$, 它是随机变量 $X(u), u \leqslant s, u \in T$ 的线性组合在均方意义下的闭包. 设

$$H_{-\infty}(X) = \bigcap_{s \in T} H_s(X), \quad H(X) = L^2[X],$$

这里 $L^2[X]$ 在 $L^2(\Omega)$ 中, 所有随机变量 $X(u), u \in T$ 线性组合的闭包, 显然, $H(X)$ 是在 $L^2(\Omega)$ 中包含所有空间 $H_s(X), s \in T$ 的最小子空间. 我们研究的利用这个过程到时刻 s 的 "过去" 值来**线性预测**量 $X(t)$ 的问题, 现在就成了利用空间 $H_s(X)$ 的元素**最佳逼近** $X(t)$ (依 $L^2(\Omega)$ 空间的范数) 的问题. 这样, 被称为**线性预测的误差**自然就是量 (对所有的 $s, t \in T$)

$$\Delta(s, t) = \inf\{\|X(t) - y\| : y \in H_s(X)\} \tag{53}$$

前面所提到的线性预测问题的解就是 $P_s X(t)$, 这里为了简单用 P_s 来代替算子 $\mathrm{Pr}_{H_s(X)}$ (从 $H(X)$ 到 $H_s(X)$).

引入的线性预测误差 $\Delta(s, t)$ 满足下列的性质: 对所有的 $s, t, u \in T$ 有

$$\Delta(s, t) = \Delta(s + u, t + u) \tag{54}$$

(注意, 如果 $y = c_1 X(s_1) + \cdots + c_n X(s_n) \in H_s(X)$ 和 $z = c_1 X(s_1 + u) + \cdots + c_n X(s_n + u) \in H_{s+u}(X)$, 这里 $c_k \in \mathbb{C}, s_k \in T, s_k \leqslant s$, 则由于过程 X 的平稳性有 $\|X(t) - y\|^2 = \|X(t + u) - z\|^2$).

由 (54) 式得到, 量 $\Delta(s, s + u)$ 不依赖于 s, 因此可以假设

$$\delta(u) := \Delta(s, s + u), \quad u \in T;$$

这样, 对 $u \leqslant 0$ $(u \in T)$ 有 $\delta(u)=0$ 和对 $v \leqslant u(u, v \in T)$ 有

$$\delta(v) \leqslant \delta(u). \tag{55}$$

完全清楚性质 (55) 的含义: 利用这个过程在时刻 s 的 "过去" 值 $H_s(X), s \leqslant t$, 来线性预测的误差随着 s 减少而增加.

§16. 线性预测误差 $\delta(t), t \geqslant 0$ 的渐近趋势问题是与下面的概念有着密切联系.

定义 11. 设 $T=\mathbb{R}$ 或者 $T=\mathbb{Z}$, $X=\{X(t), t \in T\}$ 是中心化的平稳随机过程. 过程 X 称作奇异的 (singular) 或者确定性的, 如果 $H_{-\infty}(X)=H(X)$, 即对所有的 $s, t \in T$ 有 $H_s(X)=H_t(X)$. 过程 X 称作规则的 (regular) 或者纯非确定性的, 如果 $H_{-\infty}(X)=\{0\}$ (记作 $=0$).

定理 11. 中心化平稳随机过程 X 是

1) 奇异的当且仅当对某个 $t_0>0, t_0 \in T$ 有 $\delta(t_0)=0$ (这时, 对所有的 $t \in T$ 有 $\delta(t)=0$);

2) 规则的当且仅当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$\delta^2(t) \rightarrow R(0), \tag{56}$$

这里, $R(0)$ 是过程的相关函数 $R(t)$ 在 0 点的值 (在我们的情况有 $R(t)=\mathsf{E} X(t) \overline{X}(0)$).

证. 1) 如果过程 X 是奇异的, 则 $X(t) \in H_t(X)=H_s(X)$, 因此对任意的 $s, t \in T$ 有 $\Delta(s, t)=0$.

设对某个 $t_0>0(t_0 \in T)$ 有 $\delta(t_0)=0$. 这时对任意的 $s \in T$ 有 $X(s+t_0) \in H_s(X)$. 由于 (55) 式对 $t \leqslant s+t_0$ 有 $X(t) \in H_s(X)$. 因此, 得到 $H_t(X)=H_s(X)$ 对 $s \leqslant t \leqslant s+t_0$. 由于 s 的任意性, 看出 X 是奇异的.

2) 设满足关系式 (56). 对 $s, t \in T$ 有

$$R(0)=\|X(t)\|^2=\|P_s X(t)\|^2+\|X(t)-P_s X(t)\|^2=\|P_s X(t)\|^2+\delta^2(t-s). \tag{57}$$

因此, 当 $s \rightarrow -\infty$ 时, 对每个 $t \in T$ 有 $\|P_s X(t)\| \rightarrow 0$. 注意, 如果 L_1, L_2 是 Hilbert 空间 H 的子空间, 且 $L_1 \subset L_2$, 则对任意的 $x \in H$ 有 $\|P_{L_1} x\| \leqslant \|P_{L_2} x\|$. 这样, 对每个 $s, t \in T$ 有 $\|P_{-\infty} X(t)\| \leqslant \|P_s X(t)\|$. 于是 $P_{-\infty} X(t)=0$, 即对 $t \in T$ 有 $X(t) \perp H_{-\infty}(X)$, 由此可得 $H(X) \perp H_{-\infty}(X)$. 因为 $H_{-\infty}(X) \subset H(X)$, 所以 $H_{-\infty}(X)=\{0\}$.

从另一方面, 设 $H_{-\infty}(X)=0$, 考虑到 (57) 式, 可以看出关系式 (56) 直接可由下面的引理得出.

引理 3. 设 $H_t, t \in T$ 是 Hilbert 空间 H 中递降子空间族, 即当 $s \leqslant t, s, t \in T$ 时有 $H_s \subset H_t$. 如果 $\bigcap_{t \in T} H_t = \{0\}$, 则当 $s \to -\infty$ 时有 $P_s x \to 0$ 对每个 $x \in H$, 这里, P_s 是由 H 到 H_s 的投影算子.

证. 因为对每个 $x \in H$, 当 $s \leqslant t$ 时有 $\|P_s x\| \leqslant \|P_t x\|$, 则只需要证当 $k \to \infty$ 时有 $\|P_{t_k} x\| \to 0$, 这里 $t_{k+1} < t_k, k \in \mathbb{N}$ 和 $\lim_{k \to \infty} t_k = -\infty$. 设 $L_k = H_{t_k} \ominus H_{t_{k+1}}$, 即 $H_{t_{k+1}} \oplus L_k = H_{t_k}, k \in \mathbb{N}$. 这时, 对任意的 $x \in H, m > k$ 有

$$P_{t_k} x = P_{t_m} x + \sum_{j=k}^{m-1} Q_j x,$$

这里 Q_j 是由 H 到 L_j 的投影算子. 由此可得 $\|P_{t_k} x\|^2 = \|P_{t_m} x\|^2 + \sum_{j=k}^{m-1} \|Q_j x\|^2$. 因此, $\sum_{j=1}^{\infty} \|Q_j x\|^2 \leqslant \|P_{t_1} x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. 这样, 当 $m > k$ 时如果 $k, m \to \infty$, 有

$$\|P_{t_k} x - P_{t_m} x\|^2 = \sum_{j=k}^{m-1} \|Q_j x\|^2 \to 0$$

(显然可以研究 $k \geqslant m$ 的情况). 由于空间 H 的完备性, 存在极限元素 $y = \lim_{k \to \infty} P_{t_k} x$. 因为当 $k \geqslant m$ 时有 $P_{t_k} x \in H_{t_m}$, 则 $y \in H_{t_m}$ 对任意的 $m \in \mathbb{N}$. 得到 $y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{t_m}$. 由于族 H_t 的单调性, 所以满足 $\bigcap_{m=1}^{\infty} H_{t_m} = \bigcap_{t \in T} H_t$. 因为根据假设 $\bigcap_{t \in T} H_t = \{0\}$, 则有 $y = 0$. □

进而引理 3 和定理 11 证毕. □

§17. 这一节所述的是具有技巧性, 建议初学者先读下一节 §18, 然后再回过头来阅读这一节.

在空间 $H(X)$ 中引入推移算子 $S_u, u \in T$ ($T = \mathbb{R}$ 或者 $T = \mathbb{Z}$), 假设

$$S_u(c_1 X(t_1) + \cdots + c_n X(t_n)) = c_1 X(t_1 + u) + \cdots + c_n X(t_n + u),$$

这里 $c_k \in \mathbb{C}, t_k \in T, k = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{N}$. 给定的定义是相容的. 事实上, 如果 $\sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) = \sum_{j=1}^{m} d_j X(s_j)$, 这里 $d_j \in \mathbb{C}, s_j \in T, j = 1, \cdots, m, m \in \mathbb{N}$, 则由于 X 的平稳性对 $u \in T$ 有

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k) - \sum_{j=1}^{m} d_j X(s_j) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k X(t_k + u) - \sum_{j=1}^{m} d_j X(s_j + u) \right\|^2.$$

类似地可以建立起对每个 $u \in T$ 有

$$(S_u x, S_u y) = (x, y), \quad x, y \in \mathrm{Lin}\{X(t), t \in T\}.$$

换句话说, S_u 是在随机变量 $X(t), t\in T$ 的线性组合 $\mathrm{Lin}\{X(t), x\in T\}$ 上的保距算子, 且 $\|S_u x\| = \|x\|$ 对 $x\in \mathrm{Lin}\{X(t), t\in T\}, u\in T$. 因此, S_u 可以唯一地延拓到 $H(X)$ 上成为保距算子.

不难验证 (先验证元素在 $\mathrm{Lin}\{X(t), t\in T\}$), $(S_u)_{u\in T}$ 组成在 $H(X)$ 中的算子群, 即对 $u, v\in T$ 有

$$S_{u+v} = S_u S_v.$$

这里 $S_0 = I$ 是恒等算子.

这样, 所构造的推移算子 $S_u, u\in T$ 构成在 $H(X)$ 上保距 (意味着线性的) 算子群.

引理 4. 对任意的 $u, v\in T$

$$S_u H_v(X) = H_{u+v}(X), \quad S_u H_{-\infty}(X) = H_{-\infty}(X), \tag{58}$$

$$P_{u+v} S_u = S_u P_v, \quad P_{-\infty} S_u = S_u P_{-\infty}, \tag{59}$$

这里 P_t 是由 $H(X)$ 到 $H_t(X)$ 的投影算子, $t\in T\bigcup\{-\infty\}$.

证. 对 $u, v\in T$, 显然 $S_u(\mathrm{Lin}\{X(t), t\leqslant v, t\in T\})\subset H_{u+v}(X)$. 因此 $S_u H_v(X)\subset H_{u+v}(X)$. 考虑到 $S_u S_{-u} = I$, 有

$$H_{u+v}(X) = S_u S_{-u} H_{u+v}(X)\subset S_u H_v(X).$$

在 (58) 式中第一个等式已证明了.

如果 $x\in H_{-\infty}(X)$, 则 $x\in H_t(X)$ 对所有的 $t\in T$. 根据已证的, 对任意的 $t\in T$ 有 $S_u x\in H_{t+u}(X)$. 因此, $S_u x\in H_{-\infty}(X)$, 即 $S_u H_{-\infty}(X)\subset H_{-\infty}(X)$. 这样,

$$H_{-\infty}(X) = S_u S_{-u} H_{-\infty}(X)\subset S_u H_{-\infty}(X).$$

于是完成了 (58) 式中的第二个等式.

由于算子 $S_u, P_v, u, v\in T$ 的线性性, 为了证明在 (59) 式中的等式只需要验证在等式两边相应的算子作用在 $X(t), t\in T$ 的结果是一样的.

对 $u, v, t\in T$ 有 $P_{u+v} S_u X(t) = P_{u+v} X(t+u)$. 另一方面 $X(t) = y_v(t) + z_v(t)$, 这里 $y_v(t) = P_v X(t)\in H_v(X), z_v(t)\perp H_v(X)$. 然后, $X(t+u) = S_u X(t) = S_u y_v(t) + S_u z_v(t)$, 这里 $S_u y_v(t)\in H_{u+v}(X)$, 而对任意的 $h\in H_{u+v}(X)$ 由于 (58) 式第一等式得到 $h = S_u g$, 这里 $g\in H_v(X)$. 由此可得

$$(h, S_u z_v(t)) = (g, z_v(t)) = 0.$$

如果 Hilbert 空间 $H = L\oplus L^{\perp}$, 则任意的元素 $x\in H$ 唯一表示成 $x = y + z$, 其中 $y\in L, z\in L^{\perp}$. 因此 $S_u P_v X(t) = S_u y_v(t) = P_{u+v} X(t+u)$. 进而 (59) 式第一等式证明完毕.

类似地, $P_{-\infty}S_uX(t) = P_{-\infty}X(t+u), X(t) = y_{-\infty}(t) + z_{-\infty}(t)$, 这里 $y_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$ 和 $z_{-\infty}(t) \perp H_{-\infty}(X)$. 这时, $X(t+u) = S_uX(t) = S_uy_{-\infty}(t) + S_uz_{-\infty}(t)$. 因为 $S_uy_{-\infty}(t) \in H_{-\infty}(X)$ 和 $S_uz_{-\infty}(t) \perp H_{-\infty}(X)$ (根据 (58) 式第二等式), 则 $S_uP_{-\infty}X(t) = S_uy_{-\infty}(t) = P_{-\infty}X(t+u)$. □

§18. 前面所述过程的奇异性和规则性对描述平稳过程的一般构造是非常有用的.

定理 12 (沃尔德 (Wold)). 中心化广义平稳过程 $X = \{X(t), t \in T\}$, 这里 $T = \mathbb{R}$ 或者 $T = \mathbb{Z}$, (对每个 $\omega \in \Omega$) 可以分解为下面的形式:

$$X(t) = M(t) + N(t), \quad t \in T, \tag{60}$$

这里 $M = \{M(t), t \in T\}$ 是奇异的, 而 $N = \{N(t), t \in T\}$ 是规则的过程, 且 $M \perp N$, 即对 $s, t \in T$ 有 $M(s) \perp N(t)$. 除此之外, 过程 M 和 N 是中心化广义平稳过程. 分解是唯一的, 如果还满足下面"从属"条件: $M(t) \in H_t(X)$ (这时 $N(t) \in H_t(X)$) 对每个 $t \in T$.

证. 设 $M(t) = P_{-\infty}X(t)$ 和 $N(t) = X(t) - M(t)$ 对 $t \in T$. 显然, 这样定义的过程 $M = \{M(t), t \in T\}$ 和 $N = \{N(t), t \in T\}$ 有 (60) 式的表示.

根据过程 M 和 N 的定义有 $M(t) \in H_{-\infty}(X)$ 和 $N(t) \perp H_{-\infty}(X)$ 对 $t \in T$. 因而, $M \perp N$. 由 (60) 式得出 $X(t) \in H_t(M) \oplus H_t(N)$, 因此, $H_t(X) \subset H_t(M) \oplus H_t(N)$. 从另一方面, $M(t) \in H_{-\infty}(X) \subset H_t(X)$. 由此可得 $H_t(M) \subset H_t(X)$, 这时, 由于 (60) 式对 $t \in T$ 有 $H_t(N) \subset H_t(X)$. 这样, $H_t(M) \oplus H_t(N) \subset H_t(X)$, 且得到,

$$H_t(X) = H_t(M) \oplus H_t(N), \quad t \in T. \tag{61}$$

注意, 对 $t \in T$ 有 $H_t(N) \perp H_{-\infty}(X)$, 由此 $H_{-\infty}(N) \perp H_{-\infty}(X)$. 同时 $H_t(N) \subset H_t(X)$, 因此, $H_{-\infty}(N) \subset H_{-\infty}(X)$, 这样 $H_{-\infty}(N) = \{0\}$, 即 N 是规则的过程. 我们知道, $H_t(M) \subset H_{-\infty}(X), t \in T$. 由 (61) 式得到 $H_{-\infty}(X) \subset H_t(M) \oplus H_t(N)$. 考虑到 $H_t(N) \perp H_{-\infty}(X)$, 得出 $H_{-\infty}(X) \subset H_t(M), t \in T$. 因此, $H_t(M) = H_{-\infty}(X), t \in T$, 即 M 是奇异的过程.

验证, M, N 是广义平稳过程. 因为 $M(t) \in H_{-\infty}(X) \subset H(X)$, 则 $\mathsf{E}M(t) = 0$, 因此, $\mathsf{E}N(t) = 0, t \in T$. 这样, M, N 是中心化随机过程. 对 $t, u, v \in T$ 利用引理 4 和算子 S_u 的保距性有

$$\begin{aligned}(M(v+u), M(t+u)) &= (P_{-\infty}X(v+u), P_{-\infty}X(t+u)) \\ &= (P_{-\infty}S_uX(v), P_{-\infty}S_uX(t)) \\ &= (S_uP_{-\infty}X(v), S_uP_{-\infty}X(t)) \\ &= (P_{-\infty}X(v), P_{-\infty}X(t)) = (M(v), M(t)).\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}(N(v+u),N(t+u)) &= (X(v+u)-M(v+u),X(t+u)-M(t+u))\\ &= (X(v),X(t))-(P_{-\infty}S_uX(v),S_uX(t))\\ &\quad -(S_uX(v),P_{-\infty}S_uX(t))+(M(v),M(t))\\ &= (X(v),X(t))-(M(v),X(t))-(X(v),M(t))+(M(v),M(t))\\ &= (X(v)-M(v),X(t)-M(t))=(N(v),N(t)).\end{aligned}$$

这样, 过程 M 和 N 有 (60) 式的表示, 且是广义平稳过程.

现证分解 (60) 式是唯一的. 设与 (60) 式同时还有另一个分解 $X=U(t)+V(t)$, 这里 $U=\{U(t),t\in T\},V=\{V(t),t\in T\}$ 是相应于奇异的和规则的过程, 且 $U\perp V,U(t),V(t)\in H_t(X),t\in T$. 这时,

$$H_t(X)=H_t(U)+H_t(V)=H(U)\oplus H_t(V),\quad t\in T.$$

因此,

$$H_{-\infty}(X)=\bigcap_{t\in T}(H(U)\oplus H_t(V))=H(U)\oplus\bigcap_{t\in T}H_t(V)=H(U)+\{0\}=H(U).$$

总之, 找到

$$\begin{aligned}M(t)&=P_{-\infty}X(t)=\mathrm{Pr}_{H(U)}X(t)\\ &=\mathrm{Pr}_{H(U)}U(t)+\mathrm{Pr}_{H(U)}V(t)=\mathrm{Pr}_{H(U)}U(t)+0=U(t),\end{aligned}$$

显然, 对所有的 $t\in T$ 有 $N(t)=V(t)$. 定理 12 的所有结论都证毕. □

注 5. (60) 式分解是由 Wold 首先对离散时间平稳过程得到的. Cramer 证明了定义在集合 $T\subset\mathbb{R}$ 上的任意中心化 L^2- 过程 X (不一定是平稳的) 可以分解为相互垂直两项, 一项称作奇异的, 而另一项是规则的. “从属” 条件 (参见定理 12) 保证所作分解的唯一性. 这样我们证明了定理 12, 也是 Cramer 的结果.

需要强调的是, (30) 式和 (38) 式是在谱的 (频率的) 区域进行的随机表示, 而分解 (60) 式的另一个特点, 是在时间区域进行的.

同时注意, 引理 4 直接可得到关系式 (54), 事实上,

$$\begin{aligned}\Delta(s+u,t+u)&=\|X(t+u)-P_{s+u}X(t+u)\|=\|S_uX(t)-P_{s+u}S_uX(t)\|\\ &=\|S_uX(t)-S_uP_sX(t)\|=\|X(t)-P_sX(t)\|=\Delta(s,t).\end{aligned}$$

§19. 更详细研究规则的过程的构造.

定义 12. 白噪声 $\varepsilon=\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 称为对中心化 L^2- 过程 $X=\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 的革新过程, 如果对所有的 $n\in\mathbb{Z}$ 有 $H_n(X)=H_n(\varepsilon)$.

借助于这个概念, 下面的定理给出了对所有离散时间规则的过程的描述.

定理 13. 非退化中心化广义平稳过程 $X=\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 是规则的必要充分条件是可以找到革新过程 $\varepsilon=\{\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 和复数序列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}\in l^2$, 使得 a.s. 有

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon_{n-k},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{62}$$

这里, 级数是均方收敛.

证. 设 X 是规则的过程. 很容易看出, 对每个 $m\in\mathbb{Z}$, 空间 $H_m(X)$ 是由在 $L^2(\Omega)$ 中形如 $h_{m-1}+cX(m)$ 元素的闭包所组成, 这里 $h_{m-1}\in H_{m-1}(X), c\in\mathbb{C}$. 因为 $X(m)=g_{m-1}+z_m$, 其中 $g_{m-1}\in H_{m-1}(X)$ 和 $z_m\perp H_{m-1}(X)$, 则 $H_m(X)$ 表示是在 $L^2(\Omega)$ 中形如 $h_{m-1}+cz_m$ 元素的闭包, 准确地说就是这种形式的元素所组成. 注意, $z_m\neq 0$ (0 是在 $L^2(\Omega)$ 中 a.s. 等于 0 的函数类). 事实上, 如果 $z_m=0$, 则这时 $H_{m-1}(X)=H_m(X)$, 由于 (58) 式得到对任意的 $n\in\mathbb{Z}$ 有 $H_{n-1}(X)=H_n(X)$, 从而矛盾于奇异性.

取 $\xi_n=z_n/\|z_n\|$, 利用在引理 3 的证明中的讨论, 正是, 对固定的 $n\in\mathbb{Z}$ 取序列 $t_k=n-k, k\in\mathbb{Z}_+$. 在所研究的情况子空间 $L_k:=H_{t_k}\ominus H_{t_{k+1}}$ 是由向量 $\xi_{n-k}(k\in\mathbb{Z}_+)$ 所产生的. 因为当 $k\to\infty$ 时, $\|P_{t_k}X(n)\|\to 0$, 则导致 (62) 形式的等式, 其中 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\|X_n\|^2<\infty$.

因此, 对任意固定的 $n\in\mathbb{Z}$ (62) 式证明了, 所以系数 $c_k, k\in\mathbb{Z}$, 一般来说, 依赖于 n. 换句话说, 只是建立了

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(n)}\xi_{n-k},$$

这里级数在 $L^2(\Omega)$ 中收敛, $c_k^{(n)}=(X_n,\xi_{n-k}), n,k\in\mathbb{Z}$.

为了得到 (62) 式最简单的是取在 $H(X)$ 中的另一组基. 设 $\varepsilon_k=S_k\xi_0, k\in\mathbb{Z}$ (根据前面所述, S_k 是在 $H(X)$ 中的推移算子). 考虑到 (58) 式, 看出 $\varepsilon_k\in H_k(X), \varepsilon_k\perp H_{k-1}(X)$. 除此之外, $\|\varepsilon_k\|=\|\xi_0\|=1, k\in\mathbb{Z}$. 因为一维子空间 $H_k(X)\ominus H_{k-1}(X)$ 由向量 ξ_k 产生, 因此, $\varepsilon_k=\alpha_k\xi_k, \alpha_k\in\mathbb{C}, k\in\mathbb{Z}$ 和 $\{\varepsilon_k\}$ 是对过程 X 的革新过程. 最后,

$$X_0=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(0)}\alpha_{0-k}\varepsilon_{0-k}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon_{-k}.$$

由于算子 $S_n(n\in\mathbb{Z})$ 的连续性和线性性, 且构成群, 得到

$$X_n=S_nX_0=\sum_{k=0}^{\infty}c_kS_n\varepsilon_{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kS_nS_{-k}\xi_0=\sum_{k=0}^{\infty}c_kS_{n-k}\xi_0=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon_{n-k}.$$

现在证明规则条件的充分性. 如果, $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是任意的白噪声 (即不一定是过程 X 的革新过程), 则 (62) 式说明了, X 是中心化平稳过程, 且 $H_n(X) \subset H_n(\varepsilon), n \in \mathbb{Z}$. 由此可得, 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $H_{-\infty}(X) \subset H_n(\varepsilon)$. 但是 $\varepsilon_{n+1} \perp H_n(\varepsilon), n \in \mathbb{Z}$, 因此, 对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $\varepsilon_n \perp H_{-\infty}(\varepsilon)$. 同时, $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $H(X)$ 中的基. 因此, $H_{-\infty}(X) = \{0\}$, 即过程 X 是规则的. □

推论 4. 中心化平稳过程 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是规则的当且仅当它给出了在物理上可实现的滤波器, 并在其在 "入口" 处受到白噪声干扰所得到的.

证. 如果 X 是规则的, 则根据定理 13 这个过程可以写成 (62) 式, 且具有白噪声 $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ (乃是革新过程).

现在假设 X 给出了在物理上可实现的滤波器, 即具有某个白噪声 $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的公式 (62) (不一定是革新过程). 由定理 13 的充分性证明得出过程 X 的规则性, 也就是说找到了革新过程 $\tilde{\varepsilon}$, 保证了 (62) 式分解. □

§20. 借助于所得到的结果很容易找到在第 n 步线性预测的误差量.

注意, 任意中心化平稳过程 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 的 Wold 分解具有如下面的形式:

$$X_n = M_n + N_n = M_n + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{63}$$

这里 M_n 是奇异部分, $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是规则部分 $N_n (n \in \mathbb{Z})$ 的革新过程, 而数列 $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^2$.

定理 14. 对由公式 (63) 给出的过程 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, 它在向前 n 步预测误差 $\delta(n)$ 给出公式

$$\delta^2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证. 考虑到对 $m, n \in \mathbb{Z}$ 有 $\mathrm{Pr}_{H_m(X)} M_{n+m} = M_{n+m}$ 和 $H_m(X) = H_m(\varepsilon)$ 借助于 (62) 式得到

$$\begin{aligned}\delta^2(n) &= \mathsf{E}|X_{n+m} - \mathrm{Pr}_{H_m(X)} X_{n+m}|^2 = \mathsf{E}|N_{n+m} - \mathrm{Pr}_{H_m(X)} N_{n+m}|^2 \\ &= \mathsf{E}|N_{n+m} - \mathrm{Pr}_{H_m(\varepsilon)} N_{n+m}|^2 = \mathsf{E}\left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k \varepsilon_{n+m-k}\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2. \quad \square\end{aligned} \tag{64}$$

公式 (64) 再一次说明了 (与 (56) 式比较), 规则的中心化平稳过程 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, 当 $n \to \infty$ 时, 有下面的性质:

$$\delta^2(n) \to \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \mathsf{E}|X_0|^2 = R(0),$$

这里, $R = R(n)$ 是 X 的相关函数.

由注 4 和推论 4 得出

推论 5. 中心化平稳过程 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是规则的当且仅当它具有谱密度 $g = g(\lambda)$, 且由下面公式给出

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad \{c_k\} \in l^2.$$

给出的这样表示是谱密度的最详细的描述. 下面给出

定理 15 (Kolmogorov). 具有 0 中值的平稳过程 $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是规则的当且仅当它的谱密度 $g = g(\lambda)$ 满足条件:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln g(\lambda) d\lambda > -\infty.$$

证. 这个结果的证明是建立在单位圆中解析哈代 (Hardy) 函数类 $\mathscr{H}_2$ 边界的行为性质. 参见, 例如, [85; 第 2 卷, p. 621].

§21. 根据定理 14, 第一步预测误差量 $\delta(1)$ 等于量 $|c_0|$, 这里 c_0 是由 Wold 分解 (63) 式所确定. 对具有谱密度的过程, 量 $\delta^2(1) = |c_0|^2$ 可以有另外一种借助谱密度来表示, 它是下面由柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) – 塞格 (Szego) 的公式给出 (参见, 定理 16).

设 $L^1 = L^1([-\pi, \pi], \mathscr{B}([-\pi, \pi]), \mathrm{mes})$, 这里 mes 是 Lebesgue 测度. 对非负函数 v 的算术平均 $A(v)$ 和几何平均 $G(v)$ 由下面公式给出

$$A(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\lambda) d\lambda, \quad G(v) = \exp\{A(\ln v)\}$$

在假设中, v 和 $\ln v$ 都是在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积的 (形式上设 $\ln 0 = -\infty$).

设

$$f(\lambda) = 2\pi g(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \tag{65}$$

定理 16 (Kolmogorov – Szego). 对具有谱密度 $g = g(\lambda)$ 中心化平稳过程 X 或者 $\ln f \in L^1$ 这时有

$$\delta^2(1) = G(f) \quad \left(= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda\right\}\right),$$

或者 $\ln f \notin L^1$ 这时有 $\delta(1) = 0$.

证. 这个定理的证明与概率问题和经典的函数论问题有着密切关系, 我们将其放到附录 5 中.

补充与习题

1. 试证, 给定在 $\mathbb{R}^n$ 中有界 Borel 集组成的半环上的 Poisson 随机测度 (参见第一章 §9) 是正交 (非中心化的) 随机测度.

2. 设 $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是复数值 L^2- 过程, 且

1) 对任意的 $\nu \in \mathbb{R}$, 当 $\lambda \downarrow \nu$ 时, $\mathsf{E}|Z_\lambda - Z_\nu|^2 \to 0$.

2) 增量是正交的, 即对所有的 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, 有

$$\mathsf{E}(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})(\overline{Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_2}}) = 0.$$

在半环上 $\mathscr{K} = \{(a,b], -\infty < a \leqslant b < \infty\}$, 这里 $(a,a] = \varnothing$ 引入随机变量族 $Z((a,b]) := Z(b) - Z(a)$. 试证 Z 是在 $\mathscr{K}$ 上的正交随机测度.

如果是由前所述过程 $Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ 所产生的测度, 则可以用 $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dZ_\lambda$ 来代替 $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) Z(d\lambda)$.

3. 设 $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是具有正交增量中心化的 Gauss 过程, 且均方右连续 (试解释这时过程一定要均方左连续吗?). 设对每个 $t \in T$ 函数 $g(t,\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 满足条件:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t,\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty,$$

这里 μ 是相对于由过程 $\{Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ 产生的正交随机测度 (参见习题 2) Z 的构造测度. 试证, 这时过程

$$Y = \left\{ Y(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t,\lambda) dZ_\lambda, \lambda \in T \right\}$$

是中心化的 Gauss 过程.

4. (积分中的测度变换). 设 Z 是定义在 $\Omega \times \mathscr{G}$ 上的正交随机测度, 且在可测空间 $(\Lambda, \mathscr{A})$ 上 $\sigma-$ 有限构造函数 μ (测度) (集合系 $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) < \infty\}$). 设 $h: \Lambda \to \mathbb{C}, h \in L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$. 引入 $\mathscr{H} = \{B \in \mathscr{A} : \int_B |h(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty\}$, 设

$$V(B) = \int_\Lambda \mathbf{1}_B(\lambda) h(\lambda) Z(d\lambda), \quad B \in \mathscr{H}. \tag{66}$$

试解释, 为什么 V 是正交随机测度 (如果测度 Z 是中心化的, V 是中心化的), 且有 $\sigma-$ 有限构造测度

$$\nu(B) = \int_B |h(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) < \infty, \quad B \in \mathscr{H}.$$

试证, 如果 $g: \Lambda \to \mathbb{C}, g \in L^2(\Lambda, \sigma\{\mathscr{H}\}, \nu)$, 则

$$\int_\Lambda g(\lambda) V(d\lambda) = \int_\Lambda g(\lambda) h(\lambda) Z(d\lambda). \tag{67}$$

与 Karhunen 定理相关 (参见, [38,58,134]) 重新回到随机过程的典型表示问题.

研究空间 $L^2([a,b])$, 它是由复数值函数, 且模的平方在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积. 在这个 Hilbert 空间上的内积, 定义为

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f,g\in L^2([a,b]).$$

下面的例子很好地解释了定理 3.

例 2. 在区间 $[0,2\pi]$ 上的 Weiner 过程有如下的表示 (Karhunen)

$$W(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{ikt}}{ik}z_k, \quad t\in[0,2\pi], \tag{68}$$

这里 z_k 是中心化标准正交随机变量, 对每个 $t\in[0,2\pi]$, 级数均方收敛 (当 $k=0$ 时, 认为 $(1-e^{ikt})/ik=-t$).

事实上, 对 $s,u\in[0,2\pi]$ 有

$$\mathbf{1}_{[0,s]}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(s)e^{iku}. \tag{69}$$

函数 $(1/\sqrt{2\pi})e^{iku}, k\in\mathbb{Z}$ 构成在空间 $L^2([0,2\pi])$ 中标准正交完全系; 对每个 $s\in[0,2\pi]$ 级数 (69) 在空间 $L^2([0,2\pi])$ 中收敛, 且傅里叶 (Fourier) 系数

$$c_k(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\mathbf{1}_{[0,s]}(u)e^{-iku}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-e^{-iks})/ik, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$(c_0(s)=s/\sqrt{2\pi})$. Parseval 等式说明, 对 $s,t\in[0,2\pi]$ 有

$$\min\{s,t\}=\langle\mathbf{1}_{[0,s]},\mathbf{1}_{[0,t]}\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(1-e^{-iks})(1-e^{-ikt})}{k^2}.$$

由定理 3 得出表示 (68) 式, 只需要在那里设 $\Lambda=\mathbb{Z}$,

$$f(t,k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-ikt}}{ik}, \quad t\in[0,2\pi], \quad k\in\Lambda.$$

取测度 μ 为 Λ 上的计数测度, 即 $\mu(\{k\})=1$, 对 $k\in\mathbb{Z}$. □

5. 试证, 表示 (68)式 a.s. 成立, 且其中 z_k 是独立随机变量, $k\in\mathbb{Z}$ 具有标准正态分布 $(\mathsf{N}(0,1))$. 准确的说, 试证, 在那样选取的随机变量 $z_k(k\in\mathbb{Z})$ 在 (68) 式右半部分有连续修正, 且是具有相关函数 $\min\{s,t\}, s,t\in[0,2\pi]$ 的中心化 Gauss 随机过程.

引入一些对以后讨论 Hilbert 空间中算子理论的必要结果.

与在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续的相关函数 $r=r(s,t)$ 有关的有界线性**弗雷德霍姆 (Fredholm) 算子** A, 它作用在 $L^2([a,b])$ 中具有如下形式:

$$Af(s)=\int_a^b r(s,t)f(t)dt, \quad f\in L^2([a,b]). \tag{70}$$

函数 $r = r(s,t)$ 称作积分算子 A 的核.

6. 设 $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ 是复数值 L^2- 过程, 且在 $[a,b]$ 上均方连续. 试证, 这个性质等价于在 $[a,b]$ 上函数 $m(t) = \mathsf{E}X(t)$ 连续和在 $[a,b] \times [a,b]$ 上相关函数 $r(s,t) = \mathrm{cov}(X(s), X(t))$ 连续.

7. 试证, 在公式 (70) 中的算子 A 是紧的, 即算子 A 将所有依泛数有界集映射为**准紧 (pre – compact)** 集之中的 (也就是, 该集合的闭包是紧的).

引入算子 A —— Hilbert – Schmidt 算子 (参见, [35; 第 IX 章, §2, 第一段]), 因为

$$\int_a^b \int_a^b |r(s,t)|^2 ds dt < \infty. \tag{71}$$

同时注意, 算子 A 是自共轭的, 因为 (参见 [35; 第 IX 章, §2, 第二段]) 它的共轭算子 A^* 由**埃尔米特 (Hermite) 共轭核** $\overline{r(s,t)}$ 给出, 而对相关函数 $r(s,t)$ 成立等式 $r(s,t) = \overline{r(t,s)}$, 对所有的 $s, t \in [a,b]$.

回顾经典的结果 (参见 [35; 第 IV 章, §6]).

定理 17 (Hilbert – Schmidt). *设 A 是在 (复的) Hilbert 空间 H 上的紧自共轭算子. 这时, 存在算子 A 对应非 0 特征值的特征向量组成的标准正交系 $\{\phi_n, n \in J\}$, 使得任意的元素 $h \in H$ 唯一地表示成*

$$h = \sum_{n \in J} c_n \phi_n + u, \tag{72}$$

这里 $c_n \in \mathbb{C}, n \in J, u \in \mathrm{Ker}A$ (即 $Au = 0$). 集合 J 是有限或者是可数 (在后一种情况, 级数 (72) 依范数 $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$ 收敛). 此外, 由于算子 A 的紧性, 特征值 λ_n 在以 0 为圆心的任意圆外的个数是有限的, 因此它们可以进行按照模的不增加而重新排序 $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$. 如果 J 可数, 则 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

注意, 在 H 中自共轭算子 A 的特征值是实的, 而对应非 0 特征值的特征向量是正交的, 特别是, $(\phi_n, u) = 0, n \in J$.

对 (70) 式中的算子 A, 由于 $H = L^2([a,b])$ 的可分性, 在子空间 $\mathrm{Ker}A$ 中可以选取标准正交基 $\{\phi_k\}_{k\in M}$, 这里 M 是有限或可数的 (认为 M 和 J 是不相交的; 如果 $\mathrm{Ker}A = 0$, 则 $M = \varnothing$). 将系 $\{\phi_n, n \in J\}$ 补充后成为在 H 中的标准正交基 $\{\phi_n, n \in J \bigcup M\}$, 重新将 (72) 写成按照算子 A 的特征向量作基的分解形式:

$$h = \sum_{k \in J\cup M} c_k \phi_k, \quad c_k = (h, \phi_k), \quad k \in J \bigcup M. \tag{73}$$

如果, 指标集 $J \bigcup M$ 是可数的, 则 Fourier 级数 (73) 依在 $L^2([a,b])$ 中范数收敛.

由于习题 6 和 7, 根据 (73) 式对均方连续过程 $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ 的相关函数 r, 对每个 $t \in [a,b]$, 有

$$\overline{r(t,\cdot)} = \sum_{k \in J\cup M} c_k(t) \phi_k(\cdot),$$

这里,

$$c_k(t) = \int_a^b \overline{r(t,s)}\ \overline{\phi_k(s)}ds = \overline{\lambda_k \phi_k(t)} = \lambda_k \overline{\phi_k(t)}.$$

进而

$$r(t,\cdot) = \sum_{k\in J} \lambda_k \phi_k(t)\overline{\phi_k(\cdot)}. \tag{74}$$

如果, J 是可数的, 则级数 (73), (74) 对任意的 $t \in [a,b]$, 在 $L^2([a,b])$ 中收敛. 注意, 这里所有的 λ_k 是实的和 $\lambda_k = 0, k \in M$.

8. 试证, (由于函数 r 的非负定性) 对 $k \in J$ 有 $\lambda_k > 0$.

下面定理说明关系式 (74) 可以加强 (参见; 例如 [60; p.263]).

定理 18 (默塞尔 (Mercer)). 设 $r = r(s,t)$ 是在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续的相关函数. 这时, 对所有的 $s,t \in [a,b]$ 有

$$r(s,t) = \sum_{k\in J} \lambda_k \phi_k(s)\overline{\phi_k(t)}, \tag{75}$$

且, 如果 J 是可数的, 则在 $[a,b]\times[a,b]$ 上级数 (75) 绝对和一致收敛 (λ_k 和 ϕ_k 表示 (70) 式中算子 A 的正特征值和对应的特征函数).

作为推论, 由此可得

定理 19 (Karhunen – 洛埃韦 (Loéve)). 设 $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ 是在 $[a,b]$ 上的均方连续中心化 L^2- 过程, 且具有相关函数 $r = r(s,t)$. 这时, 对每个 $t \in [a,b]$,

$$X(t) = \sum_{k\in J} \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t) z_k \quad \text{a.s.}, \tag{76}$$

这里 λ_k, ϕ_k 与在 (75) 式中一样, 而 $\{z_k, k \in J\}$ 是中心化标准正交随机变量. 对可数的 J 级数 (76) 是均方收敛.

证. 设 $T = [a,b], \Lambda = J$ 和对 $t \in T, k \in \Lambda, f(t,k) = \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t)$. 这时性质 (75) 转换成 (18) 式, 其中 μ 是在 Λ 上的计数测度, 即对 $k \in \Lambda$, 有 $\mu(\{k\}) = 1$. 由 Karhunen 定理 (定理 3) 直接可以得出 (76) 式成立. □

9. 估计下面的量

$$\mathsf{E}|X(t) - \sum_{k\leqslant n} \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t) z_k|^2,$$

试证, 如果满足定理 19 的条件, 则在 (76) 式分解中, 作为量 z_k 可以取中心化标准正交的量

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b X(t)\phi_k(t)dt. \tag{77}$$

这里积分的确定 (存在) 是作为相应黎曼 (Riemann) 积分和的均方极限. 试解释, 为什么对在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续的相关函数 $r=r(s,t)$, 特征函数 $\phi_k\in C([a,b]),k\in J$. 除此之外, 试证, 具有给定的 $z_k,k\in J$ (76) 式均方收敛将一致地对 $t\in[a,b]$.

例 3. 利用定理 19, 对在区间 $[0,1]$ 上的 Wiener 过程 $W(t)$, 试找出 **Karhunen – Loeve 分解.**

为此, 求在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续的相关函数 $r(s,t)=\min\{s,t\},s,t\in[0,1]$, 所确定出积分算子的特征值和特征函数. 根据习题 8, 量 $\lambda_k>0$, 对 $k\in J$. 正如习题 9 所示, 有 $\phi_k\in C([0,1])$.

对于 $\lambda>0$ 和 $\phi\in C([0,1])$ 研究方程

$$\int_0^1 r(s,t)\phi(t)dt=\lambda\phi(s),\quad s\in[0,1],$$

即方程

$$\int_0^s t\phi(t)dt+s\int_s^1\phi(t)dt=\lambda\phi(s). \tag{78}$$

因为 (78) 式左半部分在每一点 $s\in[0,1]$ 上可微 (在区间的端点相应的只需要一个方向可导), 则函数 ϕ 可微, 且

$$\int_s^1\phi(t)dt=\lambda\phi'(s),\quad s\in[0,1].$$

重新对该等式的两边进行对 s 求导, 所求函数 $\phi(s)$ 应该满足下面的方程:

$$\phi''(s)=-(1/\lambda)\phi(s).$$

这个方程的通解是

$$\phi(s)=A\cos(s/\sqrt{\lambda})+B\sin(s/\sqrt{\lambda}),$$

这里 A,B 是常数. 考虑到 $\phi(0)=0,\phi'(1)=0$, 找出

$$A=0,\quad (B/\sqrt{\lambda})\cos(1/\sqrt{\lambda})=0,$$

由此可得

$$\lambda_k=((k+1/2)\pi)^{-2},\quad k\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,\cdots\}. \tag{79}$$

由标准化条件 $\int_0^1\phi_k^2(s)ds=1$ 和等式 (79) 给出了函数 $\phi_k(s)$ 下面的表示式:

$$\phi_k(s)=\sqrt{2}\sin((k+1/2)\pi s),\quad s\in[0,1],\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{80}$$

很容易验证, 所有找出的量 λ_k 和 $\phi_k,k\in\mathbb{Z}_+$ 满足已知的方程 (78). 这样, 根据 (76) 式的表示找到

$$W(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((k+1/2)\pi t)}{(k+1/2)\pi t}z_k, \tag{81}$$

这里 $\{z_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ 是标准正交中心化 (由于习题 9) 的随机变量序列; (81) 式中的级数是均方收敛, 在 $[0,1]$ 上一致地成立.

注 6. 第二章习题 4 指出, $L^2[W(t), t \in [0,1]]$ 是 Gauss 系. 根据习题 9 在 (77) 式中的量 $\{z_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ 有 $X(t) = W(t), a = 0, b = 1$ 构成 Gauss 过程. 因为对中心化实 Gauss 过程正交性等价于独立性, 则利用第四章习题 11, 得出对每个 $t \in [0,1]$ 级数 (81) 以概率 1 收敛, 这里独立随机变量 $z_k \sim \mathsf{N}(0,1), k \in \mathbb{Z}_+$ 是定义在与给定的 Wiener 过程同一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上.

10. 试求, 在区间 $[0,c]$ 上对具有相关函数 $r(s,t) = e^{-\alpha|s-t|}$, 其中 $\alpha > 0, s, t \in \mathbb{R}$ 的 Ornstein – Uhlenbeck 过程的 Karhunen – Loeve 分解.

11. 设 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是具有相关函数 $r(s,t) = R(s-t)$ 的均方连续过程. 设 X 是具有周期 a 的周期函数, 即对每个 $t \in \mathbb{R}$ a.s. 有 $X(t+a) = X(t)$. 试求 X 的 Karhunen – Loeve 分解.

对随机函数不同典型分解给出了应用, 例如在小册子 [58]. 典型表示的重要意义是应用随机过程的理论去解决存在有扰的情况下发现信号的问题. 特别是, 具有非常重要意义的问题是: 什么样的情况, 在这样或那样问题中随机函数典型分解中可以限制在有限项. 关于这方面的例子可以在 [58; §174] 中找到.

在第七章定理 3 和第二章定理 6 之间有着密切联系.

12. 试证, 如果相关函数 $r = r(s,t)$ 有 (18) 式的表示, 则 Hilbert 空间 H 具有**再生核** $r = r(s,t)$, 由下面函数组成:

$$h(t) = \int_\Lambda g(\lambda)\overline{f(t,\lambda)}\mu(d\lambda), \quad g \in L^2[f], \quad t \in T. \tag{82}$$

这里 $L^2[f]$ 是在 $L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$ 中函数 $f(t,\cdot), t \in T$ 线性组合的闭包. 在 H 中内积由下面公式所决定:

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_\Lambda g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)}\mu(d\lambda),$$

其中 h_k 和 $g_k, k = 1,2$ 与关系式 (82) 有关. 设 Z 是在 $\mathscr{G} \times \Omega$ 上正交随机测度, 且具有构造函数测度 μ (参见定理 2), 设 $L^2[f] = L^2(\Lambda, \mathscr{A}, \mu)$. 试解释, 为什么对具有形如 (19) 式的过程 $X = \{X(t), t \in T\}$, 过程在第二章定理 6 中出现的过程 Y 由下面公式给出

$$Y(h) = \int_\Lambda g(\lambda)Z(d\lambda), \tag{83}$$

这里 h 根据 (82) 式依 g 而定.

13. 试证, (实的) 具有再生核 $r(s,t) = \min\{s,t\}, s,t \in \mathbb{R}_+$, 它是 Wiener 过程的相关函数的 Hilbert 空间是由下面函数所组成

$$h(t) = \int_0^t g(\lambda)d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad 对其 \int_0^\infty g^2(\lambda)d\lambda < \infty \tag{84}$$

(积分是对 Lebesgue 测度). 试说明, 为什么 $L^2[W]$, 即在 $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中 $W(t),t\in\mathbb{R}_+$ 的线性组合闭包, 是有形如 (83) 式的量所组成, 其中 Z 是由 Wiener 过程本身在 $\mathscr{G}\times\Omega$ 上所产生的正交随机测度 (参见, 例 1), 而函数 g 满足条件 (84).

研究一系列平稳和非平稳过程的具体例子 (这里平稳指的是广义的).

14. 设 $X=\{X(t)=\xi e^{i(\eta t+\nu)},t\in\mathbb{R}\}$, 这里实随机变量 ξ,η,ν, 其中 ν 具有在 $[0,2\pi]$ 上均匀分布, 与 (ξ,η) 相互独立, 而 $\mathsf{E}|\xi|^2<\infty$. 试验证, X 给出具有 (36) 形式的相关函数的中心化平稳过程, 其中测度 $G=\mathsf{E}\xi^2F, F$ 是随机变量 η 的概率分布. 设 $Y=\{Y(t)=\xi\cos(\eta t+\nu),t\in\mathbb{R}\}$. 试验证, Y 是平稳过程. 如果, $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}\}$ 是复数值平稳过程, 则能否确信 $\{\mathrm{Re}X(t),t\in\mathbb{R}\}$ 和 $\{\mathrm{Im}X(t),t\in\mathbb{R}\}$ 是平稳过程?

15 (电报信号). 设 $N=\{N_t,t\geqslant 0\}$ 是具有常数强度 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程. 设随机变量 ζ 与过程 N 独立, 且 $\mathsf{P}(\zeta=-1)=\mathsf{P}(\zeta=1)=1/2$. 引入过程, 称作*电报信号*或者*电报波*, 如果

$$X(t,\omega)=\zeta(\omega)(-1)^{N_t(\omega)},\quad t\geqslant 0,\quad \omega\in\Omega.$$

试求, $\mathrm{cov}(X(s),X(t)),s,t\geqslant 0$ (与第三章习题 27 相比较).

16 (习题 15 的推广). 设 $\{\zeta_n,n\geqslant 1\}$ 是独立同分布实随机变量序列, 且与 Poisson 过程 $N=\{N_t,t\geqslant 0\}$ 独立, 后者以概率 1 在时刻 $\tau_1<\tau_2<\cdots$ 跳跃 (参见第二章定理 2). 假设当 $\tau_k(\omega)\leqslant t<\tau_{k+1}(\omega)$ 时, $X(t,\omega)=\zeta_k(\omega)$, 这里 $k=0,1,\cdots(\tau_0=0)$. 如果在序列 $\{\tau_k(\omega),k\geqslant 0\}$ 中找到相重合点 (只可能以概率为 0), 则设 $X(t,\omega)=0$ 对 $t\geqslant 0$. 若 $\mathsf{E}\zeta_0^2<\infty$, 试求过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的相关函数.

17. 对具有相关函数 $r=r(s,t)$ 的**分数噪声过程** (参见第六章定义 14), 试证存在渐近平稳性, 其含义是存在极限 $\lim\limits_{s\to\infty}r(s,s+t)$.

分数噪声过程 (也包括*分数噪声场*) 的各式各样的推广在构造比较复杂过程的不同模型中起着非常重要的作用, 参见, 例如, [13, 111].

18. 试求 Ornstein – Uhlenbeck 过程的谱密度.

19. 试举 (与定理 8 有关) 非负定函数 $R(t),t\in\mathbb{R}$ 处处连续, 但是除了点 $t=0$ 的例子.

20. 设 $h_1(t),\cdots,h_n(t)$ 是定义在集合 T 上的复数值函数. 试证, $r(s,t)=\sum\limits_{j=1}^{n}h_j(s)\overline{h_j(t)},s,t\in T$ 是非负定函数. 试给出具有这样的相关函数的非 Gauss 过程的例子.

21. 设 $\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 是具有中值为 a, 相关函数为 $R=R(n),n\in\mathbb{Z}$ 的平稳过程. 试证, 当 $N\to\infty$ 时, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k\xrightarrow{L^2(\Omega)}a\Longleftrightarrow\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R(k)\to 0.$$

22. 设在前面习题条件中, 有

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}R(k-m)\equiv\frac{1}{N}\sum_{|k|\leqslant N-1}R(k)(1-|k|/N)\leqslant cN^{-\gamma} \tag{85}$$

对某些 $c,\gamma>0$ 和所有的 $N\in\mathbb{N}$. 试证, 当 $N\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k\to 0 \quad \text{a.s.}. \tag{86}$$

试验证, 如果当 $n\to\infty$ 时有 $R(n)=O(n^{-\gamma})$, 则条件 (85) 满足.

定理 20 (卡波什廷 (Guboshkin) [14]). 设 $X=\{X(n),n\in\mathbb{Z}\}$ 是具有 0 中值和相关函数 $R=R(n),n\in\mathbb{Z}$ (设 $R(0)=1$) 的平稳过程. 这时 (86) 式成立当且仅当 $G(\{0\})=0$ 和

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0<|\lambda|\leqslant 2^{-n}}Z(d\lambda)=0 \quad \text{a.s.},$$

这里 Z 是 (35) 式谱表示中的正交随机测度, 而 G 是它的构造函数 (测度).

注意, 这个结果的证明是借助于将和 $k^{-1}\sum\limits_{j=1}^{k}X_j$ 对 $2^n\leqslant k<2^{n+1}(n=0,1,\cdots)$ 表示成 $\int_{|\lambda|\leqslant 2^{-n}}Z(d\lambda)+\psi_k$, 这里, 在 $L^2(\Omega)$ 中有 $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k=0$ a.s..

23. 设 $X=\{X_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是具有相关函数 $R=R(n),n\in\mathbb{Z}$ 的中心化实 Gauss 平稳序列. 试证, 条件

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)\to 0, \quad 当\ N\to\infty$$

是充分且必要的, 使得在 (48) 式中引入的估计 $R_N(m)$ 是均方有效的, 即对 $m\in\mathbb{Z}$, 当 $N\to\infty$ 时, 有 $\mathsf{E}|\widehat{R}_N(m)-R(m)|^2\to 0$.

24. 设 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 是形如 (39) 式的滑动平均过程. 要求 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$ 和 $\varepsilon_k,k\in\mathbb{Z}$ 是独立同分布随机变量, 且 $\mathsf{E}\varepsilon_k^4<\infty$. 设 $\widehat{f}_N(\lambda)$ 是 "周期图" (49) 式. 试求, 对频率 $\lambda,\nu\in[-\pi,\pi]$ 的 $\lim\limits_{N\to\infty}\operatorname{cov}(\widehat{f}_N(\Lambda),\widehat{f}_N(\nu))$.

25. 设 Z 是相对于具有参数 $\alpha,\beta>0$ Ornstein – Uhlenbeck 过程的正交随机测度 (参见, 第三章习题 27). 试证, 过程

$$W(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\lambda}-1}{i\lambda}\cdot\frac{i\lambda+\beta}{\alpha}Z(d\lambda), \quad t\geqslant 0 \tag{87}$$

(根据连续性, 假定在 $\lambda=0$ 点 $(e^{it\lambda}-1)/i\lambda=t$) 是 Wiener 过程. (借助于 Kolmogorov 定理 (第二章定理 18), 存在这个过程的连续修正.)

值得一提的是, 表示式 (87) 给出了借助于 Ornstein – Uhlenbeck 过程来构造 Wiener 过程, 而公式 (III.88) 说明了 Ornstein – Uhlenbeck 过程如何通过 Wiener 过程来表示. 在第八章我们将研究朗之万 (Langevin) *随机微分方程*, 它与这两种重要过程都有关.

利用习题 4, 表示式 (87) 可以重新写成如下面的形式 (与例 2 比较)

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda} V(d\lambda), \quad t \geqslant 0, \tag{88}$$

这里, 正如在习题 4 中所述的, 由具有函数 $h(\lambda) = (i\lambda + \beta)/\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, 公式 (66) 给出的在半环 $\mathscr{K}$ 上的正交随机测度 V.

注 7. 根据第三章定理 1, Wiener 过程的轨道在一点 $t \in \mathbb{R}_+$ 上 a.s. 都不可微. 试证, 每一点 $t \in \mathbb{R}_+$ 上都不存在 $W(t)$ 的导数, 甚至于依概率取极限. 然而, 如果只是形式上的进行 (88) 式对 t 求导, 得到被称作 "**白噪声**" 的

$$\dot{W}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} V(d\lambda). \tag{89}$$

这个称呼与下面的事实有关. 它形式上是由调和振动 $e^{it\lambda}$ 的叠加而成, 且包含在 (89) 式中的每一个具有*相同*的强度 (振幅) (因为对 V 来说, 它的构造测度是 Lebegue 测度). "白噪声" 定义的精确定义是在广义随机过程理论中给出的 (与定义 10 比较), 这方面的导论可参见 [77].

本章所得到的结果可以推广到*向量值*过程, 甚至于到*随机场*. 介绍一些这方面的结果.

具有复数值元素的矩阵函数 $C(s,t) = (C_{jk}(s,t))_{j,k=1}^{m}, s,t \in T$ 称作*非负定的* (或者*正定的*), 如果对所有的 $n \geqslant 1$, 任意的 $t_1, \cdots, t_n \in T$ 和列向量 $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^m$ 有

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j^* C(t_j, t_k) z_k \geqslant 0,$$

这里符号 $*$ 表示转置和所有元素的复共轭.

取值于 $\mathbb{C}^m$ 的向量过程 $X = \{X(t), t \in T\}$ 称作 *L^2– 过程*, 如果对所有的 $t \in T$ 有 $\mathsf{E}\|X(t)\|^2 < \infty$. 这里, 范数 $\|\cdot\|$ 在复欧氏空间 (特别的, 是实的) 定义如下:

$$\|z\| = (z,z)^{1/2}, \quad 其中\ (z,w) = \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w}_k, \quad 对\ z,w \in \mathbb{C}^m.$$

定义 L^2– 过程 X 的*中值向量函数*和*协方差 (相关) 矩阵函数*如下:

$$a(t) = \mathsf{E}X(t) \in \mathbb{C}^m, \quad r(s,t) = \mathsf{E}(X(s) - a(s))(X(t) - a(t))^*.$$

26. 试证, 矩阵函数 $R(s,t), s,t \in T$ (具有复数值元素) 是某个向量 L^2– 过程 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的相关函数当且仅当它是非负定的.

设 T 是线性空间. 取值于 $\mathbb{C}^m$ 的 L^2- 过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 称作广义平稳的,如果

$$a(t)=a\in\mathbb{C}^m,\quad r(s,t)=R(s-t),\quad s,t\in T. \tag{90}$$

矩阵函数 $C(t),t\in T$ 称作非负定的, 如果函数 $r(s,t):=C(s-t),s,t\in T,s-t\in T$ 是非负定的.

如前所述, 所研究的过程 (或场) 都认为是中心化的.

称取值于 $\mathbb{C}^m$ 随机向量序列 $\varepsilon_n,n\in\mathbb{Z}$ 是 *白噪声*, 如果在 (90) 式中有

$$a=0,\quad R(0)=I,\quad R(n)=0,\quad 当\ n\neq 0,$$

这里 I 是 m 阶单位矩阵. 对连续时间的过程, 这个术语, 正如前面所述, 具有较复杂的意义.

*滑动平均向量过程*由下面公式给出:

$$X(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\varepsilon_{n-k},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{91}$$

这里, $\varepsilon=\{\varepsilon_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 是白噪声, $A_k,k\in\mathbb{Z}$ 是由 $\mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{C}^m$ 映射矩阵 (算子). 级数 (91) 收敛是均方意义下的.

27. 试证, 为使级数 (91) 在 $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中收敛, 只需要 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|A_k|^2<\infty$, 这里, $|A|:=(\mathrm{Tr}AA^*)^{1/2}=\left(\sum\limits_{j,q=1}^{m}|a_{jq}|^2\right)^{1/2}$, 对 $A=(a_{jq})_{j,q=1}^m$. 试求滑动平均向量过程的相关函数.

如果 T 是具有距离 ρ 的距离空间, 则取值于 $\mathbb{C}^m$ 的 L^2- 过程 $X=\{X(t),t\in T\}$ 称作*在点 t 处均方连续*, 如果

$$\mathsf{E}\|X(s)-X(t)\|^2\to 0,\quad 当\ \rho(s,t)\to 0. \tag{92}$$

如果在每一点 $t\in T$ 处满足 (92) 式, 则称为*在 T 上均方连续*. 熟悉附录 4, 试证下面的定理

定理 21. *函数 $R=R(t),t\in\mathbb{R}^d$ 是广义平稳均方连续取复数值随机场 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^d\}$ 的相关函数当且仅当*

$$R(t)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\langle t,\lambda\rangle}G(d\lambda),\quad t\in\mathbb{R}^d, \tag{93}$$

这里, G 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的某个有限非负测度. 这时测度 G 是唯一确定的.

类似地, 可以重新叙述定理 4.

复数值场 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^d\}$ 称作迷向的 (isotropy), 如果它的相关函数 $r(s,t)$ 只是依赖于 t 和 $\|s-t\|$. 如果场还是时齐的 (另一种说法, 是广义平稳的), 则对 $s,t\in\mathbb{R}^d$ 有 $r(s,t)=R(\|s-t\|)$. 这时 $R(t)$ 可以有另外一种表示.

定理 22 (参见[16; 第 1 卷, p. 262]). 为了使函数 $R=R(u),u\in\mathbb{R}_+$ 是时齐的, 迷向的和均方连续取复数值随机场 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^d\}$ 的相关函数充分必要条件是

$$R(u)=2^{(m-2)/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\int_0^\infty\frac{I_{(m-2)/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{(m-2)/2}}Q(d\lambda),\quad u\in\mathbb{R}_+,$$

这里 $I_\nu(x)$ 是第一型的贝塞尔 (Bessel) 函数, Γ 是 Gamma 函数, Q 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的非负有限测度, 且 $Q(\mathbb{R}_+)=G(\mathbb{R}^m)=R(0)$.

同样有定义在 $\mathbb{R}^d\times\Omega$ 上取值于 $\mathbb{R}^d$时齐的迷向的向量场概念. 除了这里条件 (90) 以外, 要求分布相对于旋转群有不变性, 即要求 $(S^{-1}X(S_{t_1}),\cdots,S^{-1}X(S_{t_n}))\overset{\mathscr{D}}{=}(X(t_1),\cdots,X(t_n))$, 对任意的在 $\mathbb{R}^d$ 中的旋转 S 任意的 $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R}^d(n\in\mathbb{N})$.

集合的矩阵函数 $G(B)=(G_{jk}(B))_{j,k=1}^m$, 其中 $B\in\mathscr{K},\mathscr{K}$ 是 Λ 的集合类的半环, 称作非负定的, 如果矩阵 $G(B)$ 对每个 $B\in\mathscr{K}$ 是非负定的.

对取值于 $\mathbb{C}^m$, 均方连续时齐的随机场 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^d\}$ 和向量 $\tau\in\mathbb{C}^m$ 可以引入**内积场** $Y=\{Y(t)=\langle X(t),\tau\rangle,t\in\mathbb{R}^d\}$. 可以验证这个场同样是均方连续时齐的. 利用这些性质, 试证

定理 23. 为了使函数 $R=R(t),t\in\mathbb{R}^d$ 是取值于 $\mathbb{C}^m$ 中均方连续时齐的向量场 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}^d\}$ 的相关矩阵函数充分必要条件是有 (93) 式的表示, 其中 R 是 $m\times m$ 矩阵函数, 而 G 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上 $m\times m$ 可数可加的矩阵集函数.

定义在集合 Λ 的子集组成的半环 $\mathscr{K}$ 上, 向量 (取值于 $\mathbb{C}^m$) 正交随机测度 Z 称作 L^2- **过程** $\{Z(B),B\in\mathscr{K}\}$, 使得

$$\mathsf{E}Z(B)Z(c)^*=G(B\bigcap C),$$

这里 G 是在 $\mathscr{K}$ 上可数可加的矩阵测度, 称作构造 (**矩阵的**) 测度. 相对于数的正交随机测度构造的积分很容易推广到对向量的情况.

由定理 3 和 23 得出 (参见, 例如, [16; 第 1 卷, p. 297])

定理 24. 如在定理 23 中所述的场 X, 可以有如下的表示

$$X(t)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i\langle t,\lambda\rangle}Z(d\lambda),\quad t\in\mathbb{R}^d,$$

这里 Z 是在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上具有构造函数 (测度) G 的向量正交随机测度, 该 G 是场相关函数谱表示中的谱测度. 这时在空间 $L^2[X]$ (即在 $L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中随机变量 $X(t),t\in\mathbb{R}^d$ 线性组合的闭包) 和空间 $L^2(\nu)=L^2(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}),\nu)$ 之间建立了保距映射, 这时

1) $X(t) \leftrightarrow e^{i\langle t,\lambda\rangle}$;

2) 如果 $Y_k \leftrightarrow g_k(\lambda)$, 其中 $Y_k \in L^2[X], g_k \in L^2(\nu), k=1,2$, 则

$$Y_k = \int_{\mathbb{R}^d} g_k(\lambda) Z(d\lambda), \quad \mathsf{E} Y_1 Y_2^* = \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\lambda) g_2(\lambda)^* G(d\lambda).$$

由此可得

定理 25 (科捷利尼科夫 (Kotelnikov) – 香农 (Shannon)). 设时齐的均方连续场 $X=\{X(t), t\in\mathbb{R}^d\}$ 有有限谱, 即构造测度集中在某个平行六面体 $(-u_1,u_1)\times\cdots\times(-u_d,u_d)$, 具有不等于 0 的侧面. 这时

$$X(t) = \sum_{n=(n_1,\cdots,n_d)\in\mathbb{Z}^d} \prod_{k=1}^{d} \frac{\sin(u_k t_k - \pi n_k)}{u_k t_k - \pi n_k} \times \left(\frac{\pi n_1}{u_1}, \cdots, \frac{\pi n_d}{u_d}\right), \tag{94}$$

这里, 对每个 $t=(t_1,\cdots,t_d)\in\mathbb{R}^d$, 级数均方收敛.

(94) 式表示的含义在于: 根据在形如网的节点 $(\pi n_1/u_1, \cdots, \pi n_d/u_d)$ 上的值有可能恢复起场在任意点 $t\in\mathbb{R}^d$ 的值.

与随机过程典型表示有关的还有一个研究方向涉及革新过程. 研究 L^2- 过程 $X=\{X(t), t\in T\}, T\subset\mathbb{R}$ 和由随机变量 $X(s), s\leqslant t (s,t\in T)$ 线性组合在均方意义下的闭包组成的子空间 $H_t(X), t\in T$. 试问是否可以找到革新过程 $Y=\{Y(t), t\in T\}$, 即正交增量过程, 使得对所有的 $t\in T$ 有

$$H_t(X) = H_t(Y).$$

一般地说, 回答是否定的. 但是, 正如 Cramer 所指出的, 改变问题的提法, 可以得到 (对每个 $t\in T$) $H_t(X)$ 表示成彼此相互正交的, 且由过程 $Y_n=\{Y_n(t), t\in T\}, n=1,\cdots,N (N\leqslant\infty)$ 所生成的空间 $H_t(Y_n)$ 之和. 这样形式的表示, 在研究随机过程分布的绝对连续性和奇异性问题时起着重要的作用.

随机谱表示 (38) 式可以利用在 Hilbert 空间 H 中的算子理论得到. 为此, 要回顾等距算子 U (即对所有的 $x,y\in H$ 有 $(Ux,Uy)=(x,y)$), 映射 H 到自身, 称作酉 (unitary) 算子. 有下面的经典结果.

定理 26 (斯通 (Stone)). 设 $\{U_t, t\in\mathbb{R}\}$ 是在 Hilbert 空间 H 上的酉算子群 $(U_t U_s = U_{t+s}, s,t\in\mathbb{R})$ 和函数 $t\mapsto(\xi, U_k\eta)$, 对所有的 $\xi,\eta\in H$ 是连续. 这时, 对每个 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} E(d\lambda),$$

这里 $E(\cdot)$ 是取值于正交投影算子值的测度.

关于如何定义这种积分可以参见, 例如, [64].

对广义平稳过程 $X=\{X(t),t\in\mathbb{R}\}$，应用 Stone 定理于 Hilbert 空间 $H=H(X)$ 上推移酉算子群 $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 上 (参见定理 12 的证明), 得到

$$X(t)=S_tX(0)=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}\mathsf{E}(d\lambda)\right)X(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}Z(d\lambda),\quad 对\ t\in\mathbb{R}.$$

这里 $Z(B)=\mathsf{E}(B)X(0)$ 是定义在 Borel 集上的正交随机测度. 进而, 得到另外一个关于平稳过程谱表示的证明 (不在 Cramer 定理 (定理 9) 中) (与 (38) 式比较). 借助于 Stone 定理, 得出平稳过程的谱表示方法是属于 Kolmogorov 的 (参见 [64]). 类似地研究是对具有离散时间的平稳过程, 甚至于在 $\mathbb{Z}^d$ 和 $\mathbb{R}^d$ 上的随机场.

注意, 利用在第七章中对随机函数得出典型表示途径, 基于 Karhunen 定理, 可以对在任意的参数集合 T 的随机过程 $X=\{X(t),t\in T\}$.

对不同方面研究向量过程和场可以参见小册子 [6, 44, 64, 80, 87, 134, 186].

简单扼要地研究与过程 (主要是平稳过程) 的变换有关的一些问题.

设有一个装置 (“系统”) A, 在其入口处进入了过程 $X=\{X(t),t\in T\}$, 且在出处发生过程 $Y=\{Y(t),t\in S\}$, 它形式地可以表示成 $Y=AX$. 如果认为 A 是由一个泛函空间到另一个的映射, 则要求 (几乎所有) 过程 X 的轨道位于映射 A 的定义域 D_A 中, 使得变换 (映射) 作用在这些轨道所导出的还是个随机过程 (着意味着应满足可测性). 将假设在每一时刻 $t\in S$, 变换 (映射) A 作用到过程 X 导出随机变量 $Y(t)$.

引入均方意义下的微分运算.(复数值) L^2- 过程 X 在点 $t\in\mathbb{R}$ 的邻域导数 $X'(t)$, 定义为取值于 Banach (Hilbert) 空间 $L^2(\Omega)=L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中的函数, 即那样的随机元 (用 $X'(t)$ 来表示) 使得

$$\mathsf{E}|X'(t)-(X(t+h)-X(t))/h|^2\to 0,\quad 当\ h\to 0. \tag{95}$$

这样就可以进行实质上的计算 (与经典的牛顿 (Newton) – 莱布尼茨 (Leibniz) 公式类似). 注意, 如果在 (95) 式中代替均方收敛的是依概率收敛, 则由下面的习题所示, 相应的运算就没有了那么丰富.

28. 试证, 具有常数强度 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程 $N=\{N_t,t\geqslant 0\}$, 在每一点 $t\in\mathbb{R}_+$ 依概率导数 a.s. 等于 0.

今后, 我们研究的只是均方的导数, 不再作声明. 这样, 也可以定义在点 t 处 k 阶导数 (如果存在), 它是由过程 $X^{(k-1)}(t)$ 值在点 t 的邻域所决定.

29. 设 $X=\{X(t),t\in[a,b]\}$ 是具有相关函数 $r(s,t)$ 的 L^2- 过程. 试证, $X'(t)$ 在点 $t\in[a,b)$ 处存在当且仅当存在在点 (t,t) 处广义二阶导数 $\dfrac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s\partial t}$ (这里与广义函数没有任何关系), 其中定义

$$\frac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s\partial t}:=\lim_{h,u\to 0}(r(s+h,t+u)-r(s+h,t)-r(s,t+u)+r(s,t))/hu.$$

如果存在单侧的导数, 类似可定义在端点的导数.

对证明这个或类似的结果下面的简单引理起着关键的作用.

引理 5. 函数 $f(t), t \in [a,b]$, 取值于 Hilbert 空间 H, 且具有内积 $\langle \cdot,\cdot \rangle$, 在点 $t_0 \in [a,b]$ 有极限当且仅当存在极限 $\lim\limits_{s,t\to t_0} \langle f(s), f(t)\rangle$.

30. 试证, 对平稳过程 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, 在每一点 t 导数 $X^{(k)}(t)$ 存在的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2k} G(d\lambda) < \infty,$$

这里 G 是 X 的谱测度. 过程 $X^{(k)}$ 是否是平稳的? 如果是, 那它的谱表示是什么?

与微分同样重要的是线性运算 A 的例子, 即

$$A(\alpha X + \beta V) = \alpha AX + \beta AV$$

对 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 和 $X, V \in D_A$, 给出了随机过程的均方积分.

对 L^2- 过程 $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ 的积分 $\int_{[a,b]} X(t)dt$ (或者 $\int_a^b X(t)dt$) 应理解为在区间 $[a,b]$ 上的随机函数 X_t 黎曼 (Riemann) 积分 (如果它是确定的), 即在 $L^2(\Omega)$ 空间中取 Riemann 积分和的极限. 详细关于在均方意义下的微分与积分可参见, 例如, [12; 第 2 章].

对整个直线 $\mathbb{R}$ 的广义积分标准形式的定义是作为对区间 $[a,b]$ 相应意义下的积分, 当 $a \to -\infty$ 和 $b \to \infty$ 时的极限 (如果它存在).

对具有相关函数 $r = r(s,t)$ 的 L^2- 过程 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 和定义在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上复数值函数 h, 设

$$Y(t) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)X(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{96}$$

不难相信, 如果黎曼广义积分有限, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)r(s,u)\overline{h(t,u)}dsdu < \infty,$$

则在 (96) 式中的过程 $Y(t)$ 是确定的和 a.s. 有限.

在 (96) 式中函数 $h = h(s,t)$, 在应用中称作*系统的脉冲转移函数*. 如果形式地将 Dirac 函数 δ_s 代替 (96) 式积分中的 $X(s)$, 则得到 $Y(t) = h(t,s)$. 换句话说, 当时刻 s 时在系统入口处受到脉冲 δ 的冲击, $h(t,s)$ 是在时刻 t 系统的反应.

过程的特殊形式 (96) 式是时齐的过程, 形如

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)dS, \quad t \in \mathbb{R} \tag{97}$$

相应的系统 ("**滤波器**"), 在它的出口产生过程 $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$, 它是由脉冲转移函数 $h = h(s), s \in \mathbb{R}$, 所决定, 函数

$$H(i\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\lambda s}ds, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

称作频率特征或者传输系数. 如果函数 $h = h(s)$ Lebesgue 可积, 则函数 $H = H(i\lambda)$ 显然, 被确定了. 频率特征具有下面明显的意义: 如果 $h \in L^1(\mathbb{R})$, 则对每一个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 非随机函数 $X(s) = e^{i\lambda s}, s \in \mathbb{R}$, 是变换 (97) 式的特征函数, 对应的特征值是 $H(i\lambda)$. 下面习题给出了这个清楚的解释.

31. 设在滤波器 (97) 式的入口处有广义平稳过程 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, 且具有正交测度 Z 和它的构造测度 G 的谱表示 (38) 式. 试证, 如果滤波器的频率特征 $H(i\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), G)$, 则过程 $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的相关函数有如下的形式:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} |H(i\lambda)|^2 G(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R},$$

而过程 Y 本身有下面的谱表示:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(i\lambda) Z(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

回顾作为谱测度的能量解释, 可以看出, 函数 $|H(i\lambda)|^2$ 说明了由过程 X 的简单调和组成的能量, 在通过具有频率特征 $H(i\lambda)$ 的滤波器改变了多少倍.

32. 什么样的脉冲转移函数具有带状的滤波器, 即滤波器允许具有频率在带 $[a, b]$ 内过程的调和组成不改变地通过. (这意味着 $H(i\lambda) = \mathbf{1}_{[a,b]}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$)?

非常有意义地的是应用随机过程谱表示来解形如下面的微分方程:

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) Y = Q_m\left(\frac{d}{dt}\right) X, \tag{98}$$

这里 $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, Q_m(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m$ —— 具有常系数的多项式, X 是给定的平稳过程, 而未知过程 $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 假设 n 次均方可微在每一点 $t \in \mathbb{R}$. 等式 (98) 对每个 $t \in \mathbb{R}$ a.s. 成立. 关于如何借助于某个滤波器来实现解 Y, 参见, 例如, [17; p.282~284].

类似对连续时间的过程方程 (98), 也对离散时间的过程 ($t \in T \subset \mathbb{Z}$) 去研究的, 它被称作 "自回归 – 滑动平均" 过程, 参见 [85; 第 2 卷, p.586].

最后, 引入一个关于狭义平稳过程的经典结果.

在空间 $\mathbb{R}^\infty$ 上引入**推移算子** T, 假设 $Tx = y$, 其中

$$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots), \quad y = (\cdots, y_{-1}, y_0, y_1, \cdots),$$

且 $y_n = X_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$. 称集合 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$ 为不变的, 如果 $T^{-1}(B) = B$. 很容易看出, 所有在 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty)$ 中的不变集全体组成一个 σ – 代数, 用 $\mathscr{I}$ 来表示.

设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的狭义平稳过程. 假设 $\mathscr{I}_X = X^{-1}(\mathscr{I})$, 其中 X 看作由 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\mathbb{R}^\infty, \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty))$ 的可测映射. 这时, $\mathscr{I}_X$ 是 $\mathscr{F}$ 中的 σ – 代数, 称其为过程 X 的不变事件的 σ – 代数.

定理 27 (伯克霍夫 (Birkhoff) – Khinchin). *设 $X = \{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ 是狭义实平稳过程, 且 $\mathsf{E}|X_0| < \infty$. 这时,*

$$\lim_{N-M\to\infty} \frac{1}{N-M} \sum_{t=M+1}^{N} X(t) = \mathsf{E}(X_0|\mathscr{I}_X), \tag{99}$$

这里极限是 a.s. 存在也是在 $L^1(\Omega)$ 中存在.

称过程 X 是*遍历的*, 如果对任意的 $A \in \mathscr{I}_X$, 有 $\mathsf{P}(A)$ 等于 1 或 0. 在这时 (满足定理 27 的条件是) (99) 式的右半部分条件数学期望 $\mathsf{E}(X_0|\mathscr{I}_X) = \mathsf{E}X_0$ a.s..

狭义平稳过程的理论与**动力系统理论**有着密切关系 (对保测变换的研究). 作为研究这方面的引论可以参见 [85; 第五章], 在那里给出了关系式 (99) 的简单证明 (当 $M = 0$), 这是加尔斯亚 (Garsia) 得到的. 推广定理 27 到场的情况可参见 [15]. 遍历性定理和动力系统可参见, 例如, [36, 70].

第八章
随机积分. 随机微分方程

内容摘要: 简单随机函数对维纳 (Wiener) 过程的随机积分. 对适应博雷尔 (Borel) 可测随机函数的伊滕 (Ito) 随机积分的构造. 随机积分的性质. Ito 变量替换公式. 朗之万 (Langevin) 方程. 奥恩斯坦 (Ornstein) – 乌伦贝克 (Uhlenbeck) 过程. 随机微分方程强解的存在、唯一性定理. 随机微分方程解的马氏性.

§1. 在经典的分析当中, 处理积分运算有着不同的办法, 一般来说, 会引出来不同的概念, 例如, 黎曼 (Riemann) 积分, 勒贝格 (Lebesgue) 积分, Riemann – 斯蒂尔切斯 (Stieltjes) 积分, Lebesgue – Stieltjes 积分, 当茹瓦 (Denjoy) 积分, 博赫纳 (Bochner) 积分, 佩蒂斯 (Pettis) 积分, Komogorov $A-$ 积分, 等等.

在随机过程的理论中, 同样有着各式各样的处理, 随机函数对随机过程, 随机测度, 等等的积分. 这也就导致了不同构造的 “随机积分”.

其中的一种 (最简单的) 的积分, 我们已经在前一章涉及到了, 在那里是确定性函数对*正交随机测度* Z 的积分. 同时还论证了, 如何借助于那样的积分成功地给出了对广义平稳过程的随机谱表示 (第七章, 定理 9).

如果由 Wiener 过程 $W=\{W_t, t\geqslant 0\}$ 所产生正交随机测度 Z (参见, 第七章例 1) 和确定性过程 $f=\{f_t, t\geqslant 0\}$ 属于 $L^2=L^2([0,\infty),\mathscr{B}([0,\infty)),\text{mes})$, 其中 mes 是 Lebesgue 测度, 则相应的积分 $J(f)$ (参见 (VII.14)) 一般写成

$$J(f)=\int_{[0,\infty)} f_t dW_t \tag{1}$$

或者 $J(t)=\int_0^\infty f_t dW_t$, 同样与经典的积分类似, 也要强调的是建立起它的步骤.

注意, 在 (1) 式中的随机积分, 一般地说, 不能理解为按照*轨道*积分, 即不能想

象是对每个固定的 $\omega \in \Omega(W_t = W_t(\omega))$ 的 Lebesgue – Stieltjes 积分, 因为在第三章定理 1 已证 Wiener 过程 (Brown 运动) 的轨道 P-a.s. 具有无界变差.

在公式 (1) 中函数 $f = f_t, t \geqslant 0$, 是确定性的. 但是, 在随机分析的许多问题中, 有必要去研究 (1) 式中, 被积函数 f 是随机的:

$$f = f_t(\omega), \quad t \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega. \tag{2}$$

例如, 研究随机微分方程 (参见后面的 §12~18)

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dW_t, \tag{3}$$

它应该理解成是下面随机积分方程 (4) 的另一写法

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

自然而然, 需要给出 "随机积分" $\int_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s(\omega)$ 的意义, 它正是形式 (1) 的积分, 只不过被积函数是随机函数 $f\mathbf{1}_{[0,t]}$ 的积分.

在初次阅读时, 希望能熟读在区间 $[0, T]$ 上 Ito 积分的构造和这种积分的性质 (§2~6), 同时还有变量替换公式 (§11 定理 5), 借助它很容易去解经典的朗之万 (Langevin) 方程 (§13). 应该仔细分析关于随机微分方程 (强) 解存在、唯一性定理 (§17). 应该关注 §18, 那里证明了随机微分方程解的马氏性. 对于证明中的技巧性细节可以在以后学习中再光顾.

§2. 虽然在前面定义了对具有正交增量 L^2– 过程的随机积分, 但是假设被积函数 f 是确定性的. 凭借什么可以定义随机函数 $f_s(\omega)$ (被积函数) 对 Wiener 过程 (积分中起着关键作用) 形如 $\int_0^T f_s(\omega)dW_s(\omega)$ 的 "随机积分"?

这里的解释是, Wiener 过程正如所有的平方可积鞅一样, 它是正交增量 L^2– 过程的一个子类. 应该明白, 对的积分类越狭小, 相应的被积函数类就应该越宽, 也就是说比前面所说的, 确定性被积函数 f 的集合要宽些.

对 Wiener 过程的情况, 构造随机函数 f 的积分时, 被积函数需要满足下面的可测性和可积性条件. 这些条件是由日本数学家伊滕 (Ito) 给出的. 这也就是为什么以后那样的积分被记作为 $I_t(f)$ (其中 I 由 Ito 而来).

Ito 构造随机积分的思想实质上与对正交增量过程积分一样: (1) 式首先 (完全是自然而然的) 对逐段是常数的 "适应 Borel 可测的" 随机函数, 然后 (2) 式对较一般的函数 f, 通过用简单函数 $f^{(n)}$ 对它逼近的途径, 基于保距的思想, 取量 $I_T(f^{(n)}), n \to \infty$ 的极限 $I_T(f)$(均方意义下) 来定义随机积分.

这样的构造工作 (与杜布 (Doob) – 梅耶 (Meyer) 分解有关) 不仅仅对 Wiener 过程, 同时对其他的随机过程类, 其中也包括平方可积鞅类, 当然 Wiener 过程也属于此类 (当 T 有限时).

§3. 设 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的 Wiener 过程 (Brown 运动). 同以前一样, $\mathscr{F}_t^W$ 表示由量 $W_s, 0 \leqslant s \leqslant t$ 所生成的 $\sigma-$ 代数. 假设 $\mathscr{F}^W = \sigma\{W_t, t \geqslant 0\}$. 概率空间是完全的, 且 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}^W$, $\mathscr{F}_t^W (t \geqslant 0)$ 扩充了 0 概率事件类 $\mathscr{N}$. 这样所研究自然 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$, 它满足通常化条件 (参见第四章定义 10).

首先对某个固定的 $T > 0$ 构造随机积分

$$I_T(f) = \int_{[0,T]} f_s(\omega) dW_s(\omega), \tag{5}$$

然后对所有的 $t \in [0, \infty)$, 定义随机积分

$$I_t(f) = \int_{[0,t]} f_s(\omega) dW_s(\omega). \tag{6}$$

如果函数 f 是形如 $f_t(\omega) = I_{(a,b]}(t)$ 的确定性简单函数, 其中 $t \in [0, T], (a, b] \subset (0, T]$, 则随机积分 $I_T(f)$ 理解为随机变量

$$I_T(f) = W_b(\omega) - W_a(\omega),$$

这里符号 $I_T(f)$ 中省略了自变量 ω.

现设函数 f 是简单的, 但是较一般一点形式:

$$f_t(\omega) = \varphi(\omega) \mathbf{1}_{(a,b]}(t) \tag{7}$$

这里 $\varphi(\omega)$ 是某个随机变量, 这时, 自然而然地设

$$I_T(f) = \varphi(\omega)[W_b(\omega) - W_a(\omega)]. \tag{8}$$

如果函数有简单的形式

$$f_t(\omega) = \varphi_0(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

这里 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T, n \geqslant 2$, $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$ 是随机变量, 则自然定义

$$I_0(f) = 0, \ I_t(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\omega)[W_{t_{i+1} \wedge t}(\omega) - W_{t_i \wedge t}(\omega)], \quad 0 < t \leqslant T. \tag{10}$$

其他形式的简单函数将在本章的补充与习题中讨论.

为了对更广泛函数 f 类引入积分 $I_t(f)$, 需要求这些函数有较 "好" 的性质 (参见后面的引理 1), 也就是对 (9) 式中的函数 $\varphi_i(\omega)$ 需要附加较严格的可测性条件.

回顾一下, 实随机函数 $f = \{f_t, t \in [0, T]\}$ 称作与 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T^W = (\mathscr{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$ 适应的, 如果对每个 $t \in [0, T]$, 量 f_t 是 $\mathscr{F}_t^W-$ 可测的. 在这个定义中, 自然也可以用其他的 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 代替自然 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T^W$. 区间 $[0, T]$ 也可以用其他的代替, 例如, $[0, \infty)$.

定义 1. 称随机函数 $f = \{f_t, t \in [0,T]\}$ 相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T^W$ **适应** Borel **可测**的, 如果它相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T^W$ 适应, 且对变量对 $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ 是 $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}^W$ 可测的. 所有这样的函数组成的类记作 $\mathscr{A}_T$.

当简单函数 f 形如 (9) 式时, 它属于类 $\mathscr{A}_T$ 等价于在 (9) 式中的随机变量 $\varphi_i(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_{t_i}^W$ 可测的. 用 $\mathscr{A}_T^0$ 表示这样的简单函数类.

注意, 简单函数 f, 一般来说, 表示 (9) 式的形式不是唯一的. 但是, 在相应的积分定义 $I(f)$ 中, 值 $I_t(f), t \in [0,T]$ 不依赖于函数 f 在 (9) 式中的表示形式.

下面的结果是对简单函数随机积分 $I_t(f), t \in [0,T]$ 的基本性质.

引理 1. *设在区间 $[0,T]$ 上给定形如 (9) 式的简单适应 Borel 可测函数 $f = f_t(\omega), t \in [0,T]$ 和 $g = g_t(\omega), t \in [0,T]$, 其类似的构造:*

$$g_t(\omega) = \psi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j(\omega)\mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t). \tag{11}$$

设所有的随机变量 $\varphi_i(\omega)$ 和 $\varphi_j(\omega)$ 具有有限的二阶矩.

这时, 随机积分 $I_t(f)$ 和 $I_t(g), t \in [0,T]$ 具有下面的性质:

(a) $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ 和 $(I_t(g))_{t\in[0,T]}$ 具有 0 中值连续平方可积鞅, 且

$$\mathsf{E} I_t(f) I_t(g) = \mathsf{E}\left[\int_0^t f_s(\omega) g_s(\omega) ds\right] \tag{12}$$

对所有的 $t \in [0,T]$, 特别的

$$\mathsf{E} I_t^2(f) = \mathsf{E}\left[\int_0^t f_s^2(\omega) ds\right]. \tag{13}$$

(b) 对每个 $t \in [0,T]$ 有

$$\int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) = \int_0^T f_s(\omega)\mathbf{1}_{(0,t]}(s) dW_s(\omega) \quad \text{a.s.}, \tag{14}$$

也就是 $I_0(f) = 0$, 和对 $0 < t \leqslant T$ 有

$$I_t(f) = I_T(f\mathbf{1}_{(0,t]}) \quad \text{a.s.}. \tag{15}$$

证. 由定义 (10) 式直接得出过程 $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ 的连续性.

因为 (a.s.) 有

$$\mathsf{E}[\varphi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|\mathscr{F}_{t_i}^W] = \varphi_i \mathsf{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}^W] = 0, \tag{16}$$

则过程 $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ 是鞅, 且它是平方可积的, 是由于

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\varphi_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] &= \mathsf{E}[\varphi_i^2 \mathsf{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2|\mathscr{F}_{t_i}^W]] = \mathsf{E}[\varphi_i^2 \mathsf{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] \\ &= \mathsf{E}\varphi_i^2(t_{i+1} - t_i). \quad \square\end{aligned}$$

性质 (12) 和 (13) 很容易得出, 只要考虑到对 $i<j$,

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}[\varphi_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})\cdot\psi_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})]\\&=\mathsf{E}[\varphi_i(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})\cdot\mathsf{E}[\varphi_j(W_{t_{j+1}}-W_{t_j})|\mathscr{F}_{t_j}^W]]=0.\end{aligned}$$

最后, 直接由 (9) 式和 (10) 式得出性质 (b).

§4. 引入平方可积鞅 $M=(M_t)_{t\in[0,T]}$ 组成的空间 $\mathscr{M}_T^2$. 换句话说, 对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$,

$$M_t \text{ 为 } \mathscr{F}_t^W-\text{可测},$$
$$\mathsf{E}(M_t|\mathscr{F}_s^W)=M_s\quad \text{a.s.},$$
$$\mathsf{E}M_t^2<\infty.$$

同样, 设鞅 $M\in\mathscr{M}_T^2$ 的所有轨道是右连续的.

在空间 $\mathscr{M}_T^2$ 中引入内积

$$(M,N)=\mathsf{E}M_TN_T \tag{17}$$

和范数

$$\|M\|_{\mathscr{M}_T^2}=\mathsf{E}(M_T^2)^{1/2}. \tag{18}$$

列举一系列对空间 $\mathscr{M}_T^2$ 中鞅来说, 我们所需要的性质.

引理 2. a) 空间 $\mathscr{M}_T^2$ 是个 Hilbert 空间 (具有引入的内积).

b) 设鞅序列 $M^{(n)},n\in\mathbb{N}$ 在 $\mathscr{M}_T^2$ 中收敛 (依范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{M}_T^2}$) 到鞅 M. 这时,

$$\mathsf{E}\sup_{t\in[0,T]}|M_t^{(n)}-M_t|^2\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty. \tag{19}$$

c) 在 $\mathscr{M}_T^2$ 中连续鞅组成的集合是一个 $\mathscr{M}_T^2$ 中闭子空间.

证. 为了证明空间 $\mathscr{M}_T^2$ 是个 Hilbert 空间, 首先证明它是完备的 (所有基本序列是收敛序列).

设 $\{M^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 $\mathscr{M}_T^2$ 中元素组成的基本序列. 显然, 随机变量 $M_T^{(n)},n\in\mathbb{N}$, 在 $L^2(\Omega)$ (具有有限二阶矩随机变量空间) 中是基本序列, 由于这个空间是完备的, 所以存在随机变量 M_T, 使得当 $n\to\infty$ 时有 $\mathsf{E}|M_T^{(n)}-M_T|^2\to 0$.

设 $M_t=\mathsf{E}(M_T|\mathscr{F}_t^W),t\in[0,T]$. 由于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$ 具有通常化条件, 得出鞅有右连续修正 (它依旧用 $M=(M_t)_{t\in[0,T]}$ 来表示). 因此, 鞅的基本序列 $M^{(n)},n\in\mathbb{N}$ 收敛到平方可积鞅 $M=(M_t,\mathscr{F}_t^W)_{t\in[0,T]}$ (在 $\mathscr{M}_T^2$ 意义下), 且有右连续轨道.

对具有右连续轨道平方可积鞅 $M = (M_t)_{t\leqslant T}$, 根据 Doob 不等式 (参见, 例如,[26], 或第 IV 章定理 5) 有

$$\mathsf{E}\sup_{t\leqslant T}|M_t|^2 \leqslant 4\mathsf{E}|M_T|^2. \tag{20}$$

由此, 证明了 a), 且直接得出 b).

为证明 c), 设 $M^{(n)} = (M_t^{(n)})_{t\in[0,T]}, n\in\mathbb{N}$ 是 $\mathscr{M}_T^2$ 中的连续鞅, $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ 是在 $\mathscr{M}_T^2$ 中的右连续鞅, 且 $\mathsf{E}|M_T^{(n)} - M_T|^2 \to 0, n\to\infty$.

由此可得, 可以找到子序列 $\{n'\}\subseteq\{n\}$, 使得

$$\sum_{n'}\mathsf{E}\left[\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n')} - M_t|^2\right] < \infty, \tag{21}$$

因此, 由于切比雪夫 (Chebyshev) 不等式, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{n'}\mathsf{P}\left\{\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n')} - M_t| \geqslant \varepsilon\right\} < \infty. \tag{22}$$

利用 Borel - 坎泰利 (Cantelli) 引理, 由 (22) 式得出, 以概率 1 有

$$\sup_{t\leqslant T}|M_t^{(n')} - M_t| \to 0, \quad n'\to\infty. \tag{23}$$

根据假设, 鞅 $M^{(n)}$ 有连续轨道, 而鞅 $M\in\mathscr{M}_T^2$, 就是说有右连续轨道. 由 (23) 式 a.s. 一致收敛得到鞅 $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ 同样具有 a.s. 连续轨道. □

§5. 回到随机积分的构造. 在空间

$$L_T^2 = L^2(\Omega\times[0,T], \mathscr{F}^W\otimes\mathscr{B}([0,T]), \mathsf{P}\otimes\mathrm{mes})$$

上研究适应 Borel 可测函数全体 $f = f_t(\omega), t\in[0,T], \omega\in\Omega$. 因此, 对 $f\in L_T^2\bigcap\mathscr{A}_T$ 有

$$\|f\|_{L_T^2}^2 = \mathsf{E}\int_0^T f_t^2(\omega)dt < \infty. \tag{24}$$

性质 (12), 意味着映射 $f\mapsto I_T(f)$, 这里 $f = f_t(\omega), t\in[0,T], \omega\in\Omega$, 是属于 $\mathscr{A}_T^0\bigcap L_T^2$ 的简单函数子空间到由连续平方可积鞅组成的子空间 $\mathscr{M}_T^2$ 是保距的. 因此映射 $f\mapsto I_T(f)$ 可以在 L_T^2 中延拓到 $\mathscr{A}_T^0\bigcap L_T^2$ 的闭包上.

引理 3. *$\mathscr{A}_T^0\bigcap L_T^2$ 的闭包 (在 L_T^2 中) 包含 $\mathscr{A}_T\bigcap L_T^2$ 中的适应 Borel 可测函数 f.*

证. 由函数论定理得出, 对 $f\in\mathscr{A}_T\bigcap L_T^2$ 可以找到 $\mathscr{A}_T^0\bigcap L_T^2$ 中函数序列 $f^{(n)}$, 使得当 $n\to\infty$ 时有

$$\mathsf{E}\int_0^T|f_s^{(n)}(\omega) - f_s(\omega)|^2 ds \to 0, \tag{25}$$

可以参考, 例如, [26; 第九章, §5], 而这里不再多述. □

§6. 设函数 $f \in L_T^2$ 是简单的 ($f \in \mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$). 每一个这样的函数可以对应一个平方可积鞅 $I(f) = (I_t(f))_{t\in[0,T]}$, 它的 "积分" 表示可以写成

$$f \mapsto \left(\int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) \right)_{t\in[0,T]}. \tag{26}$$

我们已经指出, 这个映射是由 $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 到由连续平方可积鞅组成 $\mathscr{M}_T^2$ 的子空间的保距映射.

根据引理 3, L_T^2 中适应 Borel 可测函数 f 集合, 即函数 $f \in \mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$ 包含在集合 $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 的闭包中 (在 L_T^2 中). 因此每一个那样的函数 $f \in \mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$ 可以对应一个平方可积鞅 $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$, 它自然同样用 $(\int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega))_{t\in[0,T]}$ 来表示.

定理 1. 对所有的函数 $f \in \mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$, Ito 随机积分

$$I_t(f) = \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega)$$

对任意的 $t \in [0,T]$ 是确定的 ($I_0(f) = 0$). 过程 $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ 是具有 0 中值连续平方可积鞅. 这时, 对类 $\mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$ 中所有的 f 和 g 有关系式 (12)~(14) 成立, 而在前面它们只是对类 $\mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$ 中的简单函数成立.

证. 由前面指出的保距性保证了定义量 $I_t(f)$ 是确定的可能性. 由引理 2 可得鞅 $(I_t(f))_{t\in[0,T]}$ 的连续性 (准确地说, 是存在连续修正). 由于性质 (12)~(14) 对函数 $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 成立, (根据保距性) 对函数 $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 的闭包也成立, 再根据引理 3 这又包含着集合 $\mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$. □

§7. 回到在时间区间 $[0,\infty)$ 上随机积分的定义.

设 $\mathscr{A}$ 是函数集合类, 其函数 $f = f_t(\omega), t \in [0,\infty), \omega \in \Omega$, 使得对每个 $T > 0$ 它在 $[0,T] \times \Omega$ 上的压缩包含在类 $\mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$ 中.

定理 2. 设 $f \in \mathscr{A}$. 这时, 存在连续平方可积鞅 $M = (M_t)_{t\in[0,\infty)}$ (相对于 $\sigma-$代数流 $\mathbb{F}^W$), 使得 $M_0 = 0$, 对所有的 $t > 0$ 有

$$M_t = I_t(f) \quad \left(= \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega) \right). \tag{27}$$

除此之外, 对类 $\mathscr{A}$ 中的 f 和 g 对每个 $t > 0$ 成立关系式 (12) 和 (13), 而对任意的 $T > 0$ 和所有的 $t \in [0,T]$(14) 式成立.

证. 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 根据定理 1 可以定义积分

$$M_t^{(n)} = \int_0^t f_s(\omega) dW_s(\omega), \quad 对 t \in [0,n]. \tag{28}$$

这时, 与性质 (14) 相应的有, 对所有的 $t \in [0, n-1]$, a.s. (依概率 P) 有 $M_t^{(n-1)} = M_t^{(n)}$. 定义对所有的 $t \in [0,\infty)$ 过程 $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$, 假设 $M_0 = 0$ 和 $M_t = M_t^{(n)}$, 当 $t \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$.

显然, 这样定义的过程 M 是鞅. 因为 $M^{(n)}$ 是连续鞅, 所以 M 是连续过程, 可能是除去那些基本的 ω, 它属于集合 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1}\{\omega : M_{n-1}^{(n)}(\omega) \neq M_{n-1}^{(n-1)}(\omega)\}$. 因为 a.s. (依概率 P) 有 $M_{n-1}^{(n)}(\omega) = M_{n-1}^{(n-1)}(\omega)$, 所以该集合的概率为 0.

进而, 过程 Ma.s. (依概率 P) 有连续轨道. (如果在上面所指出的集合上重新定义 M, 假设它等于 0, 则新过程所有轨道将都是连续的.)

$(I_t(f))_{t\geqslant 0}$ 的其他性质是显然的. □

§8. 讨论关于 Ito 积分的一些细节. 根据公式 (10) 对简单函数 f 的类 $\mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$ 定义的连续平方可积鞅 $I_t(f)$ 出发可以实现构造 Ito 积分, 但没有光顾公式 (20) 和 (21). 而正是由于存在过程 $\{I_t(f), t \in [0,T]\}$ 的连续修正, 借助于第四章推论 6 这些是不难建立的. 因此, 只需要研究在 L_T^2 中的简单函数 $f_n \in \mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2 (n \in \mathbb{N})$ 的基本序列, 选取必要的递增子序列 $\{n_k\}$, 由上估计 $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{t\in[0,T]} \left|I(f_{n_{k+1}}) - I(f_{n_k})\right| > k^{-2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, 然后再利用 Borel – Cantelli 引理.

函数 f 的适应 Borel 可测性质, 它在保证对引入 Ito 积分具有 "好" 性质, 起着关键作用. 同时, 还有着近似于可测性的概念, 如下面所述的定义.

定义 2. 设 $\mathbb{F}_T = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 是在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上某个 $\sigma-$ 代数流. 实随机函数 $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ 称作*循序可测的* (相对于 $\mathbb{F}_T$), 如果对任意的 $t \in [0,T]$, 映射

$$(s,\omega) \mapsto (X_s(\omega), \omega), \quad 其中\ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega,$$

是 $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t-$ 可测的. 换句话说, 对每个 $t \in [0,T]$, 压缩函数 X 到 $[0,t] \times \Omega$ 上应该是 $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t-$ 可测的.

很容易看出, 任意的相对于流 $\mathbb{F}_T$ 的循序可测函数 $f = f_t(\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega$ 将是关于这个流的适应 Borel 可测的 (在定义 1 中将 $\mathbb{F}_T^W$ 换成 $\mathbb{F}_T$). 自然可以将前定义中的函数换成过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$. 下面是个非常有意义的一个结果.

定理 3 (钟开莱 (Chung) – Doob; 参见, 例如, [148, p.5]). *设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应 Borel 可测实随机过程 (即相对于 $\mathbb{F}$ 和 $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}-$ 可测适应). 这时 X 有循序可测修正.*

循序可测的简单的充分性条件是下面的

定理 4. *设相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应实随机过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 有 a.s. 所有轨道在 $(0,\infty)$ 上左连续 (或 a.s. 所有轨道在 $[0,\infty)$ 上连续). 这时, 对过*

程 X 存在循序可测修正, 且轨道具有相同的性质.

证. 借助于对 X 构造循序可测过程 $X_n(n \in \mathbb{N})$ 系列, 在一定意义下的逼近和利用第一章引理 5, 余下证明可作为一个简单的习题.

注意, 在构造 Ito 积分过程中 (即公式 (10) 对形如 (9) 式, $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 类中简单函数 f 给出的 $I_t(f), t \in [0,T]$, 在 L_T^2 中扩充这种积分到 $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 的闭包上) 使用了 Brown 运动的自然 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T^W$, 可以利用更一般的 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$. 与此有关的是下面的定义.

定义 3. 称 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 的 Wiener 过程, 如果过程 W 相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 适应, a.s. 有连续轨道, $W(0) = 0$ a.s., 且对所有的 $0 \leqslant s < t < \infty$ 有

$$W(t) - W(s) \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_s, \quad W(t) - W(s) \sim \mathsf{N}(0, t-s),$$

这里 “$\perp\!\!\!\perp$” 表示独立.

利用较一般的 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ (比 $\mathbb{F}^W$) 体现出更多的可能性. 例如, 在对自然 $\sigma-$ 代数流时, 随机变量 ζ 相对 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_0$ 可测, 即意味着 ζ a.s. 是常数. 但是在研究随机微分方程时, 取一般的 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ (一般说都是满足通常化条件), 我们可以不仅仅取常数作为初始条件. 特别是, 如果随机变量 $\xi \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}^W$, 其中 $\mathscr{F}^W = \sigma\{\mathscr{F}_t^W, t \geqslant 0\}$, 则 W 将是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathscr{F}_t = \sigma\{\mathscr{F}_t^W, \sigma\{\xi\}\}, t \geqslant 0$ 的 Wiener 过程.

公式 (10) 显示给出的函数 f 是定义在 $[0,T]$ 上, 而我们事实上积分取的是区间 $(0,T]$, 即基于这个函数在 $t \in (0,T]$ 的行为. 研究随机微分方程时, 我们看到自然要用在时间 t 变化区间的过程, 其中包含着左端点, 它是为了给出初始条件.

§9. 为了介绍计算 Ito 积分的例子, 我们需要建立一个辅助性结果.

引理 4. 设相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T$ 循序可测函数 $f = f(t,\omega)$, 这里 $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ 是均方连续的. 这时,

$$\int_0^T f(t,\omega) dW_t = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}, \omega)(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})), \tag{29}$$

这里 W 是相对于 $\mathbb{F}_T$ 的 Brown 运动, l.i.m. (均方极限) 取的是当形如 $0 = t_0^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = T$ 分割加细, 即当 $n \to \infty$ 时有

$$\delta_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0. \tag{30}$$

证. 函数 $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)}) \mathbf{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}$ 是 $\mathscr{A}_T^0 \bigcap L_T^2$ 类中的简单函数. 根据 (10) 式有

$$I_T(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})).$$

除此之外,

$$\int_0^T \mathsf{E}|f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2 dt \leqslant T \sup_{|t-s| \leqslant \delta_n} \mathsf{E}|f(t,\omega) - f(s,\omega)|^2 \to 0$$

当 $\delta_n \to 0$ 时, 由于随机函数在区间上均方连续, 则在这区间上将是一致均方连续. □

例 1. 求 $\int_0^T W_t dW_t$ 其中 $T > 0$. 利用引理 4, 得到

$$\int_0^T W_t dW_t = \underset{\delta_n \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_k^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})) = \frac{W_T^2}{2} - \frac{T}{2}, \tag{31}$$

这里 δ_n 是由 (30) 式中给出的.

需要强调的是, 在 (29) 式中 f 的取值是选在区间 $(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ 左端点的值, 这一点起着关键性的作用. 如果在该例中选取被积函数在区间上其他点 (如 $(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ 的右端点) 得到

$$\underset{\delta_n \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} W(t_{k+1}^{(n)})(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)})) = \frac{W_T^2}{2} + \frac{T}{2}. \tag{32}$$

§10. 设 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 的 Brown 运动, 设循序可测函数 f, 使得对所有的 $t \geqslant 0$

$$\mathsf{E} \int_0^t f^2(s) ds < \infty, \tag{33}$$

而循序可测函数 $g: [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ 使得

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t |g(s,\omega)| ds < \infty\right) = 1, \quad t \geqslant 0. \tag{34}$$

称 a.s. 在 $[0, \infty)$ 连续实随机过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 有 "随机微分"

$$dX_t = f(t,\omega) dW_t + g(t,\omega) dt, \tag{35}$$

如果 $X_0 \in \mathscr{F}_0 | \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和以概率 1, 对所有的 $t \geqslant 0$ 有

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\omega) dW_s + \int_0^t g(s,\omega) ds \tag{36}$$

(Wiener 过程 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 是适应的). 由于对函数 f 和 g 的限制性条件, 则 (36) 式右半部分是确定的, 且给出的是 a.s. 连续的过程.

定义 4. 如果满足 (36) 式, 则称过程 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是 Ito 过程.

注 1. 如果实过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}, U=\{U_t,t\geqslant 0\}$ 有随机微分, 即类似 (35) 式有

$$dU_t=\sigma(t,\omega)dW_t+b(t,\omega)dt$$

(如在 (35) 式中函数一样, 具有同样的可测性质), 则显然存在 $d(X_t+U_t)$, 且

$$d(X_t+U_t)=dX_t+dU_t=(f+\sigma)dW_t+(g+b)dt.$$

显然的, 前面所有叙述的可以化为, 当 $t\in[u,v], 0\leqslant u<v<\infty$ 的情形.

§11. 随机分析的奠基石是

定理 5 (Ito 公式). 设实随机过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 有随机微分 (35) 式 (函数 f 和 g 具有前面所述的性质). 设函数 $H:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得存在连续的导数 $\partial H/\partial t, \partial^2 H/\partial x^2$. 设过程 $h=\left\{f(s,X_s)\dfrac{\partial H}{\partial x}(s,X_s), s\geqslant 0\right\}\in\mathscr{A}$. 这时, 过程 $Y_t=\{H(t,X_t),t\geqslant 0\}$ 有随机微分

$$dY_t=\frac{\partial H}{\partial t}(t,X_t)dt+\frac{\partial H}{\partial x}(t,X_t)dX_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2, \tag{37}$$

这里 $(dX_t)^2$ 是由 (35) 式所定义, 其中满足于下面的"微分运算"法则:

$$dt\cdot dt=dt\cdot dW_t=dW_t\cdot dt=0,\quad dW_t\cdot dW_t=dt. \tag{38}$$

换句话说, a.s. 对所有的 $t\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}H(t,X_t)=H(0,X_0)&+\int_0^t f(s,X_s)\frac{\partial H}{\partial x}(s,X_s)dW_s\\&+\int_0^t\left(\frac{\partial H}{\partial t}(s,X_s)+g\frac{\partial H}{\partial x}(s,X_s)+\frac{1}{2}f^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(s,X_s)\right)ds.\end{aligned} \tag{39}$$

这个基本结果带有奇特的关系: 在一阶微分表示式中, 却出现了函数 H 的二阶导数.

在定理 5 中, 条件 $h\in\mathscr{A}$ 只是为了定义在 (39) 式中对 Wiener 过程的随机积分. 在本章的补充与习题中将指出如何扩充函数类, 使得对其可以定义 Ito 积分. 那时将说明条件 $H\in C^{1,2}$ 为满足 Ito 公式成立是充分的. 准确地说, 这样的条件可以保证随机微分的存在和公式 (39) 的成立, 其中随机积分应理解为在更广泛的意义下. 因为对较狭的函数类 H 证明已经很长了 (参见, 例如, [12; §12.3]), 所以对它我们将不进行定理的证明. 除此之外, 现今对它的推广已经走了很远的路了, 例如, 对取值于 $\mathbb{R}^m$ 的连续半鞅过程. 我们建议熟识在 [146] 中定理 15.19, 15.21. 一些推广 Ito 公式的将在本章的补充与习题中研究.

§12. 介绍如何使用 Ito 公式. 回到例 1.

利用定理 5, 设 $X_t = W_t$ 和 $H(t,x) = \frac{x^2}{2}$. 显然, 定理的所有条件都满足. 这时, 对 $Y_t = H(t, W_t) = \frac{1}{2}W_t^2$ 有

$$dY_t = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial x}dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(dW_t)^2 = 0 + W_t dW_t + \frac{1}{2}(dW_t)^2 = WdW_t + \frac{1}{2}dt.$$

因此,

$$d\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = W_t dW_t + \frac{1}{2}dt.$$

这样, 与随机微分相对应的积分公式 (参见 (36)), 因为 $W_0 = 0$ 得到

$$\frac{1}{2}W_t^2 = \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2}t, \quad t \geqslant 0, \tag{40}$$

即另外方法也导致 (31) 式.

§13. 在阐述*随机微分方程*的一些一般结果之前, 我们将转向一个经常会遇到又很重要的情况, 它是与描述粒子*在液态介质中运动*有关. 研究方程

$$m\dot{v} = -\beta v + \text{“干扰”}, \quad t \geqslant 0, \tag{41}$$

这里 m 是粒子的质量, v 是它的速度, 参数 $\beta > 0$ 描述介质的粘性特征. 方程 (41) 各项相应的物理解释是 “力 $m\dot{v}$”, 即粒子的阻力与 “速度 v” 成正比, 且存在 “干扰”, 这是由于给定的粒子与介质的分子随机碰撞的关系 (因为后者的进行着热运动).

如果利用, 例如,“过程” $\dot{W}$, 其中 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 是 Brown 运动, 作为 “干扰”, 看看可以怎么样解释方程 (41). 根据第三章定理 1, 前面所述的在过程 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 的轨道无论哪一点 t 上 (以概率 1) 导数 $\dot{W}$ 是不存在的. 这就是说, 如果对这个物理学中著名的*朗之万* (Langevin) *方程*

$$m\dot{v} = -\beta v + \dot{W}, \quad t \geqslant 0, \tag{42}$$

无论想要作什么样的解释, 则一定先要考虑到 “过程” $\dot{W}$ 的这种极端不规则行为.

我们给出这个方程的严格的意义. 开始我们重新把方程写成

$$\dot{v} = av + \sigma\dot{W}, \quad t \geqslant 0, \tag{43}$$

这里

$$a = -\beta/m < 0, \quad \sigma = 1/m > 0. \tag{44}$$

众所周知, *常微分方程* (具有常系数 a 和 σ) 的解

$$\dot{v} = av + \sigma f, \quad t \geqslant 0, \tag{45}$$

先对齐次方程 $\dot{v} = av$ 找出解, 它有形如 $v(t) = ce^{at}(c = v(0))$. 利用任意的常数变形法, 它是将解写成形式 $v(t) = c(t)e^{at}$ 来求. 最后找到

$$v(t) = v(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)}f(u)du, \quad t \geqslant 0 \tag{46}$$

(对 $t \in [0, T]$ 这个解是存在的, 如果, 例如, f 是在 $[0, T]$ 上的连续函数).

方程 (45) 可以写成微分的形式

$$dv = avdt + \sigma f dt, \quad t \geqslant 0, \tag{47}$$

具有如下等价形式的积分方程:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t av(s)ds + \int_0^t \sigma f(s)ds, \quad t \geqslant 0.$$

这就给我们一个启示, 在 "随机" 的情况下, 方程 (43) 也应该理解为积分形式:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t aV(s)ds + \int_0^t \sigma dW_s, \quad t \geqslant 0, \tag{48}$$

而一般形式的写法 (类似于 (47)) 是下面的微分形式:

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma dW_t \tag{49}$$

这样, 我们就将 $\dot{W}dt$ 替换成 dW_t, 而这就可以给出方程 (43) 的意义. 在 (48) 式中包含着 Ito 随机积分 $\int_0^t \sigma dW_s$, 它等于 (根据这个积分的定义) $\sigma W(t)$, 因为在这情况下 σ 是常数. 进而, 关系式 (48) 就有形式

$$V(t) - V(0) = a\int_0^t V(s)ds + \sigma W_t. \tag{50}$$

被称作这个方程的强解是相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应, a.s. 连续过程 $V = \{V(t), t \geqslant 0\}$, 且对每个 $t \geqslant 0$, 以概率 1 关系式 (48) 左半部分等于它的右半部分. 注意, 该方程的两边都是 a.s. 连续过程, 所以立刻对所有的 $t \geqslant 0$ 方程两边以概率 1 重合.

自然类似的对 (46) 式, 希望相应的对 $V = \{V(t), t \geqslant 0\}$, 下面方程给出也有强解

$$V(t) = V(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-u)}\sigma dW_u, \tag{51}$$

这里右半部分出现 Ito 积分 (对非随机函数 $e^{-au} \in \mathscr{A}$). 这样, "对应" fdu 的 $\dot{W}du$, 也用 dW_u 来代替.

验证, 选取 (由于定理 2) 根据 (51) 式定义在 $[0, \infty)$ 上 a.s. 连续过程 V, 我们确实得到方程 (48) 的强解. 为此利用 Ito 公式.

设

$$X_t = \int_0^t e^{-au} dW_u, \quad H(t,x) = \sigma e^{at} x, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}.$$

这时, $dX_t = e^{-at} dW_t$ (根据 Ito 积分的定义 $X_0 = 0$). 取 $Y_t = H(t, X_t)$. 由于 (37) 式有

$$dY_t = \sigma a e^{at} X_t dt + \sigma e^{at} dX_t = \sigma a e^{at} X_t dt + \sigma dW_t \tag{52}$$

(再一次强调, 微分变换的意义只是在相应的积分关系式的缩写的意义).

再一次利用 Ito 公式, 很容易看出

$$d(V(0)e^{at}) = a e^{at} V(0) dt, \tag{53}$$

这里 $V(0)$ 是 $\mathscr{F}_0-$ 可测随机变量. 由 (52) 式, (53) 式和注 1 得到 (49) 式. 得证.

定理 6. *对所有 $t \geqslant 0$ 存在 Langevin 方程的强解, 它由公式 (51) 给出, 且具有初值 $V|_{t=0} = V(0) \in \mathscr{F}_0|\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

§14. 研究解 (51) 式的一些性质. 设 $\mathsf{E}V(0)$ 存在. 因为 Ito 积分的数学期望等于 0, 由 (51) 式得到

$$\mathsf{E}V(t) = e^{at} \mathsf{E}V(0), \tag{54}$$

即平均速度以指数形式衰减 (注意, $a < 0$).

定理 7. *设初始值 $V(0)$ 是 $\mathscr{F}_0|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测随机变量, $V(0) \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2/(2\alpha))$, 其中 $\alpha = -a$. 这时, Langevin 方程的强解是 Ornstein – Uhlenbeck 过程, 即 Gauss 过程 $V = \{V(t), t \geqslant 0\}$ 有 0 中值和相关函数*

$$\operatorname{cov}(V(s), V(t)) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|s-t|}, \quad s, t \geqslant 0. \tag{55}$$

证. 由 (54) 式得出, 对所有的 $t \geqslant 0, \mathsf{E}V(t) = 0$, 验证对 $s, t \geqslant 0$ 有

$$\mathsf{E}V(s)V(t) = \mathsf{E}(V(0))^2 e^{a(s+t)} + \frac{\sigma^2}{2a} e^{a(s+t)} (1 - e^{-2a(s\wedge t)}), \tag{56}$$

这里, $s \wedge t = \min\{s, t\}$. 事实上, 由于 (12) 式

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left(\int_0^s e^{a(s-u)} dW_u \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u\right) \\ &= \int_0^{s\wedge t} e^{a(s-u)} e^{a(t-u)} du = \frac{e^{a(s+t)}}{2a} (1 - e^{-2a(s\wedge t)}), \end{aligned} \tag{57}$$

除此之外, 对所有的 $t \geqslant 0$ 根据定理 2 有

$$\mathsf{E}V(0) \int_0^t e^{a(t-u)} dW_u = \mathsf{E}\left(V(0) \mathsf{E}\left(\int_0^t e^{a(t-u)} dW_u | \mathscr{F}_0\right)\right) = 0. \tag{58}$$

如果 $\mathsf{E}(V(0))^2 = -\dfrac{\sigma^2}{2a}$, 则由 (56) 式得到 (55) 式.

现证, $V = \{V(t), t \geqslant 0\}$ 是Gauss 过程. 首先, 注意 $W_t = W_t - W_0 \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_0$, 对每个 $t \geqslant 0$, 而因为 $V(0)$ 是 $\mathscr{F}_0$ – 可测随机变量, 则对任意的 $t \geqslant 0, V(0) \perp\!\!\!\perp W_t$. 由 (51) 式得出, 只需要确立对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和所有的 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k < \infty$ 向量 $(U(t_1), \cdots, U(t_k))$, 这里 $U(t) = \int_0^t \exp\{-\alpha u\} dW_u, t \geqslant 0$, 是 Gauss 的. 利用引理 4 可得, 对每个 $m = 1, \cdots, k$ 量 $U(t_m)$ 是下面随机变量在 $L^2(\Omega)$ 中取 $n \to \infty$ 的极限

$$\eta_m(n) = \sum_{j=0}^{n} \exp\{-\alpha t_j^{(m)}(n)\}(W(t_{j+1}^{(m)}(n)) - W(t_j^{(m)}(n))),$$

这里 $t_j^{(m)}(n) = jt_m/n (n \in \mathbb{N})$. 显然, 向量 $(\eta_1(n), \cdots, \eta_k(n))$ 具有多维正态分布. 在 $L^2(\Omega)$ 中取 $n \to \infty$ 的极限, 得到所要的结果. □

§15. 同前所述, 设 (扩张了 0 测度事件) $\sigma-$ 代数 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 和相对于 $\mathbb{F}$ 的 Wiener 过程 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$.

研究比 (49) 式更一般的随机微分方程, 即

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{59}$$

具有*初始条件* $X_0 = Z$, 其是 $\mathscr{F}_0$ – 可测随机变量. 对这方程应该理解为是下面随机积分方程的一种形式写法

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{60}$$

这里 b 和 σ 是定义在 $[0, T] \times \mathbb{R}$ 上, 且 $b(s, X_s)$ 和 $\sigma(s, X_s)$ 是 "很好" 的函数, 使得公式 (60) 右边有意义.

定义 5. 在区间 $[0, T]$ 上称作方程 (60) 的*强解*, 如果过程 $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ a.s. 有连续轨道, 相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 适应的, 使得对每个 $t \in [0, T]$, 当将其代入公式 (60) 的左和右半部分, 等式将以概率 1 成立.

正如前面所述, 将过程代入公式 (60) 的右半部分, 应该导致 a.s. 对所有的 $t \in [0, T]$, 等式中的两个积分是完全确定的 (它们将给出是连续过程). 当然可以研究 $[u, v]$ 和 $[u, \infty)$ 来代替 $[0, T]$.

定义 6. 称方程 (60) 在区间 $[0, T]$ 上有*唯一的强解*, 如果过程 $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ 和 $U = \{U_t, t \in [0, T]\}$ 是 (强) 解且满足于同一个初始条件, 则 U 是 X 的修正 (进而连续过程 U 和 X 是*无区别的*).

说满足下面*利普希茨* (Lipschitz) *条件*: 存在常数 $L = L(T) > 0$, 使得

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \tag{61}$$

设同时对某个常数 $c = c(T) > 0$, 有

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leqslant c(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T]. \tag{62}$$

注意, 当 $\sigma \equiv 0$, 即在研究常微分方程. 在没有那样的条件下, 方程的解可能不存在, 也可能存在, 但不唯一.

如果, 特别的 $b(t,x) = b(x), \sigma(t,x) = \sigma(x)$ 则 (61) 式导出 (62) 式.

§16.　需要一些简单的辅助性结果.

引理 5. 设实随机过程 $Y = \{Y_s, s \in [0,T]\}$ 是在 $[0,T]$ 上相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T = (\mathscr{F}_s)_{s\in[0,T]}$ 是循序可测的. 设定义在 $[0,T] \times \mathbb{R}$ 上的实函数 $a(t,x)$ 是 Borel 可测的, 即 $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测. 这时, 过程 $U = \{U_t = a(t, Y_t), t \in [0,T]\}$ 是相对于同一 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T$ 是循序可测的.

证. 验证映射: $(s,\omega) \mapsto (s, Y_s(\omega))$, 对 $s \in [0,t]$ 和 $\omega \in \Omega (0 \leqslant t \leqslant T)$ 是 $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t | \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测的.

取 $u \in [0,t]$ 和 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 这时,

$$\begin{aligned}&\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : (s, Y_s(\omega)) \in [0,u] \times B\}\\ =& \{(s,\omega) \in [0, t\wedge u] \times \Omega : Y_s(\omega) \in B\} \in \mathscr{B}([0,t\wedge u]) \times \mathscr{F}_{t\wedge u} \subset \mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t.\end{aligned}$$

由于第一章推论 1, 得到所要求的可测性. 注意, 根据条件, 对 $(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}$ 映射: $(s,x) \mapsto a(s,x)$ 是 $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测的. 只要考虑到可测映射的复合映射应该是可测的. □

设在 $[0,T] \times \mathbb{R}$ 上可测函数 b 和 σ 满足前面的条件 (61), (62).

取 $X_t^0 = Z, t \in [0,T]$ 和设对 $n \geqslant 1$,

$$X_t^{(n)} = Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW(s). \tag{63}$$

则这个递推步骤规则建立, 于是有

引理 6. 设 b 和 σ 是前面所述的函数. 设随机变量 Z 是 $\mathscr{F}_0-$ 可测的, 且 $\mathsf{E}Z^2 < \infty$. 这时, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 被公式 (63) 所具体确定的过程 $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,T]\}$ 是循序可测的 (即存在那样的修正). 这时, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathsf{E}|X_t^{(n)}|^2 < \infty, n \in \mathbb{N}$, 和 (63) 式右半部分可以取成 a.s. 在 $[0,T]$ 上连续的.

证. 因为 $Z \in \mathscr{F}_0 | \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 函数 $Y_s(\omega) = Z(\omega)$ 是循序可测的, 这里 $s \in [0,T], \omega \in \Omega$. 根据引理 5, 过程 $b(s, Z(\omega))$ 和 $\sigma(s, Z(\omega))$ 是循序可测的 $(s \in [0,T])$. 由于 (62) 式, 有

$$\sup_{s\in[0,T]} \mathsf{E}\sigma^2(s,Z) \leqslant c(1 + \mathsf{E}Z^2) < \infty.$$

因此, 过程 $\{\sigma(s,Z), s\in[0,T]\}\in\mathscr{A}_T\bigcap L_T^2$ 和对 $\int_0^t\sigma(s,Z)dW_s, t\in[0,T]$, 根据定理 4 可以选取 a.s. 连续的 (和循序可测的). 考虑 $\{b(s,Z), s\in[0,T]\}$ 的循序可测性和条件 (62), 有

$$\mathsf{E}\int_0^T|b(s,Z)|ds\leqslant(Tc(1+\mathsf{E}Z^2))^{1/2}<\infty.$$

根据 Fubini 定理, 对几乎所有的 ω 积分 $\int_0^T b(s,Z)ds$ 有限, 且对这些 ω 过程 $\int_0^t b(s, Z)ds$ 将是对 $t\in[0,T]$ 是连续的. 由定理 4 得到, 以该积分区间上限为变量的过程是循序可测的.

在假定过程 $\{X^{(n-1)}(t), t\in[0,T]\}$ 是循序可测的和 $\sup\limits_{s\in[0,T]}\mathsf{E}|X_s^{(n-1)}|^2<\infty$ 下, 同样可以解释在 (63) 式右半部分的循序可测性和 a.s. 连续性. 除此之外,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X_t^{(n)})^2&\leqslant3\left(\mathsf{E}Z^2+\mathsf{E}\left(\int_0^t b(s,X_s^{(n-1)})ds\right)^2+\mathsf{E}\left(\int_0^t\sigma(s,X_s^{(n-1)})dW_s\right)^2\right)\\&\leqslant3\left(\mathsf{E}Z^2+Tc\int_0^T\mathsf{E}(1+|X_s^{(n-1)}|^2)ds+c\int_0^T\mathsf{E}(1+|X_s^{(n-1)}|^2)ds\right)\\&\leqslant3\left(\mathsf{E}Z^2+c(T+1)T\left(1+\sup_{s\in[0,T]}\mathsf{E}|X_s^{(n-1)}|^2\right)\right)<\infty,\end{aligned}$$

由此可得 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\mathsf{E}|X_t^{(n)}|^2<\infty$. □

引理 7 (格朗沃尔 (Gronwall)). 设 $y=y(t)$ 是在 $[0,T]$ 上的非负连续函数, 且满足下面不等式

$$y(t)\leqslant c_0+q\int_0^t y(s)ds,\quad t\in[0,T],\tag{64}$$

这里 $c_0\geqslant0, q\geqslant0$ 是常数. 这时对 $t\in[0,T]$, 有

$$y(t)\leqslant c_0e^{qt}.\tag{65}$$

证. 由假设中的 (64) 式, $c_0+q\int_0^t y(s)ds>0$, 对 $t\geqslant0$ (在 0 点是右导数) 有

$$\left(\ln\left(c_0+q\int_0^t y(s)ds\right)\right)'=\frac{qy(t)}{c_0+q\int_0^t y(s)ds}\leqslant q.\tag{66}$$

取自 0 到 t 的积分, 得到

$$\ln\left(c_0+q\int_0^t y(s)ds\right)-\ln c_0\leqslant qt,\quad t\in[0,T].$$

因此,

$$c_0+q\int_0^t y(s)ds\leqslant c_0e^{qt},\quad t\in[0,T].$$

试自己讨论最简单的情况, 讨论要说明没有意义的情况 (如果 $c_0=0$ 和 $y(s)=0$ 对 $s\in[0,u]$, 则在 (66) 式中不能取对数). □

§17. 下面的结果是随机微分方程解的存在唯一性定理.

定理 8. 设在 $[0,T]\times\mathbb{R}$ 上可测函数 b 和 σ 满足条件 (61) 和 (62). 设随机变量 Z 是 $\mathscr{F}_0-$ 可测的, 且 $\mathsf{E}Z^2<\infty$. 这时, (60) 式存在唯一的强解, 具有 $\mathscr{F}_0-$ 可测的初始条件 $X_0=Z$, 使得对任意的 $t\in[0,T]$ 有 $X_t\in L^2(\Omega)$ 并且函数 $\mathsf{E}X_t^2$ 在 $[0,T]$ 上有界.

证. 利用定义在 (63) 式中定义的 a.s. 连续过程 $X^{(n)}=\{X_t^{(n)},t\in[0,T]\}$ 序列逼近的方法.

证明分为几个步骤:

A. 估计 $\mathsf{E}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|^2$ 上界. 如果 $n=0$, 则考虑 (62) 式, 对 $t\in[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left|X_t^{(1)}-X_t^{(0)}\right|^2&=\mathsf{E}\left|\int_0^t b(s,Z)ds+\int_0^t\sigma(s,Z)dW_s\right|^2\\&\leqslant 2\mathsf{E}\left(\int_0^t b(s,Z)ds\right)^2+2\mathsf{E}\left(\int_0^t\sigma(s,Z)dW_s\right)^2\\&\leqslant 2(t+1)\mathsf{E}\int_0^t c(1+|Z|^2)ds\\&\leqslant 2ct(t+1)(1+\mathsf{E}Z^2)\leqslant M_1t,\\M_1&=2c(T+1)(1+\mathsf{E}Z^2).\end{aligned}\tag{67}$$

对 $n\geqslant1$ 和 $t\in[0,T]$, 应用 (61) 式得到

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|^2\\&=\mathsf{E}\left(\int_0^t(b(s,X_s^{(n)})-b(s,X_s^{(n-1)}))ds+\int_0^t(\sigma(s,X_s^{(n)})-\sigma(s,X_s^{(n-1)}))dW_s\right)^2\\&\leqslant 2\mathsf{E}\left(\int_0^t L\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|ds\right)^2+2\mathsf{E}\int_0^t(\sigma(s,X_s^{(n)})-\sigma(s,X_s^{(n-1)}))^2ds\\&\leqslant 2L^2(1+T)\int_0^t\mathsf{E}\left|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}\right|^2ds.\end{aligned}\tag{68}$$

由 (67) 式和 (68) 式, 根据归纳法得出, $M=\max\{M_1,2L^2(1+T)\}$ 时有

$$\mathsf{E}\left|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}\right|^2\leqslant\frac{M^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!},\quad n=0,1,\cdots,t\in[0,T].\tag{69}$$

对 $m > n \geqslant 0$ 和 $t \in [0,T]$. 由于 (69) 式有

$$\left(\mathsf{E}\left|X_t^{(m)} - X_t^{(n)}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{70}$$

由于空间 $L^2(\Omega)$ 的完备性, 导致在 $L^2(\Omega)$ 中对每个 $t \in [0,T]$, 随机变量序列 $X_t^{(n)}$ 当 $n \to \infty$ 时存在极限. 这个极限用 $Y_t(t \in [0,T])$ 来表示.

B. 估计 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|$ 上界, 借助于量

$$\int_0^T \left|b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})\right| ds + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)}))dW_s\right|.$$

第四章推论 6, 定理 2, 不等式 (68) 和 (69) 得到估计

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right| > 2^{-n}\right)\\
\leqslant\ &\mathsf{P}\left(\left(\int_0^T \left|b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})\right| ds\right)^2 > 2^{-2n-2}\right)\\
&+\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\left|\int_0^t \left(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\right) dW_s\right| > 2^{-n-1}\right)\\
\leqslant\ &2^{2n+2}T\int_0^T \mathsf{E}\left(b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})\right)^2 ds\\
&+2^{2n+2}\int_0^T \mathsf{E}\left|\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})\right|^2 ds\\
\leqslant\ &2^{2n+2}L^2(T+1)\int_0^T \frac{M^n s^n}{n!} ds \leqslant \frac{(4MT)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned} \tag{71}$$

根据 Borel - Cantelli 引理, 由得出的不等式有

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right| > 2^{-n}, \text{ 无穷多次}\right) = 0. \tag{72}$$

因此, 对几乎所有的 ω 存在 $N_0 = N_0(\omega)$ 使得对所有的 $n \geqslant N_0(\omega)$ 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right| \leqslant 2^{-n}. \tag{73}$$

这样, 序列

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_t^{(0)}(\omega) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(X_t^{(k+1)}(\omega) - X_t^{(k)}(\omega)\right), \tag{74}$$

是由在 $[0,T]$ 上 a.s. 连续函数组成, 且以概率 1 在这区间上一致收敛. 设 Ω_0 是集合, 在其上所有函数 $X_t^{(n)}$ 在 $[0,T]$ 上连续, 且一致收敛; $\mathsf{P}(\Omega_0)=1$. 对 $\omega\in\Omega_0$ 设 $X_t(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}X_t^{(n)}(\omega)$, 对 $\omega\in\Omega\backslash\Omega_0$ 和 $t\in[0,T]$ 设 $X_t(\omega)=0$. 由此可得, 函数 $X_t(\omega)$ 是在 $[0,T]$ 上连续对所有的 ω. 因为根据第一章引理 6, 随机变量 $X_t\in\mathscr{F}_t|\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 作为 $\mathscr{F}_t-$ 可测的随机变量 $X_t^{(n)}$ 的极限. 过程 $\{X_t,t\in T\}$ 的循序可测性是因为它的连续性和相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}_T$ 的适应性.

显然, 对每个 $t\in[0,T]$, a.s 有 $Y_t=X_t$, 其中过程 $Y=\{Y_t,t\in[0,T]\}$ 是在 A 中所建立的.

C. 验证, 过程 $X=\{X_t,t\in[0,T]\}$ 是方程 (60) 的解.

由 (70) 式, 对所有的 $t\in[0,T]$ 和 $m\in\mathbb{N}$ 有

$$\left\|X_t^{(m)}\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|Z\|_{L^2(\Omega)}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{1/2}=\|Z\|_{L^2(\Omega)}+c(M,T).\tag{75}$$

因此,

$$\|X_t\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|Z\|_{L^2(\Omega)}+c(M,T),\quad t\in[0,T]\tag{76}$$

利用 Fubini 定理和 Lebesgue 控制收敛定理, 考虑到 (75) 式和 (76) 式得出

$$\mathsf{E}\int_0^T(X_s-X_s^{(n)})^2ds=\int_0^T\mathsf{E}(X_s-X_s^{(n)})^2ds\to 0,\quad 当\ n\to\infty.\tag{77}$$

由于 (61) 式和 (77) 式, 对每个 $t\in[0,T]$, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\int_0^t\sigma(s,X_s^{(n)})dW_s\xrightarrow{L^2(\Omega)}\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s,$$
$$\int_0^t b(s,X_s^{(n)})ds\xrightarrow{L^2(\Omega)}\int_0^t b(s,X_s)ds.$$

这样, 对每个 $t\in[0,T]$, 在 (63) 式中对上标 $\{n_m=n_m(t)\}$ 取极限得到 (60) 式.

D. 证明解的唯一. 首先验证, 如果过程 $X=\{X_t,t\in[0,T]\}$ 在 $[0,T]$ 上 a.s. 连续, 且 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\mathsf{E}X_t^2<\infty$, 则这个过程在 $[0,T]$ 上均方连续.

对 $s,t\in[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X_t-X_s)^2&=\mathsf{E}\left[\int_s^t b(u,X_u)du+\int_s^t\sigma(u,X_u)dW_u\right]^2\\&\leqslant 2(t-s)\int_s^t\mathsf{E}b^2(u,X_u)du+2\int_s^t\mathsf{E}\sigma^2(u,X_u)du\\&\leqslant 2c(t-s)\left(1+\sup_{[0,T]}\mathsf{E}X_u^2\right)(1+T).\end{aligned}$$

于是 $\|X_t\|_{L^2(\Omega)}$ 同样在 $[0,T]$ 上是均方连续的.

设 X_t 是 (60) 式中具有初始条件 $X_0 = Z$ 的强解, 而 $\widetilde{X}_t$ 是 (60) 式中具有初始条件 $\widetilde{X}_0 = \widetilde{Z}$ 的强解 (Z 和 $\widetilde{Z}$ 满足定理的条件), 并且函数 $\mathsf{E}X_t^2$ 和 $\mathsf{E}\widetilde{X}_t^2$ 在 $[0,T]$ 上有界. 这时, 过程 $X - \widetilde{X}$ 在 $[0,T]$ 上均方连续和函数 $y(t) = \mathsf{E}(X_t - \widetilde{X}_t)^2$ 在 $[0,t]$ 上连续. 类似 (68) 式可以找到

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 &\leqslant 3\mathsf{E}|Z - \widetilde{Z}|^2 + 3\mathsf{E}\left(\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,\widetilde{X}_s))ds\right)^2 \\ &\quad +3\mathsf{E}\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,\widetilde{X}_s))dW_s\right)^2 \\ &\leqslant 3\mathsf{E}|Z - \widetilde{Z}|^2 + 3(1+t)L^2\int_0^t \mathsf{E}|X_s - \widetilde{X}_s|^2 ds. \end{aligned}\tag{78}$$

这样, 得到的不等式 (64), 其中 $c_0 = \mathsf{E}|Z - \widetilde{Z}|^2, q = 3(1+T)L^2$.

我们还需强解的唯一性. 由于引理 7, 如果 $Z = \widetilde{Z}$ a.s., 则在 (64) 式中 $c_0 = 0$, 因而对每个 $t \in [0,T]$ 有 $\mathsf{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 = 0$. 利用 $|X_t - \widetilde{X}_t|$ 轨道的连续性, 得出过程 X 和 $\widetilde{X}$ *是无区别的*, 即

$$\mathsf{P}\left(X_t(\omega) = \widetilde{X}_t(\omega),\ \text{对所有 } t \in [0,T]\right) = 1. \quad \square$$

注 2. 方程 (60) 强解的唯一性可以证明对更广的随机过程类成立 (参见习题 21).

§18. 这一节将研究随机微分方程 (强) 解的马氏性.

注意, 定理 8 显然完全可以重述, 当区间是 $[u,T], 0 \leqslant u < T < \infty$ 时, 用它代替 $[0,T]$, 这时就要寻找下面方程的解

$$Z_t = \xi + \int_u^t b(s,Z_s)ds + \int_u^t \sigma(s,Z_s)dW_s \tag{79}$$

具有初始条件 $Z_u = \xi$, 其是 $\mathscr{F}_u-$ 可测的 (这里, 如前所述, Brown 运动 $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$). 这个解 Z_t 用 $Z_t(\xi), t \in [u,T]$ 来表示.

对随机过程 $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ 是方程 (60) 解, 有 $(t \geqslant u)$

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \\ &= X_0 + \int_0^u b(s,X_s)ds + \int_u^t b(s,X_s)ds + \int_0^u \sigma(s,X_s)dW_s + \int_u^t \sigma(s,X_s)dW_s \\ &= X_u + \int_u^t b(s,X_s)ds + \int_u^t \sigma(s,X_s)dW_s. \end{aligned}\tag{80}$$

考虑到, X_u 是 $\mathscr{F}_u-$ 可测随机变量, $\mathsf{E}X_u^2 < \infty$, 和利用方程 (79) 强解的唯一性, 得到对每个初始条件 $X_0(X_0 \in \mathscr{F}_0|\mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{E}X_0^2 < \infty)$

$$X_t(\omega) = Z_t(X_u,\omega), \quad \text{a.s. 对 } t \geqslant u. \tag{81}$$

我们需要下面的辅助性结果.

引理 8. 设 $b=b(s,x)$ 和 $\sigma=\sigma(s,x)$ 对 $(s,x)\in[u,T]\times\mathbb{R}$ 满足定理 8 的条件. 这时, 对任意的 $t\in[u,T]$ 和 $\xi\in\mathscr{F}_u|\mathscr{B}(\mathbb{R})(\mathsf{E}\xi^2<\infty)$, 随机变量 $Z_t(\xi,\omega)$ 相对于 $\sigma-$代数流 $\mathscr{A}_{[u,t]}=\sigma\{\xi,W_s-W_u,s\in[u,t]\}$ 是可测的, 它是扩张了 0 测度事件类的.

证. 再重复定理 8 的证明, 得到 $Z_t(\xi,\omega)$ 是 a.s. 随机变量 $Z_t^{(n)}(\xi,\omega)$, 当 $n\to\infty$ 时的极限, 其中 $Z_t^{(0)}(\xi,\omega)=\xi,t\in[u,T]$. 如果 $n\geqslant 1$, 则

$$Z_t^{(n)}(\xi,\omega)=\xi+\int_u^t b(s,Z^{(n-1)}(\xi,\omega))ds+\int_u^t \sigma(s,Z_s^{(n-1)}(\xi,\omega))dW_s,\ t\in[u,T]. \quad (82)$$

不难看出, $Z_t^{(0)}\in\mathscr{A}_{[u,t]}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$. 根据归纳法, 类似引理 6([0,T] 用 $[u,T]$ 来代替) 保证对所有的 $n\geqslant 1, Z_t^{(n)}(\xi,t)$, 的 $\mathscr{A}_{[u,t]}$ – 可测性. 应用第一章引理 6, 得出所求的结果. □

不难建立下面的结果.

定理 9. 设满足定理 8 的条件. 这时, 随机方程 (59) 的强解是马氏过程.

证. 只需要证, 对任意的点 $u,t,0\leqslant u\leqslant t\leqslant T$ 和任意的有界 Borel 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有

$$\mathsf{E}(f(X_t)|\mathscr{F}_u)=\mathsf{E}(f(X_t)|X_u). \quad (83)$$

因为 $X_t=Z_t(X_u(\cdot),\omega)$ a.s. (利用在引理 8 中的表示), 则在 (83) 式中 $f(X_t)$ 处可以换成 $f(Z_t(X_u,\omega))$. 根据引理 8, 随机变量 $f(Z_t(X_u,\omega))$ 是有界和 $\mathscr{A}_{[u,t]}$– 可测的. 由于第六章引理 2, 可以得到 $f(Z_t(X_u,\omega))$ 作为在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中有限个随机变量线性的组合的 a.s. 极限, 这些随机变量形如 $\eta=g(X_u)h_1(W_{t_1}-W_u)\cdots h_m(W_{t_m}-W_u)$. 其中 $g,h_1,\cdots,h_m$ 是有界 borel 函数, 而 $u\leqslant t_1<\cdots<t_m\leqslant t,m\in\mathbb{N}$. 考虑到, X_u 是 $\mathscr{F}_u$– 可测的随机变量, 而对 $s\geqslant u$, 有 $W_s-W_u\perp\!\!\!\perp\mathscr{F}_u$, 于是有

$$\mathsf{E}(\eta|\mathscr{F}_u)=g(X_u)\mathsf{E}(h_1(W_{t_1}-W_u)\cdots h_m(W_{t_m}-W_u)).$$

显然, $\mathsf{E}(\eta|X_u)$ 等于同样的表示式. 经过对所说和 (形如 η 的) 序列取极限, 得出在一般情况下的关系式 (83). □

推论 1. Ornstein – Uhlenbeck 过程不仅是 Gauss 过程 (参见定理 7), 而且是马氏过程.

补充与习题

从第八章的内容中, 可以看出随机函数 $f=f(t,\omega)$ 可积性问题直接与它们的可测性相联系的. 为此, 引入了一系列重要概念.

在 "随机过程一般理论" 的形成和发展中起着巨大的作用是意识到对 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 中的三元素还需要补充 "接纳" $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 其时间参数 t 的指标集是 $\mathbb{R}_+$ (或它的某个子集), 而 $\mathscr{F}_t$ 解释为 $\mathscr{F}$ 中所有到时刻 t (包括该时刻) 观测到的事件的全体.

"随机过程一般理论" 深刻的结果告诉我们, 如果认为 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 满足那个被称作 "通常化" 条件, 即是*右连续* ($\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$, 其中 $\mathscr{F}_{t+} = \bigcap\limits_{s>t} \mathscr{F}_s$, 对所有的 $t \geqslant 0$) 和 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}$ 被所有 P–0 测度集所*完全化*, 同时每个 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_t$ 也*包含着* $\mathscr{F}$ *中* P–0 *测度集*, 那么, 所有一切 "进行顺利", 且理论本身具有非常和谐的形式.

定义 7. $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的子集 A 称作*循序可测的* (或简称为**循序的 (progressive)**), 如果过程 $X = \mathbf{1}_A$ (即 $X_t(\omega) = \mathbf{1}_A(t,\omega), t \geqslant 0, \omega \in \Omega$) 循序可测的.

全体循序 (可测) 的集合 A 全体组成一个 $\sigma-$ 代数, 用 Prog 表示. 显然

$$\mathrm{Prog} \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{F}_\infty,$$

这里 $\mathscr{F}_\infty = \bigvee\limits_{t\geqslant 0} \mathscr{F}_t$. 每个循序可测过程, 显然, *适应的* (adapted) (即与 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 相适应的).

1. 试举例说明, 存在适应的, 但不是循序可测的过程.

下面两个 $\sigma-$ 代数 (*可选的* (optional) 和*可料的* (predictable) 集合类) 在随机分析的各种不同问题中起着重要的作用.

定义 8. 由轨道属于 Skorokhod 空间 $D([0,\infty))$ 且将其看作由 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 映射: $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ 的适应的过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$, 所生成的 $\sigma-$ 代数 (最小的) 称作 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中子集所组成的*可选* $\sigma-$ *代数*, 记作 $\mathscr{O}$. 对可选 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{O}$ 可测的过程称作*可选过程*.

2. 试证, 可选 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{O}$ 可以定义为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中子集, 它是由形如

$$[[0,\tau]] := \{(t,\omega) : 0 \leqslant t \leqslant \tau(\omega)\}$$

的随机区间, 其中 $\tau(\omega)$ 是停时 (相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 的), 所产生的 $\sigma-$ 代数最小的.

定义 9. 由轨道属于实连续函数空间 $C = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 的且将其看作是由 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ 中映射的所有适应的过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 生成的 $\sigma-$ 代数 (最小的) 称作 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中子集组成的可料 $\sigma-$ 代数, 记作 $\mathscr{P}$. 对 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{P}$ 可测的过程称作可料过程. 关于可料 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{P}$ 可测的过程称作可料过程.

3. 试证, 可料 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{P}$ 也可以定义为由所有轨道仅在 $(0,\infty)$ 上*左连续*实函数的适应的过程所产生的 $\sigma-$ 代数 (最小的).

两者取其一 (要看在研究时, 究竟哪个方便) 的定义, 参见, 例如, [26] 和 [46].

4. 验证, 可料 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{P}$ 是由形如下面之一的子集类所产生的 σ - 代数 (最小的):

(a) $\{0\}\times A$, 其中 $A\in\mathscr{F}_0$ 和集合形如 $(t,\infty)\times B$, 其中 $B\in\mathscr{F}_t, t\geqslant 0$;

(b) $\{0\}\times A$, 其中 $A\in\mathscr{F}_0$ 和随机区间形如

$$[[0,\tau]]=\{(t,\omega):0\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\},\quad]]\tau,\infty[[=\{(t,\omega):\tau(\omega)<t<\infty\},$$

这里 τ 是停时;

(c) $\{0\}\times A$, 其中 $A\in\mathscr{F}_0$ 和集合形如 $(s,t]\times B$, 其中 $B\in\mathscr{F}_s, s\leqslant t$.

5. 验证, $\cdots\cdots$ 有下面的包含关系:

$$\mathscr{P}\subseteq\mathscr{O}\subseteq\mathrm{Prog}\subseteq\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{F}_\infty.$$

回顾, 根据定理 4, 所有相对于 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应左连续的或者连续的过程是循序可测的.

6. 设过程 X 是循序可测的, τ 是有限停时. 试证随机变量 X_τ 是 $\mathscr{F}_\tau-$ 可测的 (这个性质刚刚好是说明, 引入循序可测概念的定义合理性).

7. 试验证, 简单 (逐段右连续) 函数 $f=f(t,\omega)$, 形如

$$f(t,\omega)=\sum_{k=0}^{m-1}\xi_k(\omega)\mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})}(t),\quad t\in[0,T],$$

其中, 量 $\xi_k(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{t_k}-$ 可测, $0=t_0<\cdots<t_m=T$, 且是可选的.

8. 试验证, 简单 (逐段左连续, 对 $t\in(0,T]$) 函数 $f=f(t,\omega)$, 形如

$$f(t,\omega)=\eta(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\eta_k(\omega)\mathbf{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t),\quad t\in[0,T],$$

其中, 量 $\eta(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_0-$ 可测, $\eta_k(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{t_k}-$ 可测, $0=t_0<\cdots<t_m=T$, 且是可料的.

9. 试验证, 在 §2 和 §3 中所述构造 Ito 积分, 可从在习题 7 中所提到的可选简单函数类出发 (如果从在习题 8 中所提到的可料简单函数类出发, 它将具有同一样的 Ito 积分). 是否可以确定, 在 L_T^2 中给出的简单函数全体在 L_T^2 的闭包可以导致空间 $\mathscr{A}_T\bigcap L_T^2$?

10. 设 τ 是停时, 使得对所有的 $\omega\in\Omega$ 有 $\tau(\omega)\leqslant T$ (T 是正常数). 试证, $I_\tau(f)=I_T(f\mathbf{1}_{(0,\tau]})$ 其中 $I_\tau(f):=I_{\tau(\omega)}(f)$.

11. 试证, 如果 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是 Skorokhod 空间 $D[0,\infty)$ 中的非随机函数, 则过程 $I_t(f), t\geqslant 0$ 是 Gauss 的. 试求, 它的中值和相关函数.

现在讨论 Ito 积分的一些推广. 积分可以对下面函数类 J_1 进行定义.

定义 10. 称函数 f 属于 J_1 类, 如果 $f:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ 循序可测的, 且

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t f^2(s,\omega)ds<\infty\right)=1,\quad t>0. \tag{84}$$

对函数 $f\in J_1$ 构造积分 $I_t(f)$ 的思想是: 选取函数 $f_n, n\in\mathbb{N}$ 的序列, 使得对这个积分 $I_t(f_n)$ 已经建立了, 且要

$$\int_0^t (f(s,\omega)-f_n(s,\omega))^2 ds \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\quad n\to\infty. \tag{85}$$

由此可得, 序列 $\{I_t(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是依概率的基本序列. 因此, 存在随机变量, 用 $I_t(f)$ 来表示, 使得当 $n\to\infty$ 时有 $I_t(f_n)\xrightarrow{\mathsf{P}} I_t(f)$. 和以前一样, 极限 $I_t(f)$ 可以写成 $\int_{(0,t]} f(s,\omega)dW_s$ 或者 $(f\cdot W)_t$. 对 Brown 运动用 $\{B_t,t\geqslant 0\}$ 表示时, 这时极限写作 $(f\cdot B)_t$.

12. 试证, 在 (85) 式中所述的序列 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 存在, 且证, 如果 $f\in J_1$, 则存在过程 $I_t(f),t\geqslant 0$, 的 a.s. 连续修正.

注意, 对 $f\in J_1$ 过程 $I_t(f)$ 不一定是鞅, 但它是*局部鞅* (即对过程存在有限停时序列 τ_n, 使得 a.s. $\tau_n\uparrow\infty(n\to\infty)$ 和对每一个 n, "停时的" 过程 $I_t^{\tau_n}(f):=I_{t\wedge\tau_n}(f)$, 其中 $t\geqslant 0$ 是鞅).

13. 对 $f\in J_1$, 研究过程

$$Z_t=\exp\left\{\int_0^t f(s,\omega)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)ds\right\},\quad t\geqslant 0. \tag{86}$$

试证, $dZ_t=Z_tf(t,\omega)dW_t$ (和以前一样, 所有的微分关系式都意味着是相应的积分的简写).

关于随机微分析的详细内容可参见书 [26,124,128]. 简明的随机积分可以参见 [163].

对 Wiener 过程 (Brown 运动) 的随机积分可以给出*分形 Brown 运动* "明显的" 表示.

定义 11. 取值于 $\mathbb{R}^m$ 的随机过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 称作*自相似的* (*自复制的*), 如果对每个 $a>0$ 可以找到那样的 $b>0$, 使得

$$\mathrm{Law}(X_{at},t\geqslant 0)=\mathrm{Law}(bX_t,t\geqslant 0). \tag{87}$$

换句话说, 对这样的过程, *时间标度*改变 $(t\mapsto at)$, 在对应的*相标度*的改变 $(x\mapsto bx)$ 下导致结果不变. 如果在定义 (87) 中对任意的 $a>0$, 参数 $b=a^H$, 则随机过程 X 称作*具有哈尔斯特 (Hurst) 指数 H 的自相似过程*. 量 $D=1/H$ 称作随机过程 X 的*随机分形维数*.

回顾, 对 $0 < H \leqslant 1$, 分形 Brown 运动 $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t), t \geqslant 0\}$ 定义为中心化 Gauss 过程, 且具有相关函数

$$\operatorname{cov}(B^{(H)}(s), B^{(H)}(t)) = s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}, \quad s, t \geqslant 0.$$

当 $H = 1/2$ 时, 过程 $B^{(1/2)} = \{B^{(1/2)}(t), t \geqslant 0\}$ 就是 Brown 运动.

14. 试证, $B^{(H)} = \{B^H(t), t \geqslant 0\}$ 其中 $0 < H \leqslant 1$ 是自相似过程 (具有 Hurst 指数 H).

过程 $B^{(H)}$ 首先是 Kolmogorov 在 1940 年研究的 (参见 [33]), 并且它们被称作 Wiener 螺线. 分形的 ("fractional" 或者分数的) Brown 运动的术语是由**芒德布罗 (Mandelbrot)** 和**范讷斯 (Van Ness)** 在 1968 年的工作 [164] 给出的, 在那里还给出了下面的定理.

定理 10 (Mandelbrot – Van Ness). *对 $0 < H < 1$ 和 $t \geqslant 0$ 分形 Brown 运动 $B^{(H)}$ 有下面的表示:*

$$B^{(H)}(t) = c_H \left\{ \int_{-\infty}^{0} [(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}] d\widetilde{W}_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s \right\}, \quad (88)$$

这里标准化常数 c_H 的选取, 使得 $\mathsf{E}(B^{(H)}(1))^2 = 1$ (参见, 例如, [86; 第 1 卷, p.281]), 而 $\{W_s, s \geqslant 0\}$ 和 $\{\widetilde{W}_s, s \geqslant 0\}$ 是独立标准 Weiner 过程, 且对 $s \leqslant 0$ 有 $W_s = \widetilde{W}_{-s}$.

分形 Brown 运动 (和离散时间的情况一样) 被利用在许多重要的模型当中, 特别是对描述金融指标的动力系统 (参见 [86]). 对具有 $0 < H \leqslant 1$ 过程 $B^{(H)}(t)$ 研究的复杂性在于, 除去 $H = 1/2$ (Brown 运动) 和 $H = 1$ 的情况, 这些过程不是*半鞅* (即不包含在那些随机分析中正在发展的重要过程里, 参见 [46; 第 4 章]). 如果在表示式 (88) 中, 那里 H 以取值于 $(0,1)$ 的 Holder 函数 H_t (即 $|H_t - H_s| \leqslant c|t-s|^\alpha, \alpha > 0$) 来代替, 则所得到随机过程称作*多重分形 Brown 运动*.

15. 试证, 对过程 $B^{(H)}$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\widehat{H}_n := \ln \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |B^{(H)}(k/n) - B^{(H)}((k-1)/n)| \right) / \ln(1/n) \to H \quad \text{a.s.}.$$

设 $J_1([0,T])$ 循序可测函数空间 $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, 对 $t \in [0,T]$, 满足 (84) 式. 借助于随机积分概念的如下定理是描述 Brown 运动泛函的构造的.

定理 11 (Ito – 克拉尔科 (Crarke)). *设 $(\mathscr{F}_t^W)_{t \in [0,T]}$ 是 Brown 运动 $W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ 的自然 $\sigma-$ 代数流, $X = X(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_T^W | \mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测随机变量. 有如下的结论:*

1. 如果 $\mathsf{E}X^2 < \infty$, 则可以找到那样的随机过程 $f = \{f(s), s \in [0,T]\} \in \mathscr{A}_T \bigcap L_T^2$, 使得有

$$X = \mathsf{E}X + \int_0^T f(s, \omega) dW_s \quad \text{a.s.}. \quad (89)$$

2. 如果 $\mathsf{E}|X| < \infty$, 则表示式 (89) 成立, 只是对某些过程 $f \in J_1([0,T])$.

3. 如果 X 是正的随机变量 (即 $\mathsf{P}(X > 0) = 1$) 和 $\mathsf{E}X < \infty$, 则可以找到过程 $f \in J_1[0,T]$ 使得 X 可以表示成形如 $X = Z_T \mathsf{E}X$, 其中 Z_T 由 (86) 式所决定.

16. 试解释, 为什么在定理 11 中所述的变量 X 是关于 Brown 运动的泛函, 即 $X(\omega) = g(W(s,\omega), 0 \leqslant s \leqslant T)$, 其中 $g : C[0,T] \to \mathbb{R}, g \in \mathscr{B}(C[0,T])|\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

定理 11 不同证明的变形是由 Ito, Crarke, Doob 给出的, 并且引入到许多书中, 参见, 例如, [46,182].

作为 Brown 运动泛函表示成随机积分的形式应用例子, 介绍极值问题: 在所有的有限停时 τ (相对于 Brown 运动 $W = \{W(t), t \in [0,1]\}$ 的自然 $\sigma-$ 代数流) 当中, 找出那样的有限停时 τ_*, 使得可以达到

$$V_* = \inf_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \mathsf{E}\left| W_\tau - \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} W_s \right|^2.$$

可以设想一个模型: 用 Brown 运动来描述股票价格在单位时间周期 (例如一天) 内的波动 (自然明白, 这只不过是个解释, 因为价格不可能是负的), 要求选择时刻 τ_*, 使得卖掉已有的股票最有利 (在均方意义下). 注意, 对 $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} W_s$ 给出的是 W_{τ_*} 有偏估计, 这是因为 $\mathsf{E}W_{\tau_*} = 0$, 而 $\mathsf{E} \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} W_s = \sqrt{2/\pi}$ (试作为简单的习题来解释). 因此, 可以研究量

$$\widetilde{V} = \inf_{a \in \mathbb{R}, \tau \in [0,1]} \mathsf{E}|W_\tau + a - \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} W_s|^2.$$

很容易验证,

$$\widetilde{V} = V_* - 2/\pi.$$

设

$$S_t = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} W_s, \quad t \in [0,1].$$

定理 12 (Grawersen – Pechker – Shiryayev). 前面所引入问题的解由下面公式给出:

$$\tau_* = \inf\{t \in [0,1] : S_t - W_t = z_* \sqrt{1-t}\},$$

其中常数 z_* 可以由下面方程找出:

$$4\Phi(z_*) - 2z_*\phi(z_*) - 3 = 0,$$

这里 Φ 和 ϕ 分别是标准正态随机变量的分布函数和密度. 这时, $z_* = 1.12\cdots$, $V_* = 2\Phi(z_*) - 1 = 0.73\cdots$.

在这个结果的证明过程中, 关键作用是下面的表示

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} W_s = b + \int_0^1 f(s,\omega) dW_s,$$

其中 b 是常数 (试指出该常数) 和

$$f(s,\omega)=2\{1-\Phi((S_t-W_t)/\sqrt{1-t})\},\quad s\in[0,1],\quad \omega\in\Omega.$$

随机分析方法与结果的广泛应用是与一些过程的随机积分理论相联系. 这些过程比 Brown 运动有更一般的构造.

定义 12. 与 $\sigma-$ 代数族 $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 相适应的随机过程 $A=\{A_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 称作递增的, 如果对几乎所有的 ω 有 $A_0(\omega)=0$, 其中 $A_t(\omega)$ 是在 $[0,\infty)$ 上的不降函数, 且对每个 $t\in\mathbb{R}_+$ 有 $\mathsf{E}A_t<\infty$.

定义 13. 称作实随机过程 $Y=\{Y_t,t\geqslant 0\}$ 属于狄利克雷 (Dirichlet) 类 (D), 如果随机变量族 $\{Y_\tau,\tau\in S\}$ 一致可积, 其中 S 表示所有有界停时 (相对于 $\sigma-$ 代数族 $\mathbb{F}$) 全体.

有如下的基本结果 (参见 [26; 第 1 卷, p.68]; 与第四章定理 1 比较).

定理 13 (Doob – Meyer 分解). *(D) 类的下鞅 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 且具有 cad-lag 形式的轨道, 则存在且唯一 (精确到随机无区别) 形如下面的分解:*

$$X_t=X_0+A_t+M_t,$$

其中 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是递增的可料可积的过程 ($\mathsf{E}A_\infty$, 其中 $A_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}A_t$), 而 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是一致可积鞅.

为了简单, 研究在滤化的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 上连续均方可积鞅 $M=(M_t)_{t\geqslant 0}$, 且 $M_0=0$. 所有这样的鞅全体用 $\mathscr{M}_2^c$ 表示. 假使 $\sigma-$ 代数族 $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 满足通常化条件.

我们来拟定按过程 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}\in\mathscr{M}_2^c$ 构造积分的纲要. 设 $\langle M\rangle=(\langle M\rangle_t)_{t\geqslant 0}$ 是参与下鞅 $M_t^2,t\geqslant 0$, Doob – Meyer 分解的递增可料过程, 且具有 $\mathsf{E}\langle M\rangle_\infty<\infty$.

正如对 Brown 运动的情况, 积分

$$I_T(X)=\int_0^T X_t(\omega)dM_t(\omega),\tag{90}$$

一般地说, 不能按轨道如同 Lebesgue – Stieltjes 积分那样进行 (只是对平凡情况 $M_t=0,t\geqslant 0$ 时可以).

过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0,\omega\in\Omega\}$ 称作简单的, 如果存在严格递增数列 $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ 与 $t_0=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$, 同时还有实随机变量序列 $\{f_n(\omega)\}_{n=0}^\infty$ 和某个常数 $0<c<\infty$, 对其有 $\sup\limits_n|f_n(\omega)|\leqslant c$ 对所有的 $\omega\in\Omega$, 且 $f_n\in\mathscr{F}_{t_n}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和

$$X_t(\omega)=f_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{k=0}^\infty f_k(\omega)\mathbf{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t),\quad 0\leqslant t<\infty.\tag{91}$$

简单过程类全体用 $\mathscr{L}_0$ 来表示, 对 $X \in \mathscr{L}_0$ 设

$$I_t(X) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}) + f_n(M_t - M_{t_n}), \quad 对 \quad t_n \leqslant t < t_{n+1}. \tag{92}$$

然后再证明定义 (92) 式可以从 $\mathscr{L}_0$ 延拓到更广的过程类 (重新利用简单过程的必要逼近). 有趣的是, 这类过程是依赖于函数 $\langle M \rangle_t$ 对几乎所有的 ω 相对于 Lebesgue 测度是否绝对连续. 这种详细的构造和进一步的推广可以参见书 [48, 182].

17. 借助于 Ito 公式试证, 对确定性函数 $f = f(t) \in C^1$ 成立 "*分部积分*" 公式:

$$\int_{(0,t]} f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_{(0,t]} f'(s)W_s ds. \tag{93}$$

试构造使得公式 (93) 不成立的随机函数 $f = f(t, \omega)$ 的例子.

例 2. 研究群体增长的随机干扰方程

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t, \qquad r = 常数. \tag{94}$$

确切地说, 研究形式如下的具有初始条件 $X_0 (X_0 \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和 $\mathsf{E}X_0^2 < \infty)$ 的随机微分方程

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \tag{95}$$

其中常数 $\sigma > 0, r \in \mathbb{R}$.

由 Ito 公式直接可得, 过程

$$X_t = X_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t} \tag{96}$$

是方程 (95) 的强解. 因为 $X_0 \perp\!\!\!\perp W = \{W_t, t \geqslant 0\}$, 则

$$\mathsf{E}X_t = \mathsf{E}X_0 \exp\{rt\}. \tag{97}$$

换句话说, 当 $\mathsf{E}X_0 \neq 0$ 时, 平均增长 (减少, 如果 $r < 0$) $\mathsf{E}X_t$ 将是与确定性模型 (94) 式一样. □

在金融数学中, 方程 (95) 起着巨大的作用. 它的解 (96) 式经常被称作 "**几何 Brown 运动**". *局部的偏流* $r - \sigma^2/2$ 描述过程 X 平均值的变化速度, *扩散* σ^2 在金融读物中经常称作*波动性* (Volatilities). 这首先由**萨谬尔森 (Samuelson)**意识到, 几何 Brown 运动对描述价格演化的重要意义, 对它使用了 "*经济的 Brown 运动*" 术语.

在第八章所述的定义和结果, 有价值但略复杂一些, 自然是对多维的情况. 这样, *方程* (59) *可以理解为方程组*, 其中 $X_t = (X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(n)}), b$ 是向量, σ 是矩阵, 确切地说,

$$b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{98}$$

$W=\{W_t, t\geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动 (相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$). 同样认为

$$b(t,X_t)dt=\begin{pmatrix} b^{(1)}(t,X_t)dt \\ \vdots \\ b^{(n)}(t,X_t)dt \end{pmatrix},$$

$$\sigma(t,X_t)dW_t=\begin{pmatrix} \sigma_{11}(t,X_t) & \cdots & \sigma_{1m}(t,X_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t,X_t) & \cdots & \sigma_{nm}(t,X_t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dW_t^{(1)} \\ \vdots \\ dW_t^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{99}$$

对向量函数的积分定义为由对每个坐标的积分组成的向量, 而 $\int_{[0,t]}\sigma(s,X_s)dW_s$ 表示向量函数, 该向量的第 i 个坐标有

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{[0,t]}\sigma_{ik}(s,X_s)dW_s^{(k)}.$$

循序可测的定义显然也可以移到多维的情况. 定理 13 同样有效, 如果在条件 (61) 和 (62) 中 b 的模理解为在 $\mathbb{R}^n$ 中的范数, 而 σ 的模理解为矩阵的范数, 例如, 认为是 $|\sigma|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{ik}^2$.

在研究随机微分方程组的时候, Ito 公式的多维变式起着非常重要的作用, 即描述过程 $H(t,X_t)$ 的随机微分, 其中 $H=H(t,x_1,\cdots,x_n)$, 而 $X=(X^{(1)},\cdots,X^{(m)})$ 是 Ito 向量过程. 换句话说, X 有如下随机微分形式:

$$dX_t=f(t,\omega)dW_t+g(t,\omega)dt,\quad t\in[0,\infty), \tag{100}$$

这里 f 和 g 相应矩阵的和向量的循序可测的函数 $f=(f_{ik}(t,\omega), i=1,\cdots,n; k=1,\cdots,m); g=(g_1(t,\omega),\cdots,g_n(t,\omega))$, $W_t=(W_t^{(1)},\cdots,W_t^{(m)})$. 也就是说, 设

$$dX_t^{(i)}=\sum_{k=1}^{m}f_{ik}(t,\omega)dW_t^{(k)}+g_j(t,\omega)dt,\quad i=1,\cdots,n, \tag{101}$$

这里对任意的 $t>0$ 和所有的 $i=1,\cdots,n$ 和 $k=1,\cdots,m$

$$\mathsf{P}\left(\int_{[0,t]}|g_j(s,\omega)|ds<\infty\right)=1,\quad \mathsf{P}\left(\int_{[0,t]}|f_{ik}(s,\omega)|^2ds<\infty\right)=1. \tag{102}$$

定理 14. 设函数 $H:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得 $H\in C^{1,2}$, 即存在连续导数 $\partial H/\partial t$ 和 $\partial^2 H/\partial x_i\partial x_j, i,j=1,\cdots,n$. 这时, 过程 $Y_t=H(t,X_t)$, 其中 Ito 过程 X_t 是根据 (100) 式, (102) 式所定义的, 有如下形式的随机微分公式:

$$dY_t=\frac{\partial H}{\partial t}(t,X_t)dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}(t,X_t)dX_t^{(i)}dX_t^{(j)},$$

这里, $dX_t^{(i)}$ 和 $dX_t^{(j)}$ 形如在 (101) 式, "连乘法则":

$$dW_t^{(i)} \cdot dW_t^{(j)} = \delta_{ij} dt, \quad dt \cdot dt = dW_t^{(i)} \cdot dt = dt \cdot dW_t^{(i)} = 0.$$

Ito 公式的证明, 参见, 例如, [26]. 关于这个公式各式各样的推广, 参见, 例如, [11,146]. 在这里只是引一个方面的推广结果.

设 W 是标准一维 Brown 运动 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$. 设函数 $F = F(x)$ 是绝对连续的, 即

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y) dy,$$

并且函数 $f = f(y) \in L^2_{\text{Loc}}(\mathbb{R})$, 即对任意的 $c > 0$ 有

$$\int_{|y| \leqslant c} f^2(y) dy < \infty.$$

定义 $[f(W), W]$ 是过程 $f(W)$ 和 W 的均方协方差过程如下式:

$$\begin{aligned} [f(W), W]_t = \mathsf{P}\text{-}\lim_n \sum_m & (f(W_{t^{(n)}_{(m+1)\wedge t}}) - f(W_{t^{(n)}_{(m)\wedge t}})) \\ & \times (W_{t^{(n)}_{(m+1)\wedge t}} - W_{t^{(n)}_{(m)\wedge t}}), \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

这里 P - lim 表示依概率的极限, 而 $\{t^{(n)}_{(m)}, m \in \mathbb{N}\}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 是确定性时间的黎曼 (Riemann) 序列, 即 $t^{(n)}_{(m)} \leqslant t^{(n)}(m+1)$ 对 $m \in \mathbb{N}$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$, 当 $m \to \infty$ 时有 $t^{(n)}_{(m)} \to \infty$, 除此之外, 对任意的 $t > 0$ 有

$$\sup_m (t^{(n)}(m+1) \wedge t - t^{(n)}(m) \wedge t) \to 0, \quad 当\ n \to \infty.$$

特别强调的是, 因为过程 $f(W)$ 一般地说, 不是半鞅, 给出的 $[f(W), W]_t$ 是依概率存在的极限, 这不是显然的. 工作 [129] 的其中之一结果正是证明这个极限的存在性.

定理 15 (Protter – Follmer – Shiryayev; [129]). *在前面的关于函数 $F = F(x)$ 的假设下, 有公式*

$$F(W_t) = F(0) + \int_0^t f(W_s) dW_s + \frac{1}{2}[f(W), W]_t. \tag{103}$$

18. 设函数 $f \in C^2$, 试证,

$$[f(W), W]_t = \int_0^t f'(W_s) ds, \quad t \geqslant 0.$$

进而, 公式 (103) 转化为 Ito 公式.

19. 设 $f(x) = |x|$. 试证, $[f(W), W]_t = 2L_t(0)$, 其中 $L_t(0)$ 是 Brown 运动在 0 点的局部时 (Levy), 其定义如下:

$$L_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|W_s| \leqslant \varepsilon\}} ds. \tag{104}$$

这样, 在这时, 公式 (103) 转化为对 Brown 运动的田中 (Tannaka) 公式.

推广 Ito 积分到多变量函数可以参见小册子 [163]. 这里只是介绍一个这方面的结果.

定理 16 (Ito). 对所有的 $t>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 成立下面的公式

$$\int\cdots\int_{0\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant t} dW_{s_1}\cdots dW_{s_n}=\frac{t^{n/2}}{n!}H_n\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}}\right), \tag{105}$$

这里 H_n 是 n 阶**埃尔米特 (Hermite)**多项式, 即

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}),\quad n=0,1,\cdots.$$

转向时齐扩散, 即研究下面方程的解

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t,\quad t\geqslant s,\quad X_s=x\in\mathbb{R}^n, \tag{106}$$

这里, W_t 是 m 维 Wiener 过程, 函数 $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 和 $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$ 满足定理 8 的条件, 此时这些条件可转化为一个条件: 存在 $L>0$, 使得

$$|b(x)-b(y)|+|\sigma(x)-\sigma(y)|\leqslant L|x-y|;\quad x,y\in\mathbb{R}^n \tag{107}$$

(对向量, $|\cdot|$ 意味着欧氏范数, $|\sigma|^2=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{k=1}^m\sigma_{ik}^2$), 由此可得, 对某个 $c>0$ 有

$$|\sigma(x)|^2+|b(x)|^2\leqslant c(1+|x|^2),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{108}$$

用 $X_t^{s,x}$ 表示对 $t\geqslant s$ 时方程 (106) 的唯一强解.

20. 试证, 对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 如前面所定义的过程 $X_t^{s,x}, t\geqslant s$, 是时齐马氏过程.

21. 试证, 满足定理 8 的条件下, 强解的唯一性 (在 $[0,T]$ 上) 将可以在更广的一类过程中, 其对 $t\in[0,T]$ 存在 $\mathsf{E}X_t^2$.

22. 试验证, 如果满足定理 8 的条件只是在半开区间 $[0,T)$, 则它的结论同样在这区间上成立, 仅仅是过程 X 类, 对它们函数 $\mathsf{E}X_t^2$ 有界是在每个包含在 $[0,T)$ 的区间上.

23. 借助于 Ito 公式, 试证, (一维) 下面方程的解

$$dX_t=\frac{\beta-X_t}{T-t}dt+dW_t,\quad t\in[0,T),\quad X_0=\alpha, \tag{109}$$

是过程

$$X_t=\alpha(1-t/T)+\beta t/T+(T-t)\int_0^t\frac{dW_s}{T-s}. \tag{110}$$

24. (习题 23 的继续). 试证, 当 $t\to T-$ 时, 有 $X_t\to\beta$ a.s.. 这样, 方程 (109) 的解乃是在区间 $[0,T]$ 上的 Brown 桥, 且具有固定的端点 $X_0=\alpha$ 和 $X_T=\beta$. **标准的 Brown 桥**是当 $T=1$ 和 $\alpha=\beta=0$.

在随机微分方程的解的存在唯一性定理不同形式的推广中, 需要指出的是**兹沃科 (Zwonkin)** 出乎意料的结果 (参见, 例如, [86; p.322]), 证明了对下面的随机微分方程存在强解

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t \tag{111}$$

只需要 $b(t,x)$ 对变量 (t,x) 的可测性和一致有界性.

25. 试证, 随机微分方程

$$dX_t = \sigma(X_t)dt + dW_t \tag{112}$$

当具有 "不好的" 系数 $\sigma(X) = \text{sgn}x$ 时, 它有唯一的强解.

定义 14. 具有初始条件 μ, 其是给定在 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的测度, 随机微分方程 (59) 在区间 $[0,T]$ 上有弱解, 如果可以找到一个滤化的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ 和 Brown 运动 $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 以及 a.s. 连续随机过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, 使得 $\text{Law}(X_0) = \mu$ 和对每个 $t > 0$ a.s. 依概率 P 满足等式 (60).

自然, 可以研究形如区间 $[u,v]$, 这里 $0 \leqslant u < v < \infty$ 或 $[u,v]$ 对 $0 \leqslant u < v \leqslant \infty$ 代替区间 $[0,T]$.

需要强调的是, 强解是研究在给定的滤化的概率空间及其上的 Brown 运动的, 与强解不同, 在弱解的定义中, 那样的对象 (概率空间和 Brown 运动) 不是固定的, 只是要求能够找到它们. 显然强解是弱解.

定义 15. 方程 (59) (强或者弱) 解的弱唯一性意味着, 任意两个解 (强或者弱) 具有相同的初始条件, 则分布相重合, 即有限维分布是一样的.

26. 试证, 方程

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t, \quad t \in [0,T], \quad X_0 = 0, \tag{113}$$

这里 $\sigma(x) = \text{sgn}x$, 至少有两个解 (但是 "弱" 的). 除此之外, 在某个概率空间上, 这个方程可以完全没有 "强" 解.

为了证明最后的结果, 应该验证, 过程

$$B_t = \int_0^t \sigma(W_s)dW_s, \ t \in [0,1], \quad \sigma(x) = \text{sgn}x,$$

是在区间 $[0,1]$ 上的 Brown 运动. 下面的结果 (参见, 例如, [83]) 保证了这个结论.

定理 17 (Levy). 设 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是在某个滤化的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上 a.s. (依概率 P) 连续的均方可积鞅. 设 $(B_t^2 - t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 同样是鞅, 即

$$\mathsf{E}(B_t^2 - B_s^2 | \mathscr{F}_s) = t - s, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{114}$$

这时, $B = \{B_t, t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动.

注意, **巴洛 (Barlow)** [92] 证明了方程 (113) 可以没有强解, 甚至于当 $\sigma = \sigma(x) > 0$ 是有界连续函数的时候.

27. 设满足定理 8 的条件. 试证, 方程 (59) 的解 (强或者弱) 是弱唯一的.

习题 26 说明了, 可能存在弱解, 但不是强解. 因此, 自然希望期待着在对方程 (59) 的系数较少限制性条件下能存在弱解.

在这方面的最初结果之一 (参见, [86; 第 1 卷, p.325]) 可叙述如下. 研究随机微分方程

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{115}$$

具有初始分布 $\mu = \mathrm{Law}(X_0)$, 使得对某个 $\gamma > 2$ 有

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^\gamma \mu(dx) = \mathsf{E}|X_0|^\gamma < \infty.$$

如果系数 $b = b(x)$ 和 $\sigma = \sigma(x)$ 是有界连续函数, 则方程 (115) 有弱解.

注 3. 如果对方程 (115) 的系数 $\sigma(x)$ 有界非退化函数, 而系数 $b(x)$ 只是要求有界可测性, 则方程依然存在唯一 (依分布) 的弱解. 关于弱解所得到的结果同样可以推广到多维的情况以及系数依赖于过去的情况等等 (参见, 例如, [86; 第 1 卷, 第 III 章]).

在随机微分方程的理论中 (特别是, 对构造弱解) 起着重要作用的是**吉尔萨诺夫 (Girsanov) 定理**, 它是关于测度的绝对连续变换的. 为了叙述它, 需要引入一些必要的符号.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 是某个滤化的概率空间, $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是m 维 Brown 运动 $W = (W^1, \cdots, W^m)$. 设 $b = (b_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 其中 $b = (b^1, \cdots, b^m)$ 是循序可测 m 维随机过程, 使得

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t \|b_s\|^2 ds < \infty\right) = 1, \quad t \in [0, T], \tag{116}$$

这里 $\|b_s\|^2 = (b_s^1)^2 + \cdots + (b_s^m)^2$ 和 $T < \infty$.

构造过程 $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, 如果设

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t (b_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|b_s\|^2 ds\right\}, \tag{117}$$

这里 $(b_s, dW_s) := \sum\limits_{k=1}^m b_s^k dW_s^k$.

引理 9 (参见, 例如, [86; 第 2 卷, p.326]). *如果满足诺维可夫 (Novikov) 条件:*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \|b_s\|^2 ds\right\} < \infty, \tag{118}$$

则 $\mathsf{E}Z_T = 1$ 和在 (117) 式引入的过程 $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 是一致可积鞅.

由于 Z_t (P-a.s.) 正性和条件在 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上 $\mathsf{E}Z_T = 1$ 可以给出概率测度 Q_T, 设

$$\mathsf{Q}_T(A) = \mathsf{E}(\mathbf{1}_A Z_T), \quad A \in \mathscr{F}_T. \tag{119}$$

定理 18 (Girsanov). 对前面所引入的过程 W 和 b, 定义

$$B_t = W_t - \int_0^t b_s ds, \quad t \in [0, T].$$

这时, $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 是在滤化的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}_T, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{Q}_T)$ 上的 m 维 Brown 运动.

这个定理, 正如已经指出的, 给出了下面的随机微分方程构造弱解的可能性:

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t, \quad t \in [0, T], \tag{120}$$

甚至于对更一般的方程 (参见, 例如, [86; 第 VII 章, §36], [148; 第 5 章]).

与 Ito 积分一系列有关的问题中, 应该注意 "对称的" 斯特拉托诺维奇 (Stratonovich) (或菲斯克 (Fiske) – Stratonovich) 积分:

$$\int_0^t f(s, \omega) \circ dW_s(\omega), \tag{121}$$

这里 $W = \{W_s, s \geqslant 0\}$ 是 Brown 运动, 而函数 f 属于某个类. 为了了解事情的实质, 比如对某个类函数 f, 积分 (121) 构造借助于形如下面的积分和

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*, \omega)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

这里, $0 = t_0 < \cdots < t_N = t$ 和 $t_i^* = (t_i + t_{i+1})/2, i = 0, \cdots, N-1$. 将随机微分方程看作借助积分 (121) 的积分方程是有利的, 其解释的理由, 可参见 [169]. 特别的, 对 Stratonovich 积分, 在进行变量替换时, 在 Ito 公式不会出现二阶的附加项. 这样对在流形上随机微分方程的研究非常有利 (参见 [128]). 同时在研究随机方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dW_s \tag{122}$$

时对系数要求比在研究形如 (60) 式的方程时更多的限制. 如果函数 $\sigma(t, x)$ 对 x 可微, 则方程 (122) 等价于下面的 Ito 方程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_x'(s, X_s)\sigma(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \tag{123}$$

特别的, 如果 $\sigma(s, x)$ 不依赖于 x, 则与方程 (60) 两种解释相重合.

同时强调的是 Ito 积分是鞅 (例如, 在定理 2 的条件下), 而 Stratonovich 积分就不具有这个性质.

为今后学习随机微分方程理论的不同方面可以关注 [11,130,154]. 在 [196] 中研究了随机偏微分方程. 例如, 在 [88] 中研究了量子扩散.

本节的最后部分介绍一些问题, 它涉及在随机过程及其应用的一般理论的框架内的一个独立研究方向.

一个非常重要的方向是*滤波理论*. 假设, 在有用的信号上附加了 "噪声", 而且需要从受干扰的观测中分离 (过滤) 出这个信号. 这种描述简单的现象, 它的形式化却不简单. 我们关注到了模型, 它构造了出非常漂亮的理论.

设我们所关心的 n 维随机过程 $X_t, t \in [0,T]$ 的有用又 "隐蔽" 的信号是由具有初值条件 $X_0 = Z$ 的随机微分方程 (组) (59) 来描述, 并且设 "观测的" q 维随机过程 $Y_t, t \in [0,T]$, 它是由下面随机微分方程给出:

$$dY_t = c(t, X_t)dt + \gamma(t, X_t)dB_t, \tag{124}$$

这里, $c : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^q, \gamma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{q\times p}$. 认为所有的研究的过程是定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 且 p 维 Brown 运动 $B = \{B_t, t \geqslant 0\}$ 不依赖在 (59) 式中的 m 维 Brown 运动 (即相互独立) $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$.

一个重要的问题是: 根据观测 $\{Y_s, s \in [0,t]\}$ 给出对 $t \in [0,T]$ 量 X_t *的估计*. 设 $\mathscr{H}_t = \sigma\{Y_s, s \in [0,t]\}$, 将寻找最佳估计 $\widetilde{X}_t \in \mathscr{H}_t|\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\mathsf{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 = \inf\{\mathsf{E}|X_t - U|^2 : U \in L^2(\Omega, \mathscr{H}_t, \mathsf{P})\}. \tag{125}$$

很容易看出, $\widetilde{X}_t = \mathsf{E}(X_t|\mathscr{H}_t)$. 我们假设所有研究的随机变量具有有限的二阶矩 (是对向量的每个坐标说的), 同时要满足所用的随机方程解存在的条件.

下面对线性方程组的*经典结果* (参见, 例如, [169]) 是最早一批结果之一, 它们给出了实际当中可以实现的方便公式, 其用来描述最佳滤波器的动力学.

定理 19 (卡尔曼 (Kalman) – 布西 (Bucy) 滤波器). *设*

$$dX_t = F(t)X_tdt + C(t)dW_t, \quad F(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad C(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$
$$dY_t = G(t)X_tdt + D(t)dB_t, \quad G(t) \in \mathbb{R}^{q\times n}, \quad D(t) \in \mathbb{R}^{q\times p}.$$

假设矩阵 $D(t)D(t)^*$ *对所有的* t *是可逆的, 在每一个* t *变化的有界区间上矩阵* $(D(t)D(t)^*)^{-1}$ *的范数有限. 这时, 问题* (125) *的解* $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_t, t \in [0,T]\}$ *满足下面的随机微分方程:*

$$d\widetilde{X} = (F - SG^*(DD^*)^{-1}G)\widetilde{X}_tdt + SG^*(DD^*)^{-1}dY_t \tag{126}$$

具有初始条件 $\widetilde{X}_0 = \mathsf{E}X_0$, *而矩阵函数*

$$S(t) = \mathsf{E}(X_t - \widetilde{X}_t)(X_t - \widetilde{X}_t)^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

满足矩阵形式的里卡蒂 (Riccati) 微分方程

$$\begin{aligned}&\frac{dS}{dt}=FS+SF^*-SG^*(DD^*)^{-1}GS+CC^*,\\&S(0)=\mathsf{E}(X_0-\mathsf{E}X_0)(X_0-\mathsf{E}X_0)^*.\end{aligned}\tag{127}$$

例 3. 应用定理 19 到下面特殊情况的标量过程, 求 $\widetilde{X}_t$. 设

$$\begin{aligned}&dX_t=0,\ 即\ X_t=X_0,\ \mathsf{E}X_0=0,\ \mathsf{E}X_0^2=v,\\&dY_t=X_tdt+mdB_t,\quad Y_0=0.\end{aligned}$$

Riccati 方程 (127) 对 $S(t)=\mathsf{E}(X_t-\widetilde{X}_t)^2$, 转化为

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{m^2}S^2,\quad S(0)=v,$$

由此可得

$$S(t)=\frac{vm^2}{m^2+vt},\quad t\geqslant 0.$$

对 $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_t\}$, 由 (126) 式找到

$$d\widetilde{X}_t=-\frac{v}{m^2+vt}\widetilde{X}_tdt+\frac{v}{m^2+vt}dY_t,\quad \widetilde{X}_0=\mathsf{E}X_0=0.$$

因此, 对扩散过程利用 Ito 公式, 得出

$$d\left(\widetilde{X}_t\exp\left\{\int\frac{v}{m^2+vt}dt\right\}\right)=\exp\left\{\int\frac{v}{m^2+vt}dt\right\}\frac{v}{m^2+vt}dY_t,$$

从而有

$$\widetilde{X}_t=\frac{v}{m^2+vt}Y_t,\quad t\geqslant 0.$$

关于滤波理论可以参见 [160]. 作为在这方面的引论建议读 [169; 第 IV 章].

我们还要指出一个重要的情况, 它是最近十几年来最引人注意的. 如果在前面的过滤干扰 (“噪声”) 的问题, 把它看作是需要躲避的障碍物. 那么有些问题 (相对于非线性系统的分析) 干扰却起着好作用. 事情是这样的, 某些系统在一定的随机干扰的影响下可以表现出稳定性行为的特征.

在最近几年, 随机金融数学问题引起了巨大的注意.

在这里, 对连续时间的模型, 代替差分方程产生了随机微分方程. 这时, 花费很多技术的复杂, 得到与离散时间类似的已知结果. 我们不重述 “离散时间的” 定义, 它在第四章的补充中给出了, 在连续时间的情况 (参见 [86]). 值得注意, 在**布莱克 (Black) – 默顿 (Merton) – 舒尔斯 (Scholes)**模型的框架内的研究具有非常高的知名度, 它是用来描述价格演化的几何 Brown 运动的. Scholes 和 Merton 的工作在 1997 年获得了**诺贝尔 (Nobel)** 经济学奖 (而 Black 已逝世, 没有被授予 Nobel 奖).

这样, 如果 (B, S)- 市场被下面的随机微分方程所描述:

$$dB_t = rB_t dt, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \tag{128}$$

这里, $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ **是银行帐户** **(bank account)**, 而 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ **是股票价格** **(securities price)**, 则有下面著名的结果.

定理 20 (Black – Scholes 公式). *在模型 (128) 中, r, μ, σ 是常数, 具有未定权益函数 $f_T = (S_T - K)^+$ 标准的买入期权 (Call Option) 欧氏期权的定价是由下面公式给出:*

$$C(T) = S_0 \Phi(y_+) - K e^{-r} \Phi(y_-), \tag{129}$$

这里

$$y_{\pm} = \frac{\log(S_0/K) + T(r \pm \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}},$$

而 Φ 是标准正态随机变量的分布函数. 特别的, 当 $S_0 = K$ 和 $r = 0$ 时有

$$C(T) = S_0 \left[\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \right],$$

当 $T \to 0$ 时, $C(T) \sim K\sigma\sqrt{T/(2\pi)}$.

有不同方法证明这个定理 (参见, 例如 [86]). 注意, 与借助于 Girsanov 定理的鞅方法, 还有 Black 和 Scholes 所用的方法, 它是在一定的条件下对套期保值所得出的

$$Y(t, T) = C_{[t,T]} = \inf\{x > 0 : \exists \pi \text{ 使得 } X_t^\pi = x, X_T^\pi = f_T, \text{P-a.s.}\}$$

这样称作**基本方程**

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + rS\frac{\partial Y}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = rY$$

具有边界条件 $Y(T, S) = (S - K)^+$. 这时, 量 $C_{[0,T]} = C(T)$ (参见 (129)).

关于对随机金融数学问题的全面了解, 可从 [86, 147, 155] 中得到.

附录 1
柯尔莫戈洛夫定理的证明

定理的证明分几步:

A. 由给定的测度 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$ 去构造 Q_J, 其中指标集 $J=\{t_1,\cdots,t_n\}$, 设

$$\mathsf{Q}_J(B_J)=\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}), \tag{1}$$

其中 "矩形"

$$B_J=\{y\in S_J:y(t_k)\in B_{t_k},k=1,\cdots,n\} \text{ 且 } B_{t_k}\in\mathscr{B}_{t_k},k=1,\cdots,n. \tag{2}$$

由于条件 1° (第一章 §11) 该定义是具体的, 即公式 (1) 的左半部分是不依赖集合 J 中点的指标次序 (只要牢记对每一点 $t_k,k=1,\cdots,n$ 所对应的集合 B_{t_k}). 根据 Caratheodory 定理, 由 "矩形" 所生成的半环上的测度 Q_J, 可唯一扩张到由这个半环所生成的 $\sigma-$ 代数上, 即在 $\mathscr{B}_J$ 上. 这时, 根据条件 1° 和 2° (第一章 §11) 测度 Q_J, 这里 $J\in F(T)$ 满足相容性条件 (I. 44).

这样, 可以认为在空间 $(S_J,\mathscr{B}_J)$ 上存在一族相容的测度 $\mathsf{Q}_J,J\in F(T)$. 证明在 $(S_T,\mathscr{B}_T)$ 上存在唯一的测度 Q, 它具有给定的投影 $\mathsf{Q}_J,J\in F(T)$. 显而易见, 这只不过是柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 定理一种以测度语言表述的等价形式. 事实上, 如果上述结论成立, 则根据第一章引理 8, 在概率空间 $(\mathsf{S}_T,\mathscr{B}_T,\mathsf{Q})$ 上利用坐标方法建立了随机函数 $X=\{X(t),t\in T\}$ (见 (I.42)), 对它来说, $\mathsf{P}_X=\mathsf{Q}$. 这时, 对每个 $J\in F(T)$ 有 $\mathsf{Q}_J=\mathsf{Q}\pi_{T,J}^{-1}=\mathsf{P}_X\pi_{T,J}^{-1}$. 所以对任何上述的 "矩形" B_J, 我们有

$$\mathsf{Q}_J(B_J)=\mathsf{P}_X\pi_{T,J}^{-1}(B_J)=\mathsf{P}(X\in\pi_{T,J}^{-1}(B_J))=\mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_{t_k}\in B_{t_k}\}\right).$$

因此, 根据 (1) 式和第一章引理 2, 得到 X 有有限维分布 $\mathsf{P}_{t_1,\cdots,t_n}$.

B. 对 A 中构造测度 Q 的问题用更清晰的语言是给定在 $\sigma-$ 子代数上的测度扩张到包含它的一个 $\sigma-$ 代数上. 为此, 将 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_U$ 上的测度 Q_U 定义到 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_{T,U} \subset \mathscr{B}_T$ 上, 这里 $U \in F(T)$ 定义

$$\widetilde{\mathsf{Q}}_U(\widetilde{C}_U) = \mathsf{Q}_U(C_U),$$

其中 C_U 和 $\widetilde{C}_U$ 具有 (I.36) 的关系形式. 显而易见, 这时测度 $\mathsf{Q}_U, U \in F(T)$ 的相容性条件等价于对在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_{T,U}$ 上测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}_U$ 压缩到 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_{T,V}$ 上与测度 $\widetilde{\mathsf{Q}}_V$ 相重合, 其中 $V \subset U$.

此外, 还有 Kolmogorov 定理以另一种测度语言表述的等价形式, 存在 $\mathscr{B}_T$ 上的唯一测度 Q, 使得在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_{T,U}$ 上有 $\mathsf{Q} = \widetilde{\mathsf{Q}}_U$, 对每个 $U \in F(T)$. 从而, 在柱集 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{C}_T$ 上根据下式给定了集函数 Q:

$$\mathsf{Q}(C) = \widetilde{\mathsf{Q}}_U(C), \quad \text{其中} \quad C \in \mathscr{B}_{T,U}, \quad U \in F(T). \tag{3}$$

换句话说, 设 $\mathsf{Q}(\pi_{T,U}^{-1}B) := \mathsf{Q}_U(B)$ 对 $B \in \mathscr{B}_U, U \in F(T)$.

注意定义 (3) 是正确的, 因为如果 $C \in \mathscr{B}_{T,U}$ 和 $C \in \mathscr{B}_{T,J}$, 这里 $U, J \in F(T)$, 则 $C \in \mathscr{B}_{T,U\cup J}$. 由于 (I.37) 因此

$$\widetilde{\mathsf{Q}}_U(C) = \widetilde{\mathsf{Q}}_{U\cup J}(C) = \widetilde{\mathsf{Q}}_J(C).$$

显然, 公式 (3) 在代数 $\mathscr{C}_T$ 上确定了有限可加集函数, 并且对任意的 $U \in F(T)$ 有 $\mathsf{Q}(\mathsf{S}_T) = \widetilde{\mathsf{Q}}_U(\mathsf{S}_U) = 1$.

如果我们证明了在 $\mathscr{C}_T$ 上 Q 的**可数可加性**, 则根据 Caratheodory 定理, 测度 Q 唯一地扩张到 $\sigma\{\mathscr{C}_T\}$ 上的测度, 即在 $\mathscr{B}_T$ 上的测度 (根据第一章定理 6).

C. 众所周知, 在集代数 $\mathscr{C}_T$ 上 Q 的可数可加性等价于它的有限可加性及连续性 (在 "零点"$\varnothing$). 从而, 只需证明在 $\mathscr{C}_T$ 上 Q 的**连续性**, 即如果 $n \to \infty, C_n \downarrow \varnothing (C_n \in \mathscr{C}_T, C_{n+1} \subset C_n, n \in \mathbb{N}, \bigcap\limits_n C_n = \varnothing)$, 则 $\mathsf{Q}(C_n) \to 0$. 注意, 要验证测度的连续性是在 $\mathscr{C}_T$ 上, 而不是在产生这个代数的 "矩形" 半环上.

设 $C_n \in \mathscr{B}_{T,J_n}$, 这里 $J_n \in F(T), n \in \mathbb{N}$. 不失一般性, 可以认为 $J_n \subset J_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. 假设对某个 $\varepsilon_0 > 0$ 有 $\mathsf{Q}(C_n) \geqslant \varepsilon_0$ 对所有足够大的 n (因为 $C_{n+1} \subset C_n$, 即对所有的 $n \in \mathbb{N}$). 可以证明这个结果与条件 $C_n \downarrow \varnothing (n \to \infty)$ 矛盾.

这个结果的证明还要分为几步.

D. 首先设 $\mathsf{S}_t = [0,1], \mathscr{B}_t = \mathscr{B}([0,1])$ 和 $\rho_t = \rho$ (欧氏距离) 对所有 $t \in T$. 验证只是对集合 $C_n = \widetilde{B}_n$, 这里 B_n 在 S_{J_n} 中是紧集, $\widetilde{B}_n = \pi_{T,J_n}^{-1} B_n, J_n \in F(T), n \in \mathbb{N}$. 根据第一章引理 11 有 $\mathscr{B}_{J_n} = \mathscr{B}(\mathsf{S}_{J_n})$, 而根据公式 (I.39) 距离 ρ_{J_n} 引入到 S_{J_n} 上. 对任意的 $B_n \in \mathscr{B}_{J_n}$ 根据第一章引理 4, 在距离空间 $(\mathsf{S}_{J_n}, \rho_{J_n})$ 中可以找到闭集 $K_n \subset B_n$ 使得

$$\mathsf{Q}_{J_n}(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_0 2^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

显然, 空间 S_{J_n} 是紧的. 因此 K_n 是在 S_{J_n} 中的紧集. 对每个 n 根据最后的不等式和 (3) 有

$$\mathsf{Q}(\widetilde{B}_n \setminus \widetilde{K}_n) = \mathsf{Q}(\pi_{T,J_n}^{-1}(B_n \setminus K_n)) = \mathsf{Q}_{J_n}(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_0 2^{-n-1}.$$

引入 $L_n = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$, 这里 $H_i = \widetilde{K}_i, i = 1, \cdots, n$, 既然 $L_{n+1} \subset L_n, L_n \subset H_n \subset C_n$, 就有 $L_n \downarrow \varnothing$. 在连续映射下闭集的原像还是闭集. 因此集合 $D_n = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{J_n,J_i}^{-1} K_i$ (基于是柱集 $L_n = \pi_{T,J_n}^{-1} D_n$) 是在空间 S_{J_n} 中是紧的, 它作为闭集与紧集的交集 $K_n \equiv \pi_{J_n,J_n}^{-1} K_n$. 考虑到 $C_n \subset C_i, i = 1, \cdots, n$, 于是有

$$\mathsf{Q}(C_n \setminus L_n) = \mathsf{Q}\left(C_n \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_i\right)\right) = \mathsf{Q}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (C_n \setminus H_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Q}(C_i \setminus H_i) < \varepsilon_0/2.$$

从而, $\varepsilon_0 \leqslant \mathsf{Q}(C_n) = \mathsf{Q}(L_n) + \mathsf{Q}(C_n \setminus L_n) \leqslant \mathsf{Q}(L_n) + \varepsilon_0/2$, 即 $Q(L_n) \geqslant \varepsilon_0/2$, 对所有 $n \in \mathbb{N}$. 因此, $C_n = \pi_{T,J_n}^{-1} B_n$, 其中 B_n 是 S_{J_n} 中的紧集, $J_n \subset J_{n+1}, J_n \in F(T), n \in \mathbb{N}$.

E. 集 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ 在空间 S_U 上定义距离

$$\rho_U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_{J_n}(x_n, y_n)}{1 + \rho_{J_n}(x_n, y_n)}, \tag{4}$$

这里 $x_n = x|_{J_n}, y_n = y|_{J_n}, n \in \mathbb{N}$.

回顾第一章引理 11 的证明, 可以看出距离空间 (S_U, ρ_U) 是 Polish 空间, 并且柱集 $\mathscr{B}_U \sigma-$ 代数与 Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathsf{S}_U)$ 相重合. 除此之外, S_U 是紧的.

集合

$$C'_n = \pi_{U,J_n}^{-1} B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

在距离空间 (S_U, ρ_U) 中作为紧集的闭子集是紧集.

注意, $C_n = \pi_{T,J_n}^{-1} B_n = \pi_{T,U}^{-1} \pi_{U,J_n}^{-1} B_n = \pi_{T,U}^{-1} C'_n, n \in \mathbb{N}$. 因为 $C_n \subset C_m$, 当 $n \geqslant m$, 则 $C'_n \subset C'_m$, 当 $n \geqslant m$. 除此之外, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \pi_{T,U}^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n\right)$.

在完备空间中, 一个包含一个的紧集的交集是非空的. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n \neq \varnothing$. 从而 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$ ($\pi_{T,U}$ 将 S_T 映射到 S_U 上), 导致与假设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$ 矛盾.

F. 现在假设 $\mathsf{S}_t \in \mathscr{B}([0,1]), \mathscr{B}_t = \mathsf{S}_t \bigcap \mathscr{B}([0,1])$ 对某一个 $t \in T, \mathsf{S}_t \neq [0,1]$.

设 $L_t = [0,1], t \in T$. 对 $J \in F(T)$ 在 $\mathscr{B}(L_J)$, 其中 $L_J = \prod_{t \in J} L_t$ 上, 引入测度

$$\widehat{\mathsf{Q}}_J(B) = \mathsf{Q}_J(B \bigcap \mathsf{S}_J), \quad B \in \mathscr{B}(L_J). \tag{5}$$

考虑到 (I.44), 容易验证测度 $\widehat{\mathsf{Q}}_J(J \in F(T))$ 是相容的. 利用这一点和 D 的结论, 可以看出在空间 $(L_T, \mathscr{L}_T)$ 上, 这里 $\mathscr{L}_T = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{L}_t, \mathscr{L}_t = \mathscr{B}([0,1])$ 存在测度 $\widehat{\mathsf{Q}}$, 并且在空间 $(L_J, \mathscr{B}(L_J)), J \in F(T)$ 上具有投影 $\widehat{\mathsf{Q}}_J$.

假如作为已知测度 Q 而是在集合 S_T 上压缩的 $\widehat{\mathsf{Q}}$. 既然 T 是不可数的, 集 S_T 不包含在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{L}_T$ 中, 而在其上定义了测度 $\widehat{\mathsf{Q}}$, 上述就不会有那样的结果. 因此, 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上, 这里 $\Omega = L_T, \mathscr{F} = \mathscr{L}_T, \mathsf{P} = \widehat{\mathsf{Q}}$, 取随机过程 $\widehat{X}(t,\omega) = \omega(t)$ (见 (I.42)), 具有分布 $\mathsf{P}_{\widehat{X}} = \mathsf{P}$.

如果 $\mathsf{S}_t \neq [0,1]$, 则取点 $a_t \in \mathsf{S}_t(\mathsf{S}_t \neq \varnothing)$ 并在 $T \times \Omega$ 引入函数

$$X(t,\omega) = \begin{cases} \widehat{X}(t,\omega) & \text{当 } \widehat{X}(t,\omega) \in \mathsf{S}_t, \\ a_t & \text{当 } \widehat{X}(t,\omega) \notin \mathsf{S}_t. \end{cases}$$

根据 $X = \{X(t), t \in T\}$ 的构造, 它是一个在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上随机过程. 并且 $X(t,\omega) \in \mathsf{S}_t$ 对所有的 $t \in T$ 和 $\omega \in \Omega(X(t,\cdot) \in \mathscr{F}|\mathscr{B}_t$ 对每一个 $t \in T)$.

显然, 对每个 $t \in T$

$$\{\omega : X(t,\omega) \neq \widehat{X}(t,\omega)\} = \{\omega : \omega(t) \in [0,1] \setminus \mathsf{S}_t\} = C_t. \tag{6}$$

由于 (5) 对简单柱集 C_t 有

$$\mathsf{P}(C_t) = \widehat{\mathsf{Q}}(C_t) = \mathsf{Q}_{\{t\}}(\{[0,1] \setminus \mathsf{S}_t\} \textstyle\bigcap \mathsf{S}_t) = 0. \tag{7}$$

如同对 (2) 式中的矩形 B_J, 考虑 (5) 式和 (6) 式得到

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} \{X(t_k) \in B_{t_k}\}\right) &= \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{\widehat{X}(t_k) \in B_{t_k}\}\right) \\ &= \mathsf{P}_{\widehat{X}} \pi_{T,J}^{-1}(B_J) = \widehat{\mathsf{Q}}_J(B_J) = \mathsf{Q}_J(B_J). \end{aligned}$$

因此, $\mathsf{Q} = \mathsf{P}_X$ 是在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_T = \bigotimes_{t\in T} \mathscr{B}_t$ 上的已知的测度.

G. 为了对任意的 Borel 空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 成立, 我们要解释一下在证明中应有什么样的改变.

引理 1. 设 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 和 $(\Gamma_t, \mathscr{A}_t)_{t\in T}$ 是一族可测空间, 且对每一个 $t \in T$ 有 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t) \sim (\Gamma_t, \mathscr{A}_t)$. 这时 $(\mathsf{S}_U, \mathscr{B}_U) \sim (\Gamma_U, \mathscr{A}_U)$. 对任意的 $U \subset T$, 这里 $\mathscr{B}_U$ 和 $\mathscr{A}_U$ 是相应的由 S_U 和 Γ_U 的子集生成的柱 $\sigma-$ 代数 (“$\sim$” 表示可测空间同构).

证. 设映射 $h_t : \mathsf{S}_t \to \Gamma_t$ 对 $t \in T$ 是空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)$ 与空间 $(\Gamma_t, \mathscr{A}_t)$ 的同构. 对 $U \subset T$ 引入映射 $h_U : \mathsf{S}_U \to \Gamma_U$, 假设对 $x_U = \{x(t), t \in U\} \in \mathsf{S}_U$,

$$h_U x_U = y_U, \quad \text{其中} \quad y_U = \{y(t), t \in U\}, \ y(t) = h_t(x(t)) \in \Gamma_t, \ t \in U.$$

这时在 Γ_U 中的简单柱集的原像是在 S_U 中的简单柱集, 由于第一章推论 1, 因此有 $h_U \in \mathscr{B}_U|\mathscr{A}_U$. 显然, h_U 是由 S_U 到 Γ_U 上的一一映射. 同时说明了 $h_U^{-1} \in \mathscr{A}_U|\mathscr{B}_U$. □

如果满足引理 1 的条件, 并且在空间 $(\mathsf{S}_U, \mathscr{B}_U)$ 上给出相容的测度 $\mathsf{Q}_U(U \in F(T))$, 则容易验证在空间 $(\Gamma_U, \mathscr{A}_U)$ 上产生相容的测度 $\mathsf{P}_U = \mathsf{Q}_U h_U^{-1}$ (换句话说, 对 $V \subset U \subset T(U \in F(T))$ 有 $\mathsf{P}_V = \mathsf{P}_U \Pi_{U,V}^{-1}$), 这里对空间族 $(\Gamma_t, \mathscr{A}_t)_{t\in T}$ 的"投影" $\Pi_{U,V}$ 和对空间 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 的映射 $\pi_{U,V}$ 具有相同的意义.

假设在空间 $(\Gamma_T, \mathscr{A}_T)$ 上已经构造出对 $U \in F(T)$ 具有在空间 $(\Gamma_U, \mathscr{A}_U)$, 上给定投影的测度 P_U 的 P. 这时易信, 在 $(\mathsf{S}_T, \mathscr{B}_T)$ 上测度 $\mathsf{Q} = \mathsf{P}h_T$(即 $\mathsf{Q} = \mathsf{P}(h_T^{-1})^{-1}$) 具有在 $(\mathsf{S}_U, \mathscr{B}_U), U \in F(T)$ 上的投影 Q_U.

这样, 不失一般性可以认为 S_t 是区间 $[0,1]$ 上的 Borel 子集, 且对每一个 $t \in T, \mathscr{B}_t = \mathsf{S}_t \bigcap \mathscr{B}([0,1])$, 从而导致 E, F 的情况.

这样 Kolmogorov 定理完全证明了. □

下面的结果将解释, 为什么在第一章定义 8 中考虑的是区间 $[0,1]$ 上 Borel 子集, 而不是区间 $[0,1]$ 本身. 为此, 我们引入两点集 $\mathsf{S} = \{0,1\}$ 并且引入离散距离 $\nu(\nu(x,y) = 0$, 当 $x = y; \nu(x,y) = 1$, 当 $x \neq y)$ 将其生成 Polish 空间. 设 $\mathsf{K} = \mathsf{S}^{\mathbb{N}}$ 并且类似 (4) 式中在 K 上引入的距离.

定理 1 (参见 [15; p.98]). *设可测空间 $(\mathsf{S}, \mathscr{B})$ 与某个 Polish 空间 (带有由其 Borel 子集所构成的 $\sigma-$ 代数) 中的 Borel 子集同构, 这时*

$$(\mathsf{S}, \mathscr{B}) \sim \begin{cases} (K, \mathscr{B}(\mathsf{K})), & \text{如果 S 是不可数的,} \\ (\mathbb{N}, \mathscr{A}(\mathbb{N})), & \text{如果 S 是可数的;} \\ ((1, \cdots, |\mathsf{S}|), \mathscr{A}(1, \cdots, |\mathsf{S}|)), & \text{如果 S 是有限的,} \end{cases}$$

这里 $\mathscr{A}(M)$ 是集 M 的所有子集组成的 $\sigma-$ 代数, $|\cdot|$ 是有限集元素的个数.

对 Kolmogorov 定理还需作些注释, 对 Polish 空间组 $(\mathsf{S}_t, \mathscr{B}_t)_{t\in T}$ 这个定理的证明是建立在泛函分析的重要结果 (Stone – Weiestrass, 里奇 (M. Ricci)– Markov) 上, 可参见 [101]. 关键的思想在于测度伴随着线性泛函, 这样给后续工作带来成功. 除此之外, 利用第一章定理 6, 允许指标是可数子集族 $U \subset T$ 的相容测度 Q_U 构造的限制是如下面习题所示.

1. 设 Q_U 是在空间 $(\mathsf{S}_U, \mathscr{B}_U)$ 上的测度, 对给定的有限或可数集 $U \subset T$ (对有限 U, 测度 Q_U 一开始给出了). 设对所有有限或可数 $V, U \subset T(V \subset U \subset T)$ 满足相容性条件 (I.43). 根据第一章定理 6, 对每一个 $B \in \mathscr{B}_T$ 都可以找到集 $U = U(B) \in N(T)$, 使得 $B \in \mathscr{B}_{T,U}$ (也就是 $B = \pi_{T,U}^{-1} B_U$ 这里 $B_U \in \mathscr{B}_U$), 并且定义函数 Q, 设

$$\mathsf{Q}(B) = \mathsf{Q}_U(B_U). \tag{8}$$

证明 (8) 具体地给出了 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}_T$ 上的测度.

这一节的最后, 回顾著名的 Ionescu 定理 (参见 [85; 第 1 卷, p.318]) 对在任意可测的乘积空间上, 可以构造具有给定的联合分布 (由概率核族所确定的) 的随机元素序列.

附录 2
普罗霍洛夫定理的证明

A. 设 $\{\mathsf{P}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上胎紧的测度族, 这里 S 是距离空间. 证明这一族是弱相对紧.

如果 S 是紧空间, 则 $C(\mathsf{S}) = C_b(\mathsf{S})$, 并且概率的弱收敛等于在共轭空间 $C^*(\mathsf{S})$ 上弱 *– 拓扑的收敛. 这时, 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上概率的全体 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 是在空间 $C^*(\mathsf{S})$ 上单位球的弱 *– 闭子集, 众所周知, 单位球是在弱 *– 拓扑下紧的. 因此, $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 同样是在弱 *– 拓扑下紧的, 看作闭集与紧集的交. 这就完成了第五章定理 6 对紧空间 S 第一个结论的证明.

现在较详细解释. 根据里斯 (Riesz) – Markov 定理 (例如参见 [60; 第 1 卷, p.124]) 每一个在 $C(\mathsf{S})$ 上的连续线性泛函 F, 即 $F \in C^*(\mathsf{S})$ 唯一地表示成如下的形式

$$F(f) = \langle f, \mathsf{Q}\rangle = \int_{\mathsf{S}} f(x)\mathsf{Q}(dx), \quad f \in C(\mathsf{S}),$$

这里 Q 是 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的分布, 也就是 $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}^+ - \mathsf{Q}^-$, 其中 Q^+ 和 Q^- 是 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的有限测度, 而 $\langle f, \mathsf{Q}\rangle = \langle f, \mathsf{Q}^+\rangle - \langle f, \mathsf{Q}^-\rangle$. 泛函 F 与元素 Q 相互决定. 除此之外,

$$\mathscr{P}(\mathsf{S}) = \{\mathsf{Q} \in C^*(\mathsf{S}) : \langle f, \mathsf{Q}\rangle \geqslant 0, \quad \text{对} \quad f \geqslant 0, f \in C(\mathsf{S}) \quad \text{和} \quad \langle \bar{1}, \mathsf{Q}\rangle = 1\}, \qquad (1)$$

这里 $\bar{1}$ 是在集合 S 上等于 1 的函数, 换句话说, $\bar{1} = 1_{\mathsf{S}}$. 对 $F \in C^*(\mathsf{S})$ 有

$$\|F\|_{C^*(\mathsf{S})} := \sup\{|F(f)| : f \in C(\mathsf{S}),\ \sup_{x\in\mathsf{S}} |f(x)| \leqslant 1\}. \qquad (2)$$

显然, 对 $\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathsf{S})$ 和 $f \in C(\mathsf{S})$ 有

$$|\langle f, \mathsf{Q}\rangle| \leqslant \sup_{x\in\mathsf{S}} |f(x)| \langle \bar{1}, \mathsf{Q}\rangle \leqslant \sup_{x\in\mathsf{S}} |f(x)|,$$

因此, $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 是在 $C^*(\mathsf{S})$ 中单位球的子集, 即球

$$B = \{F \in C^*(\mathsf{S}) : \|F\|_{C^*(\mathsf{S})} \leqslant 1\}.$$

验证 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 是 *– 闭的. 假设 Q_α 在空间 $C^*(\mathsf{S})$ 中弱 *– 收敛于某个元素 Q, 即

$$\langle f, \mathsf{Q}_\alpha\rangle \to \langle f, \mathsf{Q}\rangle \quad \text{对任意 } f \in C(\mathsf{S}), \tag{3}$$

这里指标 α 取遍某个方向集. 这时 Q 具有在 (1) 式里 $\mathscr{P}(\mathsf{S})$ 中测度的性质. 特别强调, 根据 (2) 式中范数所取的球 B, 但是它的紧性 (Banach – Alaoglu 定理, 参见 [60; 第 1 卷, p.133]) 的成立不是按这个范数, 而是按弱 *– 拓扑意义下的. 这样, 对紧空间 S 结论 A 已经证毕.

一般情况可以导致到已经研究的情况. 设 S 是 σ– 紧空间, 也就是 $\mathsf{S} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathsf{S}_m$, 这里 S_m 是紧的 ($m \in \mathbb{N}$). 这时, S 是可分的, 并且同构于紧空间 $V = [0,1]^{\mathbb{N}}$ 中的 Borel 子集 M (参见 [101; p.2]). 由于第五章定理 2, 在连续映射下保持着测度的弱收敛性. 显然, 也对胎紧性. 因此, 可以认为在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S})) = (M, \mathscr{B}(M))$ 上给定的测度族 $\mathsf{P}_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ 扩张到 $(V, \mathscr{B}(V))$ 上胎紧的测度族 Q_α, 根据公式

$$\mathsf{Q}_\alpha(A) := \mathsf{P}_\alpha(A \bigcap M), \quad A \in \mathscr{B}(V), \quad \alpha \in \Lambda. \tag{4}$$

所确定. 这时, 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S}) \subset \mathscr{B}(V)$ 上有 $\mathsf{Q}_\alpha = \mathsf{P}_\alpha$. 根据所证, 由包含在族 $\{\mathsf{Q}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 中任意的序列测度 Q_n(Q_n 代替写成 Q_{α_n}), 可以取出子列 Q_{n_j} 使得

$$\mathsf{Q}_{n_j} \Rightarrow \mathsf{Q}, \quad j \to \infty,$$

这里 Q 是在 $(V, \mathscr{B}(V))$ 上的某个 (概率) 测度. 验证当 $j \to \infty$ 时有 $\mathsf{P}_{n_j} \Rightarrow \mathsf{P}$ (P_n 代替写成 P_{α_n}), 这里 $\mathsf{P} = \mathsf{Q}|_{\mathscr{B}(\mathsf{S})}$ 即测度 Q 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S})$ 上的压缩. 对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 在 S 中可以找到紧集 K_m 使得对所有 $\alpha \in \Lambda$ 有

$$\mathsf{P}_\alpha(K_m) > 1 - 1/m. \tag{5}$$

这时, 根据第五章定理 1, 考虑到 $\mathscr{B}(\mathsf{S}) \subset \mathscr{B}(V)$ 对任意的 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\mathsf{Q}(\mathsf{S}) \geqslant \mathsf{Q}(K_m) \geqslant \limsup_{j\to\infty} \mathsf{Q}_{n_j}(K_m) = \limsup_{j} \mathsf{P}_{n_j}(K_m) \geqslant 1 - 1/m.$$

因而, $\mathsf{Q}(\mathsf{S}) = 1$ 意味着 $\mathsf{P}(\mathsf{S}) = 1$. 除此之外, 对任意的闭集 $F \subset \mathsf{S}$, 重新利用第五章定理 1 得到

$$\limsup_{j} \mathsf{P}_{n_j}(F) = \limsup_{j} \mathsf{Q}_{n_j}(F) \leqslant \mathsf{Q}(F) = \mathsf{P}(F),$$

由此可得, 在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上, 当 $j \to \infty$ 时有 $\mathsf{P}_{n_j} \Rightarrow \mathsf{P}$.

研究任意的距离空间 S 和 $\mathsf{S}_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$, 这里 K_m 如 (5) 式中所取的. 这时, 对任意的 $\alpha \in \Lambda$ 有 $\mathsf{P}_\alpha(\mathsf{S}_0) = 1$. 这样, $\{\widetilde{\mathsf{P}}_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是在 $\sigma-$ 紧空间 $(\mathsf{S}_0, \mathscr{B}(\mathsf{S}_0))$ 上一胎紧的测度族, 这里 $\widetilde{\mathsf{P}}_\alpha$ 表示测度 P_α 在 $\mathscr{B}(\mathsf{S}_0)$ 上的压缩. 根据已经证明的, 从族 $\{\widetilde{\mathsf{P}}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中的任意测度序列 $\widetilde{\mathsf{P}}_n$ (即 $\widetilde{\mathsf{P}}_{\alpha_n}$) 可以取出子序列 $\widetilde{\mathsf{P}}_{n_j}$ 使得当 $j \to \infty$ 有 $\widetilde{\mathsf{P}}_{n_j} \Rightarrow \widetilde{\mathsf{P}}$, 这里 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 是在 $(\mathsf{S}_0, \mathscr{B}(\mathsf{S}_0))$ 上的某个 (概率) 测度.

类似 (4) 式中在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上引入测度 P, 设

$$\mathsf{P}(A) := \widetilde{\mathsf{P}}(A \bigcap \mathsf{S}_0), \quad A \in \mathscr{B}(\mathsf{S}).$$

注意到 $\mathsf{P}(\mathsf{S} \setminus \mathsf{S}_0) = 0$ 和 $\mathsf{P}_\alpha(\mathsf{S} \setminus \mathsf{S}_0) = 0, \alpha \in \Lambda$. 因此, 对任意的函数 $f \in C_b(\mathsf{S})$ 和所有的 $\alpha \in \Lambda$ 有

$$\int_{\mathsf{S}} f d\mathsf{P}_\alpha = \int_{\mathsf{S}_0} f\Big|_{\mathsf{S}_0} d\widetilde{\mathsf{P}}_\alpha, \quad \int_{\mathsf{S}} f d\mathsf{P} = \int_{\mathsf{S}_0} f\Big|_{\mathsf{S}_0} d\widetilde{\mathsf{P}},$$

这里 $f\big|_{\mathsf{S}_0} \in C_b(\mathsf{S}_0)$. 这样, 当 $j \to \infty$ 有 $\mathsf{P}_{n_j} \Rightarrow \mathsf{P}$. 结论 A 证毕.

B. 现在证明, 如果 S 是带有距离 ρ 的 Polish 空间, 则测度族 $\{\mathsf{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 相对紧是胎紧的.

由第五章引理 6 可以看出, 如果对任意的 $\varepsilon, \delta > 0$ 可以找到有限个开球 $V_\delta(y_m) = \{x \in \mathsf{S} : \rho(x, y_m) < \delta\}, m = 1, \cdots, N$ (N 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 依赖于 ε, δ) 使得

$$\mathsf{P}_\alpha\left(\bigcup_{m=1}^{N} V_\delta(y_m)\right) > 1 - \varepsilon, \text{ 对任意的 } \alpha \in \Lambda, \tag{6}$$

则族 $\{\mathsf{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是胎紧的.

说明如果条件 (6) 不满足, 则导致与 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 弱相对紧矛盾. 由于 S 的可分性, 对任意 $\delta > 0$ 可以找到这个空间的开球复盖 $V_\delta(y_m)$ 这里 $y_m \in \mathsf{S}, m \in \mathbb{N}$. 不满足 (6) 式于是存在 $\varepsilon, \delta > 0$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 可以找到测度 P_n (即测度 P_{α_n}), 有

$$\mathsf{P}_n(C_n) \leqslant 1 - \varepsilon, \text{ 其中 } C_n = \bigcup_{m=1}^{n} V_\delta(y_m). \tag{7}$$

设选取子序列 $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ 使得当 $n' \to \infty$ 有 $\mathsf{P}_{n'} \Rightarrow \mathsf{P}$, P 是某个在 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上的测度. 集 C_j 是开的, 因此根据第五章定理 1 有

$$\mathsf{P}(C_j) \leqslant \liminf_{n'\to\infty} \mathsf{P}_{n'}(C_j), \quad \text{对每个 } j \in \mathbb{N}.$$

注意到 $C_j \subset C_{n'}$, 当 $n' \geqslant j$, 考虑到 (7) 式, 得

$$\mathsf{P}(C_j) \leqslant \liminf_{n'\to\infty} \mathsf{P}_{n'}(C_{n'}) \leqslant 1 - \varepsilon,$$

从而与 $\lim_{j\to\infty} \mathsf{P}(C_j) = \mathsf{P}(\mathsf{S}) = 1$ 矛盾. 这样结论 B 证毕. □

注 1. 最初的普罗霍洛夫 (Prokhorov) 定理是在 Polish 空间中给出测度族相对紧的充分必要条件形式. 充分性 (即测度族的胎紧性保证它的相对紧性) 对任意的距离空间成立是由 Varadhan 所建立. 这个结果的证明不是靠 Ricci – Markov 定理 (这在前面比 [11] 中较详细的讨论), 而是利用对 $\sigma-$ 紧空间的归纳法, 然后对 $\mathbb{R}^\infty$ 空间, 之后对 $\mathbb{R}^k$ (用黑利 (E. Helly) 定理和 Kolmogorov 关于相容分布的定理), 参见 [2] p.58~62.

附录 3
林德伯格 – 杜布定理的证明

这一节将给出多维林德伯格 (Lindeberg) 定理 (第五章定理 9) 和杜布 (Doob) 定理 (第五章定理 13) 的证明. 除此之外, 给出一些关于取值于 k – 维欧氏空间随机向量弱收敛的辅助结果和习题.

§1. Lindeberg 定理的证明

A. 根据 (V.17) 的条件矩阵 B^2 可以看作是对称和非负定的矩阵的, 且具有该性质的极限. 因而, 可以研究分布 $\mathsf{N}(0,B^2)$. 由于第五章定理 13 只要验证, 对每个 $\lambda\in\mathbb{R}^k$ 当 $n\to\infty$ 时有

$$\varphi_{S_n}(\lambda)\to\exp\{-\langle B^2\lambda,\lambda\rangle/2\},\tag{1}$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示具有欧氏范数 $\|\cdot\|$ 的内积, φ_{S_n} 表示随机向量 S_n 的特征函数.

随机变量 $\xi_{n,q},q=1,\cdots,m_n$, 的独立性导致对任意的 $n\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{R}^k$ 有

$$\varphi_{S_n}(\lambda)=\prod_{q=1}^{m_n}\varphi_{\xi_{n,q}}(\lambda).$$

因此, 先分析一下向量 $\xi_{n,q}$ 的特征函数的性质.

B. 利用著名的不等式

$$|\exp\{i\alpha\}-1-i\alpha-\cdots-(i\alpha)^{n-1}/(n-1)!|\leqslant|\alpha|^n/n!,\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{2}$$

对 $n=2$ 和 $n=3$ 运用 (2) 式得到

$$|\exp\{i\alpha\}-1-i\alpha+\alpha^2/2|\leqslant\min\{|\alpha|^2,|\alpha|^3\},\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

再有, 对 $\lambda,x\in\mathbb{R}^k$ 有 $|\langle\lambda,x\rangle|\leqslant\|\lambda\|\|x\|$, 由此可以得出

$$\exp\{i\langle\lambda,x\rangle\}=1+i\langle\lambda,x\rangle-\langle\lambda,x\rangle^2/2+g(\langle\lambda,x\rangle),\tag{3}$$

这里

$$|g(\langle\lambda,x\rangle)| \leqslant C(\lambda)\min\{\|x\|^2,\|x\|^3\}$$

和

$$C(\lambda)=\max\{\|\lambda\|^2,\|\lambda\|^3\}. \tag{4}$$

由 (3) 式, 对所有 $n\in\mathbb{N}, q=1,\cdots,m_n,\lambda\in\mathbb{R}^k$ 有

$$\varphi_{\xi_{n,q}}(\lambda)=\mathsf{E}\exp\{i\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle\}=1-\frac{1}{2}\langle B_{n,q}^2\lambda,\lambda\rangle+\mathsf{E}g(\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle)=1+z_{n,q}(\lambda); \tag{5}$$

由于 (4) 式 $\mathsf{E}g(\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle)$ 是存在的, 并且考虑到

$$\mathsf{E}\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle=\langle\lambda,\mathsf{E}\xi_{n,q}\rangle=0,$$

$$\mathsf{E}\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle^2=\sum_{i,j=1}^{k}\lambda_i\lambda_j\mathsf{E}(\xi_{n,q}^{(i)}\cdot\xi_{n,q}^{(j)})=\langle B_{n,q}^2\lambda,\lambda\rangle.$$

对固定的 $\lambda\in\mathbb{R}^k$ 验证, $|z_{n,q}(\lambda)|<1/2$ 对所有足够大的 n 和任意的 $q=1,\cdots,m_n$.

对矩阵 $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^k$ 设 $\|A\|$ 是它的范数, 就是线性算子范数, 即 $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$. 若 A 是协方差矩阵, 有

$$\|A\|\leqslant c\cdot\mathrm{Tr}A,$$

其中 $c=c(k)>0$, 这里 Tr 是矩阵的迹, 即它的对角线元素之和. 因此

$$|\langle B_{n,q}^2\lambda,\lambda\rangle|\leqslant\|B_{n,q}^2\|\|\lambda\|^2\leqslant c\,\mathrm{Tr}B_{n,q}^2\|\lambda\|^2. \tag{6}$$

对 $n\in\mathbb{N},q=1,\cdots,m_n$ 和任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\mathrm{Tr}B_{n,q}^2=\mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^2=\mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^2\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\|\leqslant\varepsilon\}}+\mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^2\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\|>\varepsilon\}}\leqslant\varepsilon^2+\mathscr{L}_n(\varepsilon),$$

这里 Lindeberg 函数

$$\mathscr{L}_n(\varepsilon)=\sum_{q=1}^{m_n}\mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^2\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\|>\varepsilon\}}.$$

考虑到 Lindeberg 条件 (V.18), 可以看出满足 “渐近无穷小” 条件:

$$\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}\mathrm{Tr}B_{n,q}^2\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}. \tag{7}$$

由 (4) 式 ~(7) 式得到

$$|\mathsf{E}g(\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle)|\leqslant C(\lambda)\mathsf{E}\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle^2.$$

根据 (7) 式, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}|z_{n,q}(\lambda)|\to 0. \tag{8}$$

C. 对 $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, 假设 $\log w = \log|w| + i\arg w$, 这里 $0 \leqslant \arg w < 2\pi$, 众所周知, 对 $z \in \mathbb{C}$ 有

$$\log(1+z) = z + h(z), \quad \text{其中 } |h(z)| \leqslant |z|^2, \quad \text{当 } |z| < 1/2 \text{ 时}. \tag{9}$$

因此, 对任意的 n 和某个 $N(\lambda, n) \in \mathbb{Z}$ 有

$$\log \varphi_{S_n}(\lambda) = \sum_{q=1}^{m_n} \log \varphi_{\xi_{n,q}}(\lambda) + 2\pi i N(\lambda, n). \tag{10}$$

由于 (8) 式 ~(10) 式, 对所有足够大的 n 有

$$\log \varphi_{S_n}(\lambda) = \sum_{q=1}^{m_n} z_{n,q}(\lambda) + \sum_{q=1}^{m_n} h(z_{n,q}(\lambda)) + 2\pi i N(\lambda, n). \tag{11}$$

又由于 (5) 式, 有

$$\sum_{q=1}^{m_n} z_{n,q}(\lambda) = -\frac{1}{2}\langle B_n^2\lambda, \lambda\rangle + \sum_{q=1}^{m_n} \mathsf{E} g(\langle \lambda, \xi_{n,q}\rangle), \tag{12}$$

因为 $B_n^2 = \sum\limits_{q=1}^{m_n} B_{n,q}^2$, 考虑到 (4) 式, 于是, 对所有的 $0 < \varepsilon < 1$ 有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|g(\langle \lambda, \xi_{n,q}\rangle)| &\leqslant \mathsf{E}|g(\langle \lambda, \xi_{n,q}\rangle)|\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\| \leqslant \varepsilon\}} + \mathsf{E}|g(\langle \lambda, \xi_{n,q}\rangle)|\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\}} \\ &\leqslant C(\lambda)\left(\mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^3 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\| \leqslant \varepsilon\}} + \mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\}}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

显然有

$$\mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^3 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\| \leqslant \varepsilon\}} \leqslant \varepsilon \mathsf{E}\|\xi_{n,q}\|^2 = \varepsilon \mathrm{Tr} B_{n,q}^2. \tag{14}$$

由 (13) 式, (14) 式, Lindeberg 条件 (V.18) 和关系式,

$$\sum_{q=1}^{m_n} \mathrm{Tr} B_{n,q}^2 = \mathrm{Tr} B_n^2 \to \mathrm{Tr} B^2, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}$$

得到

$$\sum_{q=1}^{m_n} \mathsf{E}|g(\langle \lambda, \xi_{n,q}\rangle)| \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}. \tag{15}$$

因为, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\langle B_n^2\lambda, \lambda\rangle \to \langle B^2\lambda, \lambda\rangle, \tag{16}$$

根据 (12) 式, (15) 式得到

$$\sum_{q=1}^{m_n} z_{n,q}(\lambda) \to -\frac{1}{2}\langle B^2\lambda, \lambda\rangle, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}, \tag{17}$$

注意, 对所有足够大的 n, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{q=1}^{m_n} h(z_{n,q}(\lambda))\right| &\leqslant \sum_{q=1}^{m_n} |z_{n,q}(\lambda)|^2\\ &\leqslant 2\sum_{q=1}^{m_n}[\langle B_{n,q}^2\lambda,\lambda\rangle^2/4+(\mathsf{E}g(\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle))^2]\\ &\leqslant \frac{1}{2}\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}|\langle B_{n,q}^2\lambda,\lambda\rangle|\langle B_n^2\lambda,\lambda\rangle+2\left(\sum_{q=1}^{m_n}\mathsf{E}|g(\langle\lambda,\xi_{n,q}\rangle)|\right)^2\to 0,\end{aligned}$$

这里, 第一个不等式是根据 (9) 式, 第二个不等式是由在 (5) 式中 $z_{n,q}(\lambda)$ 的定义. 最后, 由关系式 (6),(7),(16) 和 (15) 保证其趋于零.

由 (11) 式,(16) 式, 当 $n\to\infty$ 时得出

$$\varphi_{S_n}(\lambda)=e^{\log\varphi_{S_n}(\lambda)}\to e^{-1/2\langle B^2\lambda,\lambda\rangle}.\qquad\square$$

§**2.**　Lindeberg 定理条件的讨论

事实上, 条件 (V.17) 对给出和的每一项蕴涵着规范. 例如, 如果从某个 n 开始,$B_n^2>0$ (对 $k=1$ 这是自然的要求, 意味着对第 n 个序列不是所有项都是退化的), 则设 $\zeta_{n,q}=B_n^{-1}\xi_{n,q}$ (取 B_n^2 平方根, 并且取逆矩阵) 对 $Z_n=\sum\limits_{q=1}^{m_n}\zeta_{n,q}$ 有

$$\mathsf{D}Z_n=\mathsf{D}(B_n^{-1}S_n)=B_n^{-1}\mathsf{D}S_n(B_n^{-1})^*=I.$$

换句话说, 条件 (V.17) 对量 $\zeta_{n,q}$ 依然成立.

1. 设对任意的 $\varepsilon>0$ 当 $n\to\infty$ 时有

$$\sigma_n^{-2}\sum_{q=1}^{m_n}\mathsf{E}\left(\|\xi_{n,q}\|^2\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\|>\varepsilon\sigma_n\}}\right)\to 0,\tag{18}$$

这里 $\sigma_n^2=\mathrm{Tr}B_n^2>0$, 而向量 $\xi_{n,q}$ 是中心化的. 试证前面引入的随机向量 $\zeta_{n,q}$ 满足 Lindeberg 条件 (V.18). 注意, 当 $k=1$ 时, 一般来说, Lindeberg 定理只是 (18) 式唯一的条件就保证标准化 Z_n 的和收敛到 $\mathsf{N}(0,1)$.

2. 试验证, 如果 $\{X_j,j\in\mathbb{N}\}$ 是空间 $\mathbb{R}^k$ 中具有中值为 0 和协方差阵 B^2 的独立同分布随机向量序列, 则当 $n\to\infty$ 时有

$$n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathsf{N}(0,B^2).$$

3. 试解释, 为什么 Lyapunov 条件: 对某个 $s\in(2,3]$ 当 $n\to\infty$ 时有

$$L_{n,s}=\sum_{j=1}^{m_n}\mathsf{E}\|\xi_{n,j}\|^s\to 0,$$

会导致 Lindeberg 条件.

介绍下面很有意义的一个结果:

引理 1. 设独立中心化随机向量 $\xi_{n,q}, 1 \leqslant q \leqslant m_n, n \in \mathbb{N}$ 序列 (对每个 n), 满足 Lindeberg 条件 (V.18), 如果

$$S_n := \sum_{q=1}^{m_n} \xi_{n,q} \xrightarrow{\mathscr{D}} Y, \tag{19}$$

这里 Y 是某个随机向量, 则 (V.17) 成立并且 $Y \sim \mathsf{N}(0, B^2)$.

证. 设对某个 $i \in \{1, \cdots, k\}$, 序列 $\{b_n^{(i,i)}, n \geqslant 1\}$ 没有极限, 这里 $b_n^{(i,j)}$ 是协方差矩阵 B_n^2 的第 i 行第 j 列的元素. 如果序列 $\{b_n^{(i,i)}\}$ 无界, 则对某个子序列 $\{n'\}$ 当 $n' \to \infty$ 时有 $b_{n'}^{(i,i)} \to \infty$.

根据第五章定理 2, 向量的弱收敛导致子向量 (由已知向量固定坐标组成) 的弱收敛, 因此, 当 $n \to \infty$ 时有

$$S_n^{(i)} \xrightarrow{\mathscr{D}} Y^{(i)}, \tag{20}$$

这里上标 i 表示是向量的第 i 坐标.

可以相信, 当 $n' \to \infty$ 时有

$$S_{n'}^{(i)} \Big/ \sqrt{b_{n'}^{(i,i)}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathsf{N}(0,1), \tag{21}$$

因为对中心化的随机变量 $\xi_{n',q}/\sqrt{b_{n'}^{(i,i)}}, q = 1, \cdots, m_n, n \in \mathbb{N}$ 满足 Lindeberg 条件: 事实上, 对所有足够大的 n', 量 $b_{n'}^{(i,i)} \geqslant 1$, 这时, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 当 $n' \to \infty$ 时有

$$\frac{1}{b_{n'}^{(i,i)}} \sum_{q=1}^{m_{n'}} \mathsf{E}\left(|\xi_{n',q}^{(i)}|^2 \mathbf{1}_{\{|\xi_{n',q}^{(i)}| > \varepsilon\sqrt{b_{n'}^{(i,i)}}\}}\right) \leqslant \sum_{q=1}^{m_{n'}} \mathsf{E}\left(\|\xi_{n',q}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi_{n',q}\| > \varepsilon\}}\right) \to 0,$$

对 $k=1$ 利用了下面简单的事实.

4. 如果在 $\mathbb{R}^k$ 中 $\zeta_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \zeta$, 而数列 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有 $c_n \to 0$ 则 $c_n \zeta_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 (n \to \infty)$.

因为当 $n' \to \infty$ 时 $1/\sqrt{b_{n'}^{(i,i)}} \to 0$, 则可以看出同时满足 (20) 式和 (21) 式是不可能的. 导致矛盾, 因而序列 $\{b_n^{(i,i)}, n \geqslant 1\}$ 不可能无界.

如果序列 $\{b_n^{(i,i)}\}$ 有界, 但无极限, 则可以找到子序列 $\{n'\}$ 和 $\{n''\}$, 使得 $b_{n'}^{(i,i)} \to b'$ 和 $b_{n''}^{(i,i)} \to b''$ 并且 $b' \neq b''$ 这时, 由于第五章定理 9, 有 $S_{n'}^{(i)} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathsf{N}(0, b')$ 和 $S_{n''}^{(i)} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathsf{N}(0, b'')$. 但是由于弱收敛的极限是唯一的 (第五章引理 1) 这是不可能的. 这样就证明了, 对每一个 $i = 1, \cdots, k$ 序列 $\{b_n^{(i,i)}\}_{n \geqslant 1}$ 有极限.

根据 Cauchy – Bunyakovskii – Schwarz 不等式 $|b_n^{(i,j)}| \leqslant \sqrt{b_n^{(i,i)} b_n^{(j,j)}}$, 因此, 前面讨论的告诉我们, 对任意的 $i \neq j (i, j \in \{1, \cdots, k\}), \{b_n^{(i,j)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有界. 研究二维向量 $(S_n^{(i)}, S_n^{(j)})$ 如果假设对无论什么 $b_n^{(i,j)}$, 当 $n \to \infty$ 时对任意的 $i \neq j$ 不存在极限, 则

同样导致与第五章引理 1 矛盾 (由已知向量 $\xi_{n,q}$ 部分坐标组成的向量 $\xi_{n,q}$ 同样满足 Lindeberg 条件).

这样, 定理的条件导致关系式 (V.17). 由于第五章定理 8, 有 $Y \sim \mathsf{N}(0, B^2)$. □

5. 试举例说明, (对 $k = 1$) 如果独立中心化向量序列满足中心极限定理, 即有 (19) 式, $Y \sim \mathsf{N}(0, B^2)$, 但不满足 Lindeberg 条件, 则关系式 (V.17) 不一定正确.

§3. 下面的结果解释, 对中心极限定理的成立, Lindeberg 条件必要性意义的所在.

定理 1 (费勒 (Feller)). 设 $\xi_{n,q}, 1 \leqslant q \leqslant m_n, n \in \mathbb{N}$, 是在 $\mathbb{R}^k$ 中满足条件 (V.17) 的独立 (在第 n 序列中) 中心化向量. 如果中心极限定理成立, 即有关系式 (V.19), 且同时, 满足条件 (7), 则 Lindeberg 条件 (V.18) 成立. 这样, 上述序列满足 Lindeberg 条件等价于中心极限定理和公式 (7) 中和的各项具有 "渐近无穷小" 条件同时成立.

对 ($k = 1$) 一维的情况在 [85; 第 1 卷, p.427] 中有更广泛意义下定理的证明. 可是下面的习题起着关键的作用.

6. 设 ξ 是 $\mathbb{R}^k$ 中具有协方差矩阵 C 的中心化的随机向量. 这时, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 有下面的不等式成立:

$$\mathsf{E}(\|\xi\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi\| > \varepsilon\}}) \leqslant \varepsilon^2 (\mathrm{Re}\varphi(\lambda) - 1 - \langle C\lambda, \lambda\rangle/2),$$

这里 φ 是 ξ 的特征函数, 且 $\lambda = \lambda(\varepsilon) = (0, \cdots, \sqrt{6k}/\varepsilon, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k$, 而唯一不等于零 λ 的坐标是指标 $j_0 = j_0(\varepsilon)$, 使得

$$\mathsf{E}(\xi_{j_0}^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi\| > \varepsilon\}}) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathsf{E}(\xi_j^2 \mathbf{1}_{\{\|\xi\| > \varepsilon\}}).$$

§4. Doob 定理的证明 (第五章定理 14)

还要有一些辅助的结果. 引入取值于 $\mathbb{R}^k$ 随机向量 $\xi_{n,q} (1 \leqslant q \leqslant m_n, n \in \mathbb{N})$ 具有 "无穷小" 条件: 当 $n \to \infty$ 时有

$$\max_{1 \leqslant q \leqslant m_n} \|\xi_{n,q}\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{22}$$

引理 2. 对独立 (对每个 n) 随机向量序列 $\xi_{n,q}$, 具有条件 (22) 式等价于, 对每个 $\varepsilon > 0$ 当 $n \to \infty$ 时有

$$\sum_{q=1}^{m_n} \mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon) \to 0. \tag{23}$$

证. 对任意 $\varepsilon > 0$ 和所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\max_{1 \leqslant q \leqslant m_n} \mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon) \leqslant \mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant q \leqslant m_n} \|\xi_{n,q}\| > \varepsilon\right) \leqslant \sum_{q=1}^{m_n} \mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon). \tag{24}$$

从而, 由 (23) 式导出 (22) 式.

由于 $\xi_{n,q}, q=1,\cdots,m_n$ 独立的

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}\|\xi_{n,q}\|>\varepsilon\right)=1-\prod_{q=1}^{m_n}(1-\mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\|>\varepsilon)).$$

注意到, 对 $a_{n,q}\in\mathbb{R}, 1\leqslant q\leqslant m_n, n\in\mathbb{N}$, 如果 $\max\limits_{1\leqslant q\leqslant m_n}|a_{n,q}|\to 0$, 则

$$\prod_{q=1}^{m_n}(1+a_{n,q})\to 1\Leftrightarrow\sum_{q=1}^{m_n}a_{n,q}\to 0\quad(n\to\infty).$$

因此由 (22) 式得出 (23) 式. □

引理 3. 设对独立随机向量序列 $\xi_{n,q}$ 满足条件 (22) 且设对一些常数 $c>0$ 有

$$\|\xi_{n,q}\|\leqslant C\ \text{ a.s.},\quad q=1,\cdots,m_n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{25}$$

这时, 中心化随机向量序列 $\eta_{n,q}=\xi_{n,q}-\mathsf{E}\xi_{n,q}, 1\leqslant q\leqslant m_n, n\in\mathbb{N}$ 满足 Lindeberg 条件 (V.17).

证. 对任意的 $\nu>0$, 考虑到 (25) 式有

$$\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}\|\mathsf{E}\xi_{n,q}\|\leqslant\nu+c\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}\mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\|>\nu).$$

由此可得, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\max_{1\leqslant q\leqslant m_n}\|\mathsf{E}\xi_{n,q}\|\to 0. \tag{26}$$

根据引理 2, 同时由于 (25) 式和 (26) 式, 对每个 $\varepsilon>0$ 和所有足够大的 n 有

$$\sum_{q=1}^{m_n}\mathsf{E}(\|\eta_{n,q}\|^2\mathbf{1}_{\{\|\eta_{n,q}\|>\varepsilon\}})\leqslant(2c)^2\sum_{q=1}^{m_n}\mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\|>\varepsilon/2)\to 0\quad(n\to\infty).\quad\square \tag{27}$$

引理 4. 设取值于 $\mathbb{R}^k$ 的独立 (对每个 n) 随机向量序列 $\xi_{n,q}(1\leqslant q\leqslant m_n, n\in\mathbb{N})$ 满足条件 (22). 如果具有关系式 (19), 则有某个向量 a 和某个矩阵 B^2 有 $Y\sim\mathsf{N}(0,B^2)$.

证. 设 $\overline{\xi}_{n,q}=\xi_{n,q}\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\|\leqslant c\}}$ 其中 $c>0$. 由条件 (22) 得到, 对每个 $c>0$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\sum_{q=1}^{m_n}\xi_{n,q}\mathbf{1}_{\{\|\xi_{n,q}\|>c\}}\xrightarrow{\mathsf{P}}0,$$

因此只需要验证, 当 $n\to\infty$ 时有 $\sum\limits_{q=1}^{m_n}\overline{\xi}_{n,q}\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathsf{N}(a,B^2)$, 正如下面的习题所示 (当 $\mathsf{S}=\mathbb{R}$ 和 $y=0$).

7. 设 $\zeta, \zeta_n, \eta_n, n \in \mathbb{N}$ 是在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上取值于可分距离向量空间 (S, ρ) 的随机元. 假设当 $n \to \infty$ 时有 $\zeta_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \zeta$ 和 $\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} y$, 其中点 $y \in \mathsf{S}$ ($\eta_n \xrightarrow{\mathsf{P}} y$ 意味着当 $n \to \infty$ 时有 $\rho(\eta_n, y) \to 0$). 则当 $n \to \infty$ 时有 $\zeta_n + \eta_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \zeta + y$.

这样, 回到 $\xi_{n,q}$ 上, 很容易看出, 给出的向量对某些 $c > 0$ 满足条件 (25).

利用非常有用的对称化方法, 也就是: 研究对称向量 $\widetilde{\xi}_{n,q} = \xi'_{n,q} - \xi''_{n,q}$, 其中

$$\mathrm{Law}(\xi'_{n,q}) = \mathrm{Law}(\xi''_{n,q}) = \mathrm{Law}(\xi_{n,q}),$$

且 $\xi'_{n,q}, \xi''_{n,q}, 1 \leqslant q \leqslant m_n$ 是独立的 ($n \in \mathbb{N}$). 于是当 $n \to \infty$ 时有 $\widetilde{S}_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \widetilde{Y}$. 其中 $\widetilde{S}_n, \widetilde{Y}$ 是 S_n 和 Y 的对称向量. 这样对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\mathsf{P}(\|\widetilde{\xi}_{n,q}\| > \varepsilon) \leqslant 2\mathsf{P}(\|\xi_{n,q}\| > \varepsilon/2).$$

根据引理 2, 可以看出 $\widetilde{\xi}_{n,q}$ 同样满足 "无穷小" 条件: 当 $n \to \infty$ 时有

$$\max_{1 \leqslant q \leqslant m_n} \|\widetilde{\xi}_{n,q}\| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

因此, 根据引理 3 (考虑到, a.s. $\|\widetilde{\xi}_{n,q}\| \leqslant 2c$) 对它们来说同样成立 Lindeberg 条件: 对每个 $\varepsilon > 0$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\sum_{q=1}^{m_n} \mathsf{E}(\|\widetilde{\xi}_{n,q}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\widetilde{\xi}_{n,q}\| > \varepsilon\}}) \to 0.$$

因为向量 $\widetilde{\xi}_{n,q}$ 是中心化的, 则根据引理 1 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{D}\widetilde{S}_n$, 其中 $\mathsf{D}\widetilde{S}_n$ 是 $\widetilde{S}_n$ 的协方差矩阵. 注意, $\mathsf{D}\widetilde{S}_n = 2\mathsf{D}S_n$. 因此, 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{D}S_n = B^2$.

这时根据引理 3 和第五章定理 9, 当 $n \to \infty$ 时有 $S_n - \mathsf{E}S_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathsf{N}(0, B^2)$.

现在利用下面的结果.

8. 设 $\zeta_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \zeta$ 和 $\zeta_n + a_n \to \eta$, 这里 ζ_n, ζ, η 是 $\mathbb{R}^k$ 中随机向量 ($n \in \mathbb{N}$). 这时, 存在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (由于习题 7, 这时 $\zeta + a \overset{\mathscr{D}}{=} \eta$). 于是这样存在 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}S_n$, 也就是证明了引理. □

现在就不难证明 Doob 定理了. 设 $0 \leqslant s < t < \infty$, 将区间 $[s,t]$ 用点 $t_{n,k} = s + k(t-s)/n, k = 0, \cdots, n$, 分割, 显然, $X_t - X_s = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{n,k}$, 这里 $\xi_{n,k} = X(t_{n,k}) - X(t_{n,k-1})$. 轨道的连续性导致 (a.s.) X 在 $[s,t]$ 的一致连续性. 因此, 当 $n \to \infty$ 时 a.s. 有

$$\max_{1 \leqslant q \leqslant n} \|\xi_{n,q}\| \to 0. \tag{28}$$

除此之外, 由于 X 的独立增量, 可以看出对每个 $n, \xi_{n,q}, 1 \leqslant q \leqslant n$ 是独立的. 注意到, 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\mathrm{Law}\left(\sum_{q=1}^{n} \xi_{n,q}\right) = \mathrm{Law}(X_t - X_s).$$

因此, 借助于 (28) 式由引理 4 得到向量 $X_t - X_s$ 是正态的, 从而由于过程 X 是独立增量的, 所以 $Y = \{Y_t = X_t - X_0, t \geqslant 0\}$ 是高斯过程.

为了证明 Doob 定理, 设

$$M_t = \mathsf{E}(X_t - X_0) \quad 和 \quad G_t = \mathsf{D}(X_t - X_0)$$

(因为 $X_t - X_0$ 是高斯向量, 所以存在各阶矩). 这时, 显然, 对 $0 \leqslant s < t < \infty$ 有 $\mathsf{E}(X_t - X_s) = M_t - M_s$, 而由于过程 X 增量的独立性, 得到 $\mathsf{D}(X_t - X_s) = G_t - G_s$. 此外, 还需要一个习题.

9. 设当 $n \to \infty$ 时有 $\zeta_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \zeta$ 其中 ζ_n, ζ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的随机向量, 且 $\zeta_k \sim \mathsf{N}(a_n, C_n)$ 试证, 这时存在 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ (按照每个元素), 且 $\zeta \sim \mathsf{N}(a, C)$.

由此可得, 函数 $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ 和 $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{k^2}$ 是连续的. Doob 定理证毕. □

推论 1. 如果在第五章定理 14 的条件中, 量 X_0 有退化分布, 则过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 本身是高斯的. 如果过程 X 对 $t \in [a, b]$ 满足第五章定理 14 的条件, 则对过程 $\{Y_t = X_t - X_a, t \in [a, b]\}$ 该结论成立.

注 1. 在书 [50] 中, 对实独立随机变量 $\xi_{n,q}(q = 1, \cdots, m_n)$ 研究了当 $n \to \infty$ 时, 和 $S_n = \sum\limits_{q=1}^{m_n} \xi_{n,q}$ 的分布弱收敛性. 它是在和的各项满足比 (22) 式较弱的 "和的各项一致无穷小" 条件, 即对每个 $\varepsilon > 0$ 当 $n \to \infty$ 时有

$$\max_{1 \leqslant q \leqslant m_n} \mathsf{P}(|\xi_{n,q}| > \varepsilon) \to 0. \tag{29}$$

这样, 在 (29) 式条件下, S_n 所有极限分布的类与无穷可分分布类相重合 (包含正态分布). 在 [50; 第四章] 中可以找到 S_n 收敛到给定的无穷可分分布的充分必要条件. 在没有任何一种关于和的各项无穷小条件, 来研究独立随机变量和可以在小册子 [27] 中找到. 在 [157] 中研究了取值于 Banach 空间随机元和的行为.

附录 4
博赫纳 – 辛钦定理的证明

如果 $R(0)=0$ 则对 $t\in\mathbb{R}, R(t)=0$ 且当满足 $G\equiv 0$ 时, 有 (VII.36). 因此今后设 $R(0)\neq 0$. 由于第七章推论 3, 函数 $R=R(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的.

A. 首先假设, $R\in L^1(\mathbb{R})=L^1(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\mathrm{mes})$, 其中 mes 是 Lebesgue 测度, 现证,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(t)dt\geqslant 0 \tag{1}$$

由于函数 R 的非负性和连续性对所有的 $N>0$ 得到

$$\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}R(t-s)dtds=\lim_{n\to\infty}\sum_{k,m=-n}^{n-1}R(t_k^{(n)}-t_m^{(n)})\left(\frac{N}{n}\right)^2\geqslant 0 \tag{2}$$

(这里借助了积分可以作为和的极限, 该和是由组成正方形 $[-N,N]^2$ 划分为等边长为 N/n 的小正方形, 且在区间上选取任意点, 即 $t_k^{(n)}\in[kN/n,(k+1)N/n], k=-n,\cdots,n-1$).

经过变量替换 $t-s=u, t+s=v$ $\left(\text{雅可比 (Jacobi) 行列式 } \dfrac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2}\right)$ 当 $N\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}R(t-s)dtds\\
&=\frac{1}{4N}\left\{\int_0^{2N}duR(u)\int_{u-2N}^{2N-u}dv+\int_{-2N}^{0}duR(u)\int_{-u-2N}^{u+2N}dv\right\}\\
&=\int_{-2N}^{2N}\left(1-\frac{|u|}{2N}\right)R(u)du\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{|u|}{2N}\right)\mathbf{1}_{(-2N,2N)}(u)R(u)du\to\int_{-\infty}^{+\infty}R(u)du.
\end{aligned} \tag{3}$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理 ($R \in L^1(\mathbb{R})$) 保证在 (3) 式中的极限过渡. 这样, 由 (2) 式和 (3) 式得出 (1) 式.

B. 设

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}R(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

因为 $R \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 f 是 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数. 根据第二章定理 4, 非负定函数 $R = R(t)$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, 可以看作某个取复数值中心化过程 $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的相关函数. 注意, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 如果 $R(t) = \mathsf{E}X(t)\overline{X(0)}$, 则

$$\mathsf{E}e^{-isx}X(s)\overline{e^{-itx}X(t)} = e^{ix(t-s)}R(s-t).$$

因此, $e^{-itx}R(t)$ 是中心化平稳过程 $e^{-itx}X(t)$ 的相关函数 (注意 $\mathsf{E}X(t) = 0$), 且 $|e^{-itx}R(t)| = |R(t)|$. 从而, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) \geqslant 0$.

C. 证对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$|R(t)| \leqslant R(0). \tag{5}$$

显然, $R(0) = \mathsf{E}|X(0)|^2 \geqslant 0$. 此外, 根据 Cauchy – Bunyakovskii 不等式有 $|R(t)| \leqslant \|X(t)\|\|X(0)\|$ (其中 $\|\cdot\|$ 是 $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中的范数), 但是 $\|X(t)\|^2 = \mathsf{E}X(t)\overline{X(t)} = R(0), t \in \mathbb{R}$. 因此 (5) 式成立.

D. 研究在 $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{mes})$ 中的 Fourier 变换

$$F[h](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}h(x)dx.$$

众所周知, (参见, 例如, [60; 第 2 卷, p.20]), F 将 $L^2(\mathbb{R})$ 一一映射到 $L^2(\mathbb{R})$, 且对几乎所有的 x (依 Lebesgue 测度) 有

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}F[h](t)dt.$$

对 $h, g \in L^2(\mathbb{R})$ Parseval 不等式成立

$$2\pi\langle h, g\rangle = \langle F[h], F[g]\rangle, \tag{6}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的内积.

函数 $R \in L^2(\mathbb{R})$, 因为 $R \in L^1(\mathbb{R})$ 和 (5) 式成立. 因此, 几乎所有的 (依 Lebesgue 测度) 有

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx. \tag{7}$$

E. 验证, 对所有的 $t \in \mathbb{R}$ 最后的等式成立. 这只需要验证 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 利用随机变量 $\xi \sim \mathsf{N}(0, \varepsilon^2), \varepsilon > 0$ 的特征函数是已知的 (参见 (II.7), 当 $n = 1$), 根据 (6) 式有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\varepsilon x)^2}{2}}f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}R(t)dt. \tag{8}$$

由于函数 R 的连续性, 当 $\varepsilon \to 0$ 时 (8) 式右半部边趋于 $R(0)$, 因为 $e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}/(\varepsilon\sqrt{2\pi})$ 是 $\delta-$ 型函数族 (对变量 t). 根据单调类收敛定理, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = R(0). \tag{9}$$

函数 R 在整个数轴上连续, 因为 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 所以公式 (7) 右半部同样是连续的. 因此, 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 等式 (7) 成立.

F. 设 R 不一定属于 $L^1(\mathbb{R})$. 研究在 $L^1(\mathbb{R})$ 中函数 $R_\varepsilon(t) = R(t)e^{-\frac{(\varepsilon t)^2}{2}}$, 其中参数 $\varepsilon > 0$. 因为 $R_\varepsilon(t) = \mathsf{E}e^{it\varepsilon\xi}R(t)$, 其中 $\xi \sim \mathsf{N}(0,1)$, 所以它是连续非负定函数 (也是因为对每个 ε 和 ω 函数 $e^{it\varepsilon\xi}R(t)$ 是非负定函数). 这时, 根据已证 $R_\varepsilon(t)/R(0)$ 是某个概率分布的特征函数, 即

$$R_\varepsilon(t)/R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\varepsilon(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dx = 1, \quad f_\varepsilon(x) \geqslant 0.$$

但是, 如果特征函数点点收敛到一个在 0 点连续的函数, 则该极限函数是个特征函数 (参见第五章定理 12). 这样, $R(t)/R(0)$ 是特征函数, 即

$$R(t)/R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

其中 F 是某个分布函数, 而表示 (VII.36) 具有测度

$$G(d\lambda) = R(0)F(d\lambda)$$

($F(d\lambda)$ 是由分布函数 $F(x)$ 所确定的测度). □

注 1. 第一章定义 9 引入了在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 上测度 Q 的特征函数. Kolmogorov (参见, 例如, [33; 第 1 卷]) 将其概念推广成 Banach 空间 B 中 Borel $\sigma-$ 代数上测度 Q 的特征泛函:

$$\phi(x^*) = \int_B e^{ix^*(x)}\mathsf{Q}(dx), \quad x^* \in \mathsf{B}^*.$$

注意, 对特征泛函推广的博赫纳 (Bochner) – 辛钦 (Khinchin) 定理, 确不是一件容易的事.

附录 5
柯尔莫戈洛夫 – 塞格定理的证明

介绍对广义平稳过程 $X=\{X_t,t\in\mathbb{Z}\}$, 如何将寻求一步的线性预测误差的问题转化成经典的函数论的逼近问题.

第七章定理 16 的证明分为几个步骤:

A. 根据预测误差量的定义 $\delta(1)$ 可以由公式 $\delta^2(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$ 找出, 其中

$$\gamma_n=\inf\left\|X_t-\sum_{k=1}^{n}a_kX_{t-k}\right\|^2, \tag{1}$$

是相对于所有的取值 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C}$ 的下确界. 显然, $\{\gamma_n\}_{n\geqslant1}$ 是不增序列.

由于第七章定理 5, 空间 $H(X)$ 和 $L^2([-\pi,\pi],\mathscr{B}([-\pi,\pi]),\mathrm{Q})$ 是同构的, 其中 Q 是过程 X 具有的谱测度, 且相对于 Lebesgue 测度有密度 g. 这时, 对每个 $t\in\mathbb{Z}$ 有

$$X_t\leftrightarrow e^{it\lambda},\quad \lambda\in[-\pi,\pi].$$

因此, 对 $f(\lambda)=2\pi g(\lambda)$, 其中 $\lambda\in[-\pi,\pi]$ 有

$$\left\|X_t-\sum_{k=1}^{n}a_kX_{t-k}\right\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|b_0+b_1e^{i\lambda}+\cdots+b_ne^{in\lambda}|^2f(\lambda)d\lambda, \tag{2}$$

这里, $b_0=1,b_k=-\overline{a}_k,k=1,\cdots,n$.

从而,

$$\delta^2(1)=\inf\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda)f(\lambda)d\lambda\right\}=\inf\{A(hf)\}, \tag{3}$$

这里对所有的函数 $h(\lambda)=|P(e^{i\lambda})|^2$ 取下确界, 其中 $P=P(z)$ 是任意的多项式 $(z\in\mathbb{C})$, 且 $P(0)=1$, 而函数 v 的中值 $A(v)$ 是在第七章定理 16 叙述前已经定义的.

B. 计算一下公式 (3) 的右半部分, 假设

$$\ln f \in L^1 = L^1([-\pi,\pi], \mathscr{B}([-\pi,\pi]), \mathrm{mes}),$$

其中 mes 是 Lebesgue 测度.

首先假设多项式 $P(z)$ 的所有 0 点位于单位圆 $|z| \leqslant 1$ 之外. 这时, 根据调和函数的平均值定理, 有

$$A(\ln h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln h(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \ln(|P(z)|^2)dz = |\ln P(0)|^2 = 0,$$

即 $G(h) = \exp\{A(\ln h)\} = 1$.

如果对非负函数 $v = v(\lambda), \lambda \in [-\pi,\pi]$ 且 v 和 $\ln v \in L^1$, 则由于埃森 (Esseen) 不等式得到算术平均与几何平均之间的不等式:

$$A(v) \geqslant G(v). \tag{4}$$

因为 $G(h) = 1$ 和 $\ln f \in L^1$, 有

$$A(hf) \geqslant G(hf) = G(h)G(f) = G(f). \tag{5}$$

这样, 如果多项式 $P(z)$ 的所有 0 点位于单位圆之外, 则考虑到 (3) 式得到 $\delta^2(1) \geqslant G(f)$.

C. 现在研究, 当多项式 $P(z)$ 的所有 0 点的模是小于或者是大于 1. 很清楚, 有 $|P(z)|^2 = b\prod_{k=1}^{n}|z - z_k|^2$, 其中 $b > 0$ 和 $z_k \neq 0, k = 1,\cdots,n$, 因为 $P(0) = 1$.

如果存在那样的根 $z_k, |z_k| < 1$ 则可以转向新的多项式 $\widetilde{P}(z)$, 对它来说, 所有的根 $\widetilde{z}_k$ 有 $|\widetilde{z}_k| > 1$, 且这时, 对任意的 $\lambda \in [-\pi,\pi]$ 有 $|\widetilde{P}(e^{i\lambda})|^2 = |P(e^{i\lambda})|^2$, 而同时有 $\widetilde{P}(0) = 1$. 事实上, 如果 $z = e^{i\lambda}, |z_k| < 1$ 则 $|z - z_k| = |z_k|^2|z - \overline{z}_k^{-1}|$, 其中点 $\overline{z}_k^{-1}$ 位于单位圆之外. 从而在这情况下重新得到 $\delta^2(1) \geqslant G(f)$.

D. 最后假设, 在所有的根 $|z_k| \geqslant 1, k = 1,\cdots,n$ 且在根 z_k 当中有 $|z_k| = 1$. 这时, 对任意小的 $\varepsilon > 0$ 选取同样阶 n 的多项式 $\widehat{P}^{(\varepsilon)}(z)$, 使得所有的 0 点 $\widehat{z}_k$, 严格地位于单位圆之外 (如果 $|z_k| = 1$, 则取根 $\widehat{z}_k$ 足够接近 z_k, 但是要 $|\widehat{z}_k| > 1$), 这时有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\lambda)|\left||\widehat{P}^{(\varepsilon)}(e^{i\lambda})|^2 - |\widetilde{P}(e^{i\lambda})|^2\right|d\lambda < \varepsilon, \quad \widehat{P}(0) = 1. \tag{6}$$

对函数 $h(\lambda) = |\widehat{P}^{(\varepsilon)}(e^{i\lambda})|^2$ 进行 (5) 式的估计, 考虑到 (6) 式得出在这情况下有 $\delta^2(1) \geqslant G(f)$.

E. 现证明, 如果 $\delta^2(1) \leqslant G(f)$ 则 $\ln f \in L^1$. 众所周知, (参见, 例如 [53; 第 2 卷, p.92]), 对任意的非负的三角多项式 (变量 $\lambda \in [-\pi,\pi]$) 都可以写成对某个多项式 $P = P(z), |P(e^{i\lambda})|^2$ 的形式. 由于这个注以及 Weierstrass 定理说明了, 如果相对于

所有的在 $[-\pi,\pi]$ 上非负连续函数 h 且 $G(h)=1$ 取下确界, 则在关系式 (3) 中的量 $\delta(1)^2$ 不会改变.

首先, 假设, 对所有的 $\lambda\in[-\pi,\pi]$,

$$f(\lambda)\geqslant a>0. \tag{7}$$

这时, $G(f)\geqslant a$. 对任意的 $\varepsilon>0$ 可以找到三角多项式 $R(e^{i\lambda}),\lambda\in[-\pi,\pi]$, 使得对 $r(\lambda)=|R(e^{i\lambda})|^2$ 具有下面估计式: 对 $\lambda\in[-\pi,\pi], r(\lambda)\geqslant a$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|r(\lambda)-f(\lambda)|d\lambda<\varepsilon. \tag{8}$$

注意, 当 $0<x<y$ 时有

$$\ln y-\ln x=\ln\left(1+\frac{y-x}{x}\right)<\frac{y-x}{x}.$$

因此, 由 (7) 式和 (8) 式得出 $\ln r\in L^1$. 此外,

$$\frac{G(r)}{G(f)}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\ln r(\lambda)-\ln f(\lambda)]d\lambda\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{\varepsilon}{a}\right\}. \tag{9}$$

对函数 $h_0(\lambda)=\dfrac{1}{r(\lambda)}G(r),\lambda\in[-\pi,\pi]$ 有

$$\delta^2(1)\leqslant A(h_0f)=\frac{G(r)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\lambda)}{r(\lambda)}d\lambda=G(f)\frac{G(r)}{G(f)}A\left(\frac{f}{r}\right). \tag{10}$$

由于 (8) 式有

$$A\left(\frac{f}{r}\right)=1+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\lambda)-r(\lambda)}{r(\lambda)}d\lambda\leqslant1+\frac{\varepsilon}{a}. \tag{11}$$

由 (10) 式和 (11) 式在满足条件 (7) 的情况下, 得到 $\delta^2(1)\leqslant G(f)$.

F. 研究去掉条件 (7). 为此, 对 $a>0$ 引入函数 $f_a(\lambda)=f(\lambda)+a,\lambda\in[-\pi,\pi]$. 可以相信, 当 $a\to0+$ 时有

$$G(f_a)\to G(f). \tag{12}$$

显然, 对任意的 $a>0$, 有 $\ln f_a\in L^1$ 和

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)d\lambda\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_a(\lambda)d\lambda. \tag{13}$$

对任意的 $\nu>0$ 假设 $B(\nu)=\{\lambda\in[-\pi,\pi]:f(\lambda)>\nu\}$. 类似 (9) 式对所有的 $a>0$ 和 $\nu>0$ 找到

$$0\leqslant\int_{B(\nu)}\ln f_a(\lambda)d\lambda-\int_{B(\nu)}\ln f(\lambda)d\lambda\leqslant\frac{2\pi a}{\nu}.$$

如果 $\nu + a < 1$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leqslant \int_{B(\nu)} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leqslant \int_{B(\nu)} \ln f(\lambda) d\lambda + \frac{2\pi a}{\nu}.$$

因此, 当每个 $\nu \in (0,1)$, 有

$$\limsup_{a\to 0+} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leqslant \int_{B(\nu)} \ln f(\lambda) d\lambda \tag{14}$$

由 (13) 式和 (14) 式得出, 如果 $\ln f \in L^1$ 则当 $a \to 0+$ 时有

$$A(\ln f_a) \to A(\ln f), \tag{15}$$

因为 $G(v) = \exp\{A(\ln v)\}$, 可得性质 (12).

G. 当 $a > 0$ 时, 用 $\gamma_a(n)$ 表示对具有谱密度 $f_a(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]$ 随机过程 $\{X_t(a), t \in \mathbb{Z}\}$ 问题 (1) 的解. 由公式 (2) 不难看出, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 当 $a \to 0+$ 时有 $\gamma_n(a) \downarrow \gamma_n$. 因而, 设 $\delta_a^2(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(a)$, 对所有的 $a > 0$ 得到

$$\delta_a^2(1) \geqslant \delta^2(1). \tag{16}$$

根据 E. 有 $\delta_a^2(1) \leqslant G(f_a)$. 由 (16) 式和 (12) 式推出 $\delta^2(1) \leqslant G(f)$.

H. 最后设 $f \notin L^1$ (即对这个函数的积分不是有限的). 这时,

$$A(\ln f) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda = -\infty, \tag{17}$$

因为函数 $(\ln f(\lambda))_+ = \ln f(\lambda) \mathbf{1}_{\{f(\lambda)\geqslant 1\}} \leqslant f(\lambda)$ 对所有的 $\lambda \in [-\pi, \pi]$, 且 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积. 这样,

$$G(f) = \exp\{A(\ln f)\} = 0.$$

对任意的 $a > 0$ 有 $\ln f_a \in L^1$, 根据 E. 和 G. 有

$$\delta^2(1) \leqslant \delta_a^2(1) \leqslant G(f_a).$$

因此, 只剩下验证关系式 (12). 在我们所研究的情况 (当 $\ln f \notin L^1$) 关系式 (14) 同样成立. 因此,

$$\limsup_{a\to 0+} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f_a(\lambda) d\lambda \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \{f(\lambda) > 0\} \ln f(\lambda) d\lambda. \tag{18}$$

如果 (18) 式右半部分积分等于 $-\infty$, 则 (15) 式证明, 也就是说 (12) 式成立.

现在设 (18) 式右半部分积分有限. 这时, 由于 (17) 式有 $f(\lambda) = 0$ (和 $\ln f(\lambda) = -\infty$) 是在集合 A 上, 且该集具有正 Lebesgue 测度. 这样, 对所有的 $0 < a < 1$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\ln f_a(\lambda))_+ d\lambda \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) + a) d\lambda \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda + 2\pi a,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\ln f_a(\lambda))_- d\lambda \leqslant \int_{\{f(\lambda)=0\}} \ln a d\lambda = \ln a \lambda(A).$$

当 $a \to 0+$ 时取极限, 由最后的关系式重新得到 (15) 式, 也就是说, 有 (12) 式. 定理完全得证. □

注. 我们建立起条件 $\ln f \notin L^1$ 等价于 $\delta(1) = 0$. 由于第七章定理 11, 从而得到了对具有谱密度 $g(f(\lambda) = 2\pi g(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi])$ 的平稳过程规则性的准则.

附录 6
布朗运动族的强马氏性的证明

§1. 我们将利用这节的结果于附录 7, 是为了得到概率意义下 Dirichlet 问题的解. 为此, 更方便的是利用在初始时刻 $t=0$ 从空间 $\mathbb{R}^m$ 中由不同点出发的布朗 (Brown) 运动族. 现在我们的主要目的: 得到这一族强马氏性的变式 (定理 2), 它是在第三章 §6 证明的, 对 Wiener 过程的强马氏性推广.

引入一些必要的符号. 设给定标准的 m 维 Brown 运动 $W=\{W_t=(W_t^{(1)},\cdots, W_t^{(m)}), t\geqslant 0\}$ 直接的任务, 即对 $t\geqslant 0$ 和 $\omega\in\Omega=(C[0,\infty),\mathbb{R}^m)$ 给定 $W_t(\omega)=\omega(t)$, 且在 $[0,\infty)$ 上取值于 $\mathbb{R}^m$ 的连续函数空间, 赋予在紧集 (其中 $K_n=[0,n], n\in\mathbb{N}$) 一致收敛的距离 (V.46). 不难相信, Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{B}(C([0,\infty),\mathbb{R}^m))$ 与这个空间的柱集 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}$ 相重合.

作为在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的测度 P 取自 Brown 运动 W 的分布. 注意, 有 $\mathsf{P}(C_0([0,\infty),\mathbb{R}^m))=1$, 其中 $C_0([0,\infty),\mathbb{R}^m)$ 是 $C([0,\infty),\mathbb{R}^m)$ 的子空间, 它是由所有在 0 点取值为 $0\in\mathbb{R}^m$ 的连续函数所组成.

与通常一样, 认为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是完全的, 且 Brown 运动 W 的自然 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是扩充了 $\mathsf{P}-0$ 概率的集合类 $\mathscr{N}$.

在空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上引入一测度族

$$\mathsf{P}^x(C):=\mathsf{P}(C-x) \tag{1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^m, C\in\mathscr{F}$, 而 $C-x=\{y(\cdot)-x: y(\cdot)\in C\}$. 显然, $\mathsf{P}=\mathsf{P}^0$.

引理 1. 对每个 $x\in\mathbb{R}^m$, 过程 $W=\{W_t, t\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}^x)$ 上的相对于自然 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$, 在时刻 $t=0$ 从点 $x\in\mathbb{R}^m$ 出发的 Brown 运动; 且它的轨道 P^x-a.s. 连续和 (相对于测度 P^x) 有

1) $W_0=x$;

2) $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_s$, 即 $W_t - W_s$ 和 $\mathscr{F}_s$ 独立, 对 $0 \leqslant s < t$;
3) 对 $0 \leqslant s < t$ 有 $W_t - W_s \sim \mathsf{N}(0, (t-s)I)$, 其中 I 是 m 阶单位矩阵.

证. 容易看出, P^x 乃是过程 $W^x = \{W_t^x, t \geqslant 0\}$, 其中 $W_t^x(\omega) = x + W_t(\omega), x \in \mathbb{R}^m, t \geqslant 0, \omega \in \Omega$; 在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}$ 上的概率分布. 换句话说, 对 $C \in \mathscr{F}$ 有

$$\mathsf{P}^x(C) = \mathsf{P}(W^x \in C). \tag{2}$$

由在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上 Brown 运动 W 的相应性质直接可以得出性质 1),2) 和 3). □

§2. 我们还需要关于过程 $W^x = \{W^x(t), t \geqslant 0\}, x \in \mathbb{R}^m$ 的一系列的辅助性结果. 首先, 研究对测度 $\mathsf{P}^x, x \in \mathbb{R}^m$ 的积分.

引理 2. 对有界实随机变量 Y 的均值 $\mathsf{E}^x Y$ (相对于测度 P^x) 是关于 $x \in \mathbb{R}^m$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测函数. 特别的, 函数 $\mathsf{P}^x(A)$ 对每个 $A \in \mathscr{F}$ 是关于 x 的可测函数.

证. 利用第一章引理 6, 不难看出, 集合 $A \in \mathscr{F}$, 对它们来说函数 $\mathsf{P}^x(A)$ 是可测的, 构成 $\lambda-$ 系 $\mathscr{D}$. 用 $\mathscr{E}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中形如 $C = \{W_{t_1} \in B_1, \cdots, W_{t_n} \in B_n\}$ 所组成的柱集全体, 其中 $t_i \in [0, \infty), B_i$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的平行多面体, $i = 1, \cdots, n$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 这个类对交运算是封闭的. 根据第六章定理 3, 过程 $W^x = \{W_t^x, t \geqslant 0\}$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}^m$ 是在空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的马氏过程. 同时, 显然对每个 $x \in \mathbb{R}^m$ 过程 W^x 的自然 $\sigma-$ 代数流与 $\mathbb{F}$ 相重合.

第六章例 2 说明了, 过程 W^x 在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的转移函数由下面公式给出:

$$P(x,t,B) = \begin{cases} (2\pi t)^{-m/2} \displaystyle\int_B \exp\{-|y-x|^2/(2t)\} dy, & \text{当 } t > 0, \\ \delta_x(B), & \text{当 } t = 0, \end{cases} \tag{3}$$

这里, $x \in \mathbb{R}^m, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$, $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中欧氏范数, δ_x 是集中于点 x 的狄拉克 (Dirac) 测度. 利用公式 (2), (VI.34) 和 (3) 式得到 $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}$. 根据单调类定理有 $\mathscr{F} = \sigma\{\mathscr{E}\} \subset \mathscr{D}$, 因为 $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}$, 则有 $\mathscr{F} = \mathscr{D}$.

量 Y 可以表示成 $\mathscr{F}$ 中的事件示性函数的线性组合的一致极限 (参见 (I.4)), 因此由第一章引理 6 可得函数 $\mathsf{E}^x Y$ 的可测性. □

引理 3. 对每个 $x \in \mathbb{R}^m, 0 \leqslant s \leqslant t$ 和 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\mathsf{P}^x(W_t \in B | \mathscr{F}_s) = \mathsf{P}(W_s, t-s, B) \quad (\mathsf{P}^x - \text{a.s.}), \tag{4}$$

这里 (4) 式中右半部分的转移函数由公式 (3) 给出.

证. 考虑到 (4) 式中右半部分 $\sigma\{W_s\}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 的可测性, 仅需要建立, 对任意的 $A \in \mathscr{F}_s$ 有等式

$$\mathsf{P}^x(A \cap \{W_t \in B\}) = \mathsf{E}^x \mathsf{P}(W_s, t-s, B) \mathbf{1}_A. \tag{5}$$

对满足等式 (5) $\mathscr{F}$ 中的集合 A, 构成 $\lambda-$ 系 $\mathscr{D}$. 现验证它包含着一个由下面形式的集合所组成的 $\pi-$ 系 $\mathscr{E}$:

$$A=\{W_{t_1}\in B_1,\cdots,W_{t_n}\in B_n\},$$

这里 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n\leqslant s, B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m), n\in\mathbb{N}$.

为此, 首先要指出的是, 如果函数 $h:\Omega\to\mathbb{R}$ 有界, 且 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}^m$, 有

$$\mathsf{E}^x h(W)=\mathsf{E}h(W^x), \tag{6}$$

这里 E 表示相对测度 $\mathsf{P}=\mathsf{P}^0$ 的积分. 事实上, 当 $h=\mathbf{1}_C$, 其中 $C\in\mathscr{F}$, 由于 (2) 式它成立, 且由于 h 可以是所说的柱集示性函数线性组合的一致极限, 所以性质 (6) 立刻得出.

由 (6) 式可得, 所需验证公式 (5), 对所引入的柱集 A 来说, 可以改写成:

$$\mathsf{P}(A_x\bigcap\{W_t^x\in B\})=\mathsf{E}\mathsf{P}(W_s^x,t-s,B)\mathbf{1}_{A_x}, \tag{7}$$

这里 $A_x=\{W_{t_1}^x\in B_1,\cdots,W_{t_n}^x\in B_n\}\in\mathscr{F}_s^{W^x}$. 因为对每个 $x\in\mathbb{R}^m, \{W_t^x, t\geqslant 0\}$ 是时齐马氏过程, 且具有转移函数 (3) 式, 所以等式 (7) 成立. 根据单调类定理, 可得 $\mathscr{F}_s=\sigma\{\mathscr{E}\}=\mathscr{D}$. □

对随机向量 V 和实随机变量 Y 设 $\mathsf{E}^V Y:=H(V)$, 其中 $H(x)=\mathsf{E}^x Y$ 的形式依赖于量 Y, 且假设该量对任意的测度 $\mathsf{P}^x, x\in\mathbb{R}^m$ 是可积的.

引理 4. 设 W 是引理 1 中所述的空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}^x)$ 上的 Brown 运动. 对每个 $x\in\mathbb{R}^m, s,u\geqslant 0$ 和所有有界 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)-$ 可测函数 f 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{s+u})|\mathscr{F}_s)=\mathsf{E}^{W_s}f(W_u)\quad(\mathsf{P}^x-\text{a.s.}). \tag{8}$$

证. 假设在 (4) 式中 $s=0, t=u$ 且对两边取数学期望 E^x. 这时对任意的 $u\geqslant 0, B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 和 $x\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\mathsf{P}^x(W_u\in B)=\mathsf{E}^x\mathsf{P}(W_0,u,B)=\mathsf{P}(x,u,B), \tag{9}$$

这里考虑到 $W_0=x$, (P^x–a.s.).

如果 $f(z)=\mathbf{1}_B(z), B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 和 $z\in\mathbb{R}^m$, 则由 (4) 式得出:

$$\mathsf{E}^x(f(W_{s+u})|\mathscr{F}_s)=\mathsf{P}^x(W_{s+u}\in B|\mathscr{F}_s)=\mathsf{P}(W_s,u,B)\quad(\mathsf{P}^x-\text{a.s.}).$$

另一方面, 考虑到 (9) 式有

$$\mathsf{E}^x\mathbf{1}_B(W_u)=\mathsf{P}^x(W_u\in B)=\mathsf{P}(x,u,B),$$

这样对示性函数 1 证明了公式 (8). 一般情况, 因为任意的有界实可测函数 f 可以用示性函数线性组合一致逼近, 所以由已经证明的可以推出性质 (8). □

§3. 现对 Brown 运动族 (与第六章补充相比较). 对 $s \geqslant 0$ 假设 $\mathscr{F}_{\geqslant s} = \sigma\{W(t), t \geqslant s\}$. 设对每个 $s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$ 在 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_{\geqslant s}$ 给出概率测度 $\mathsf{P}^{s,x}$.

定义 1. 被称作具有转移函数 (3) 式的 Brown 运动族的是在空间 $\Omega = C([0,\infty), \mathbb{R}^m)$ 上的过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$, 使得对任意的 $s \geqslant 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^m$, $\{W(t), t \geqslant s\}$ 是在空间 $(\Omega, \mathscr{F}_{\geqslant s}, \mathsf{P}^{s,x})$ 上时齐马氏过程 (具有转移函数 (3) 式), 且在时刻 s 由 x 点出发, 换句话说, 对任意的 $s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$ 满足下面的条件:

1°. 对每个 $s \geqslant 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^m$ 有 $\mathsf{P}^{s,x}(W_s = x) = 1$;

2°. 对每个 $s \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$ 和 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m), s \leqslant t \leqslant u$, $\mathsf{P}^{s,x}$−a.s. 有

$$\mathsf{P}^{s,x}(W_t \in B | \mathscr{F}_{[s,u]}) = \mathsf{P}(W_u, t-u, B),$$

其中 $\mathscr{F}_{[s,u]} = \sigma\{W_v, v \in [s,u]\}$.

事实上, 这样的一族是很容易构造出的. 对 $u \geqslant 0$ 定义推移算子$\theta_u : \Omega \to \Omega$, 假设

$$(\theta_u \omega)(\cdot) = \omega(\cdot + u), \quad 其中 \quad \omega \in \Omega. \tag{10}$$

如果 $A \subset \Omega$ 则设 $\theta_u A := \{\theta_u \omega : \omega \in A\}$, 而对定义在 Ω 上的函数 $Y(\omega)$, 设 $(\theta_u Y)(\omega) := Y(\theta_u \omega), \omega \in \Omega$. 对 Ω 的子集合类 $\mathscr{A}$ 定义 $\theta_u^{-1}\mathscr{A} := \{\theta_u^{-1} A : A \in \mathscr{A}\}$. 为了简化表示符号, 我们将用同一个符号 θ_u 表示对不同对象具备相同的作用.

引理 5. 对所有的 $u \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant s \leqslant t$ 有

$$\theta_u^{-1} \mathscr{F}_{[s,t]} = \mathscr{F}_{[s+u,t+u]}; \tag{11}$$

当 $t = \infty$ 时, 设 $\mathscr{F}_{[s,t]} := \mathscr{F}_{\geqslant s}$ 和 $\mathscr{F}_{[s+u,t+u]} := \mathscr{F}_{\geqslant s+u}$.

证. 由于 (10) 式, 对所有的 $u, t \geqslant 0$ 和 $\omega \in \Omega$ 有

$$(\theta_u W_t)(\omega) = W_t(\theta_u \omega) = W_t(\omega(\cdot + u)) = \omega(t+u) = W_{t+u}(\omega). \tag{12}$$

对 $v \in [s+u, t+u]$ 和 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\{W_v \in B\} = \theta_u^{-1}\{\omega : W_{v-u}(\omega) \in B\} \in \theta_u^{-1}\mathscr{F}_{[s,t]}.$$

因为 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_{[s+u,t+u]}$ 是由集合 $\{W_v \in B\}$, 其中 $v \in [s+u, t+u]$ 所产生, 所以 $\mathscr{F}_{[s+u,t+u]} \subset \theta_u^{-1}\mathscr{F}_{[s,t]}$. 另一方面, 对 $h \in [s,t]$ 和 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\theta_u^{-1}\{W_h \in B\} = \{\omega : W_h(\theta_u \omega) \in B\} = \{\omega : W_{h+u}(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}_{[s+u,t+u]}.$$

根据第一章推论 1 有

$$\theta_u^{-1}\mathscr{F}_{[s,t]} \subset \mathscr{F}_{[s+u,t+u]},$$

所以引理得证. □

这样, 根据引理 5, 对每个 $C \in \mathscr{F}_{\geqslant s}$ 存在 $A \in \mathscr{F}_{\geqslant 0} = \mathscr{F}$ 使得 $C = \theta_s^{-1}A$. 现设

$$\mathsf{P}^{s,x}(C) := \mathsf{P}^x(A), \quad \text{其中} \quad s \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{13}$$

因为 θ_s 对每个 $s \geqslant 0$, 将 Ω 映射到 Ω 上 (如果 $C = \theta_s^{-1}A$, 则 A 唯一地被确定: $A = \theta_s C$), 所以这个定义是具体的. 除此之外, 因为原像的选取保持集合论中的运算关系, $\mathsf{P}^{s,x}$ 是在 $\mathscr{F}_{\geqslant s}$ 上的测度. 考虑到 (13) 式和引理 4, 很容易看出性质 1° 和 2° 是满足的.

注意到 (13) 式, 我们用 $(W_t, \mathsf{P}^x)_{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^m}$ 表示我们的时齐 Brown 运动族 (具有转移函数 (3) 式的). 再一次强调: 我们只提到了一个过程 W, 且采用不同作法得到 $\sigma-$ 代数和在它们之上的测度, 使得对在任意时刻 $s \geqslant 0$ 由任意点 $x \in \mathbb{R}^m$ 的 Brown 运动得以 “给出” 相应直观表示的可能.

定义 2. 具有转移函数 $P(x,t,B)$ 的时齐马氏族 (过程) 称作*费勒* (Feller) *的*, 如果对每个 $t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$, 有下面的弱收敛: 当 $z \to x$ 时有

$$P(z,t,\cdot) \Rightarrow P(x,t,\cdot). \tag{14}$$

这样, 这个定义仅仅是和转移函数有关, 而与这个族或过程与本身无关, 这意味着, 对任意的 $t \geqslant 0$ 和 $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$, 当 $z \to x$ 时 $(z, x \in \mathbb{R}^m)$ 成立关系式

$$(T_t f)(z) := \int_{\mathbb{R}^m} f(y)P(z,t,dy) \to \int_{\mathbb{R}^m} f(y)P(x,t,dy) = (T_t f)(x). \tag{15}$$

因此, 对每个 $t \geqslant 0, C_b(\mathbb{R}^m)$ 是算子 T_t 的不变子空间.

利用公式 (3) 和 Lebesgue 控制收敛定理得到 Brown 族 $(W_t, \mathsf{P}^x)_{t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^m}$ *是* Feller *的*.

§4. 为了在其他问题中研究 Brown 运动的泛函, 还需要强马氏性的不同形式 (参见后面的 §6). 首先, 将引理 4 推广到较 “丰富” 的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_{s+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{F}_{s+\varepsilon}$ 上.

引理 6. *对每个* $x \in \mathbb{R}^m$, *所有的* $s, u \geqslant 0$ *和* $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$, P^x-a.s. *有*

$$\mathsf{E}^x(f(W_{s+u})|\mathscr{F}_{s+}) = \mathsf{E}^{W_s} f(W_u). \tag{16}$$

证. 由于 (8) 式, 对所有的 $s, u \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0$ 和 $f \in C_b(\mathbb{R}^m)\mathsf{P}^x-$a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{s+u+\varepsilon})|\mathscr{F}_{s+\varepsilon}) = \mathsf{E}^{W_{s+\varepsilon}}(W_u).$$

考虑到 $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ 轨道的连续性和第四章定理 16 (可用 $\varepsilon_n \downarrow 0$ 代替 $\varepsilon \downarrow 0$), 得到, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时, P^x-a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{s+u+\varepsilon})|\mathscr{F}_{s+\varepsilon}) \to \mathsf{E}^x(f(W_{s+u})|\mathscr{F}_{s+}).$$

注意, 在 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P}^x)$ 上过程 $W=\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是具有转移函数 (3) 式的马氏的, 有

$$\mathsf{E}^x f(W_u)=\int_{\mathbb{R}^m} f(y)P(x,u,dy)=(T_u f)(x).$$

由于对每个 $x\in\mathbb{R}^m$ Brown 族的 Feller 性, 当 $z\to x$ 时有

$$\mathsf{E}^z f(W_u)\to\mathsf{E}^x f(W_u)$$

因此, 对所有的 $\omega\in\Omega$, 当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时有

$$\mathsf{E}^{W_{s+\varepsilon}} f(W_u)\to\mathsf{E}^{W_s} f(W_u).\quad\square$$

马氏性推广的下一步是由 (16) 式中的 $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}_{s+}$ 过渡到所要用的由相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_{s+})_{s\geqslant 0}$ 的停时 τ 所产生的 $\sigma-$ 代数. 正是

$$\mathscr{F}_{\tau+}=\{A\subset\Omega: A\bigcap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+},\ \text{对任意的}\ t\geqslant 0\}.$$

今后, 将假设 W_τ 和 $W_{u+\tau}$, 其中 $u\geqslant 0$, 在集合 $\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)=\infty\}$ 上在 $\mathbb{R}^m$ 中等于 0.

定理 1. 设对所有的 $x\in\mathbb{R}^m$ 有 $\mathsf{P}^x(\tau<\infty)=1$, 其中 τ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$ 的停时. 这时对每个 $x\in\mathbb{R}^m, u\geqslant 0$ 和任意有界函数 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, f\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)|\mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}^x-$a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{\tau+u})|\mathscr{F}_{\tau+})=\mathsf{E}^{W_\tau} f(W_u)\tag{17}$$

证. 引入有界停时 $\tau_n=([2^n\tau]+1)2^{-n}, n\in\mathbb{N}$, 其中 $[\cdot]$ 是数的整数部分. 显然, 当 $n\to\infty$ 时对所有的 $\omega\in\Omega$ 有 $\tau_n(\omega)\downarrow\tau(\omega)$. 此外, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, τ_n 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的停时 (参见第四章引理 7 的证明).

证明对每个 $x\in\mathbb{R}^m, n\in\mathbb{N}, u\geqslant 0$ 和 $f\in C_b(\mathbb{R}^m), \mathsf{P}^x-$a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{\tau_n+u})|\mathscr{F}_{\tau_n+})=\mathsf{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u).\tag{18}$$

(18) 式右半部分是 $\sigma\{W_{\tau_n}\}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$可测, 因此, $\mathscr{F}_{\tau_n}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$可测, 这意味着 $\mathscr{F}_{\tau_n+}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$可测. 因此, 只需要验证, 对任意的 $A\in\mathscr{F}_{\tau_n+}$ 有

$$\mathsf{E}^x\mathbf{1}_A f(W_{\tau_n+u})=\mathsf{E}^x\mathbf{1}_A\mathsf{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u).$$

利用引理 6, 考虑到对所有的 $k,n\in\mathbb{N}$ 有 $A\cap\{\tau_n=k2^{-n}\}\in\mathscr{F}_{k2^{-n}+}$, 而同时利用 Lebesgue 积分的可数可加性, 对每个 $x\in\mathbb{R}^m$ 得到

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^x\mathbf{1}_A f(W_{\tau_n+u})&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}^x\mathbf{1}_{A\bigcap\{\tau_n=k2^{-n}\}} f(W_{k2^{-n}+u})\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{E}^x\mathbf{1}_{A\bigcap\{\tau_n=k2^{-n}\}}\mathsf{E}^{W_{k2^{-n}}} f(W_u)=\mathsf{E}^x\mathbf{1}_A\mathsf{E}^{W_{\tau_n}} f(W_u).\end{aligned}$$

这样, (18) 式成立. 在 (18) 式中取极限. 由于 Brown 族的 Feller 性, 当 $n\to\infty$ 时, 对所有的 $\omega\in\{\tau<\infty\}$ 有 $\mathsf{E}^{W_{\tau_n}}f(W_u)\to\mathsf{E}^{W_\tau}f(W_u)$. 根据第四章定理 16, 当 $n\to\infty$ 时, P^x-a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{\tau_n+u})|\mathscr{F}_{\tau_n+})\to\mathsf{E}^x\left(f(W_{\tau+u})|\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n+}\right).$$

现验证

$$\mathscr{F}_{\tau+}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n+}. \tag{19}$$

对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\mathscr{F}_{\tau+}\subset\mathscr{F}_{\tau_n+}$. 事实上, 如果 $A\in\mathscr{F}_{\tau+}$, 则对每个 $t\geqslant 0$ 有 $A\bigcap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}$. 这时, $A\bigcap\{\tau_n\leqslant t\}=A\bigcap\{\tau\leqslant t\}\bigcap\{\tau_n\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}$ (考虑到 $\{\tau_n\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}$ 和对任意的 $t\geqslant 0$ 有 $\{\tau_n\leqslant t\}\subset\{\tau\leqslant t\}$). 因此, $\mathscr{F}_{\tau+}\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{\tau_n+}$. 相反的包含关系, 利用对任意的 $t\geqslant 0$ 有

$$A\in\mathscr{F}_{\tau+}\Leftrightarrow A\bigcap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t.$$

设对所有的 $n\in\mathbb{N}, A\in\mathscr{F}_{\tau_n+}$. 这时, 对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\geqslant 0$ 有 $A\bigcap\{\tau_n<t\}\in\mathscr{F}_t$. 因此,

$$A\bigcap\{\tau<t\}=A\bigcap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n<t\}\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\bigcap\{\tau_n<t\})\in\mathscr{F}_t,$$

这样完成了 (19) 式的证明. 进而, 对任意的有界连续函数 f 证明了 (17) 式.

$\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 中集合类 C, 对它来说, 当 $f=\mathbf{1}_C$ 时满足 (17) 式, 该类构成 $\lambda-$ 系. 因为对任意的闭集 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m), \mathbf{1}_B$ 可以看作由满足 (17) 式连续 "小帽子型" 函数 f_n 的不降序列的极限 (参见, 第三章定理 4 的证明), 所以该闭集 B 属于 $\lambda-$ 系. 有限个闭集的交是闭集, 而闭集又可产生 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$. 根据单调类定理, 关系式 (17) 对 $f=\mathbf{1}_C$ 成立, 其中 C 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意 Borel 集. 如果考虑到有界可测函数 f 可以表示成 Borel 集示性函数线性组合的一致性极限, 则定理 1 的证明就完成了. □

特别是公式 (16) 成立, 因为当 $\tau\equiv s$ 时, 有 $\mathscr{F}_{\tau+}=\mathscr{F}_{s+}$ 代入 (17) 式可得.

为了证明 Brown 族的所谓强马氏性 (后面的定理 2), 我们还需要一个辅助性的结果.

引理 7. 设对所有的 $x\in\mathbb{R}^m$ 有 $\mathsf{P}^x(\tau<\infty)=1$, 其中 τ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$ 的停时. 这时, 对每个 $x\in\mathbb{R}^m$, 任意的 $n\in\mathbb{N}, u_k\geqslant 0$ 和有界函数 $f_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, f_k\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)|\mathscr{B}(\mathbb{R}), k=1,\cdots,n, \mathsf{P}^x-$a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f_1(W_{\tau+u_1})\cdots f_n(W_{\tau+u_n})|\mathscr{F}_{\tau+})=\mathsf{E}^{W_\tau}f_1(W_{u_1})\cdots f_n(W_{u_n}). \tag{20}$$

证. 证明根据归纳法. 当 $n=1$ 时, 由定理 1 得出. 验证由 $n=1$ 到 $n=2$ (类似的由 n 到 $n+1$). 设固定的 $0\leqslant u_1\leqslant u_2$. 这时, P^x-a.s. 有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^x(f_1(W_{\tau+u_1})f_2(W_{\tau+u_2})|\mathscr{F}_{\tau+}) &= \mathsf{E}^x(\mathsf{E}^x(f_1(W_{\tau+u_1})f_2(W_{\tau+u_2})|\mathscr{F}_{(\tau+u_1)+})|\mathscr{F}_{\tau+})\\ &= \mathsf{E}^x(f_1(W_{\tau+u_1})\mathsf{E}^x(f_2(W_{\tau+u_2})|\mathscr{F}_{(\tau+u_1)+})|\mathscr{F}_{\tau+})\\ &= \mathsf{E}^x(f_1(W_{\tau+u_1})\mathsf{E}^{W_{\tau+u_1}}f_2(W_{u_2-u_1})|\mathscr{F}_{\tau+})\\ &= \mathsf{E}^{W_\tau}(f_1(W_{u_1})\mathsf{E}^{W_{u_1}}f_2(W_{u_2-u_1}))\\ &= \mathsf{E}^{W_\tau}(f_1(W_{u_1})\mathsf{E}^x(f_2(W_{u_2})|\mathscr{F}_{u_1+}))\\ &= \mathsf{E}^{W_\tau}f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2}).\end{aligned}$$

最后的等式是由下面的讨论得出的. 对任意的 $z\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\mathsf{E}^z(f_1(W_{u_1})\mathsf{E}^z(f_2(W_{u_2})|\mathscr{F}_{u_1+}))=\mathsf{E}^z(f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2})).$$

在公式 (17) 中, 对每个 $x\in\mathbb{R}^m,\tau\equiv s$ 作为 $\mathsf{E}^x(f(W_{s+u})|\mathscr{F}_{s+})$ 的变形可以取作 $\mathsf{E}^{W_s}f(W_u)$ 对所有的 $\omega\in\Omega$. 因此,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^z(f_1(W_{u_1})\mathsf{E}^x(f_2(W_{u_2})|\mathscr{F}_{u_1+})) &= \mathsf{E}^z(f_1(W_{u_1})\mathsf{E}^{W_{u_1}}f_2(W_{u_2-u_1}))\\ &= \mathsf{E}^z(f_1(W_{u_1})\mathsf{E}^z(f_2(W_{u_2})|\mathscr{F}_{u_1+}))\\ &= \mathsf{E}^z(\mathsf{E}^z(f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2})|\mathscr{F}_{u_1+}))\\ &= \mathsf{E}^z f_1(W_{u_1})f_2(W_{u_2}).\qquad\square\end{aligned}$$

§5. 为了得到附录 6 的基本结果, 现在我们作好必要的准备. 在随机变量 $\tau\in[0,\infty)$ 上引入推移算子. 对在 Ω 上的映射 $Y(\omega)$, 设对 $\omega\in\Omega$ 有

$$(\theta_\tau Y)(\omega):=Y(\theta_{\tau(\omega)}\omega),\tag{21}$$

其中 $\theta_u\omega$ 由 (10) 式所决定.

集 $\{\tau=\infty\}$ 为 P^x-0 测集上设为 $W_\tau=0\in\mathbb{R}^m$ 和 $\theta_\tau h(W)=0$ (这里 $h:\Omega\to\mathbb{R}$ 和 $\Omega=C([0,\infty),\mathbb{R}^m)$. 对 Brown 族 $(W_t,\mathsf{P}^x)_{t\geqslant0,x\in\mathbb{R}^m}$ 来说, 下面的结果给出了强马氏性的公式. 不难验证, 下面的定理是第三章定理 4, 它是关于 Wiener 过程强马氏性更简单变形.

定理 2. 设对所有的 $x\in\mathbb{R}^m$ 有 $\mathsf{P}^x(\tau<\infty)=1$, 其中 τ 是相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant0}$ 的停时. 这时对每个 $x\in\mathbb{R}^m$ 和任意有界 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测泛函 $h:\Omega\to\mathbb{R}$, P^x-a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(\theta_t h(W)|\mathscr{F}_{\tau+})=\mathsf{E}^{W_\tau}h(W).\tag{22}$$

证. 由于 (21) 式可得 (注意, 过程 W 是给出的, 且 $\mathscr{F}=\mathscr{B}(C([0,\infty),\mathbb{R}^m))$

$$(\theta_\tau h(W.))(\omega)=h(W.(\theta_{\tau(\omega)}\omega))=h(\theta_{\tau(\omega)}\omega)=h(\omega(\cdot+\tau(\omega)))=h(W_{\cdot+\tau(\omega)}). \tag{23}$$

根据引理 7 公式 (22) 对 $h=\mathbf{1}_C$ 成立, 其中柱集

$$C=\{W_{t_1}\in B_1,\cdots,W_{t_n}\in B_n\},$$

$0\leqslant t_1<\cdots<t_n, B_1,B_2,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^m),\quad n\in\mathbb{N}.$

根据单调类定理, 得到 (22) 式对 $h=\mathbf{1}_A$成立, 其中 A 是 $\mathscr{F}$ 中的任意集合. 注意, 函数 (泛函) h 可以用 $\mathscr{F}$ 中事件的示性函数的线性组合来一致逼近. 于是就完成了定理的证明. □

注 1. 性质 (IV.2) 和 $\mathsf{E}^{W_\tau}f(W)$ 的 $\mathscr{F}_\tau|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测性, 自然在 (22) 式中可以用 $\mathscr{F}_\tau$ 来代替 $\mathscr{F}_{\tau+}$. 除此之外, 明显, 相对于较 "瘦小" 的 $\sigma-$ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0}$ 的停时总是相对于较 "丰富" 的 $\sigma-$ 代数流 $\{\mathscr{F}_{t+}\}_{t\geqslant0}$ 的停时. 公式 (22) 被推广到 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测 (不一定有界) 泛函 h, 对它来说要对所有的 $x\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\mathsf{E}^x|h(W)|<\infty. \tag{24}$$

对此, 只需要研究下面形式的有界泛函

$$h_N(\omega):=h(\omega)\mathbf{1}_{\{|h(\omega)|\leqslant N\}},$$

利用对它们已经证明公式 (22), 再考虑到对每个 $\omega\in\Omega$ 当 $N\to\infty$ 时有 $h_N(\omega)\to h(\omega)$.

§6. 对 Brown 运动还有一个强马氏性的有用公式, 它包含在下面的习题中.

1. 试证, 定理 1 中如果用非负随机变量 $\eta\in\mathscr{F}_{\tau+}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 且对所有的 $x\in\mathbb{R}^m$ 有 $\mathsf{P}^x(\eta<\infty)=1$, 来代替常数 $u\geqslant0$, 该定理依然成立. 确切地说, 对每个 $x\in\mathbb{R}^m$, P^x-a.s. 有

$$\mathsf{E}^x(f(W_{\tau+\eta})|\mathscr{F}_{\tau+})=(T^\eta f)(W_\tau), \tag{25}$$

其中 $(T^\eta f)(W_\tau)$ 应理解为在公式 $(T^tf)(z)=\int_{\mathbb{R}^m}f(y)P(z,t,dy)$; 中用 $t=\eta(\omega)$ 和 $z=W_{\tau(\omega)}(\omega)$ 来代替, 而转移函数 $P(z,t,B)$ 由公式 (3) 给出.

2. 公式 (25) 左半部分是由公式 (17) 左半部分用 η 代替 u 得到的. 但是如果在公式 (17) 右半部分用 η 代替 u, 取 $\mathsf{E}^{W_\tau}f(W_\eta)$ (即先计算 $\phi(z)=\mathsf{E}^zf(W_\eta)$, 然后再取 $\phi(W_\tau)$), 则产生, 一般来说, 是不正确的等式. 试验证此事.

例 1. 试验证, 借助于 (25) 式 (当 $m=1$) 可以找到随机变量 $\tau_a=\inf\{t\geqslant0: W_t=a\}$, 其中 $a>0$ 的分布 (对从 0 点出发的 Brown 运动来说, 这个问题解其他两种解法是在第三章 §10 和第五章的补充与习题中).

设在 (25) 式中 $\tau=\tau_a$ 和 $\eta=(t-\tau)\vee 0$, 其中 $t>0$. 这时对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 有 $\mathsf{P}^x(\tau<\infty)=1$, 显然, $\eta\in\mathscr{F}_{\tau+}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 且对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 有 $\mathsf{P}^x(\eta<\infty)=1$. 除此之外, 对 $A=\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_{\tau+}$ 有 $f(W_{\tau+\eta})\mathbf{1}_A=f(W_t)\mathbf{1}_A$. 因此, 根据 (25) 式, 对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 和 $f=\mathbf{1}_B$, 其中 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 有

$$\mathsf{E}^x\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B(W_t)=\mathsf{E}^x\mathbf{1}_A(T^\eta\mathbf{1}_B)(W_\tau). \tag{26}$$

这里左半部分是 $\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t\in B)$. 因为 $W_\tau=a$ (P^x–a.s.) 对每个 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$(T^\eta\mathbf{1}_B)(W_\tau)=(T^\eta\mathbf{1}_B)(a)=P(a,\eta,B).$$

进而, (26) 式右半部分等于

$$\int_{\{\tau<t\}}P(a,\eta,B)\mathsf{P}^x(d\omega)=\int_{\{\eta>0\}}\int_B\frac{e^{-\frac{(y-a)^2}{2\eta(\omega)}}}{\sqrt{2\pi\eta(\omega)}}dy\mathsf{P}^x(d\omega)=J^x(a,t,B).$$

对集合 $\{\omega:\eta(\omega)>0\}$ 中的每个 ω, 正态随机变量 $\mathsf{N}(a,\eta(\omega))$ 的密度关于过点 a 的垂直线是对称的. 因此,

$$J^x(a,t,B)=J^x(a,t,2a-B).$$

其中 $2a-B$ 是集合 B 关于过点 a 的垂直线的反射. 这样,

$$\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t\in B)=\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t\in 2a-B). \tag{27}$$

取 $x<a, B=(-\infty,a)$ 和 $t>0$. 这时 $\{W_t>a\}\subset\{\tau<t\}$, 由于 (27) 式

$$\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t<a)=\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t>a)=\mathsf{P}^x(W_t>a).$$

因此, 考虑到对所有的 $a,x\in\mathbb{R}$ 有 $\mathsf{P}^x(W_t=a)=0$, 得出

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^x(\tau<t)&=\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t<a)+\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t\geqslant a)\\&=\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t<a)+\mathsf{P}^x(\tau<t,W_t>a)\\&=2\mathsf{P}^x(W_t>a)=2\int_a^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}dy.\end{aligned}$$

前面已经假设 $a>0$ 和 $x<a$. 作为习题有对任意的 $a,x\in\mathbb{R}$ 结果成立. □

附录 7
狄利克雷问题的概率解

§1. 在附录 6 中所述的多维 Brown 运动的性质给出了在概率意义下经典狄利克雷 (Dirichlet) 问题解的可能性 (参见下面的定理 1). 回顾一下, 这个问题的提出. 在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上要求找出一个调和函数 g, 使得在区域的边界 ∂G 上与给定的有界可测函数 f 相重合, 其中 $f \in \mathscr{B}(\partial G)|\mathscr{B}(\mathbb{R}), \partial G$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集.

换句话说, 寻找函数 $g = g(x_1, \cdots, x_m)$ 满足方程

$$\Delta g = 0 \tag{1}$$

且边界条件

$$g|_{\partial G} = f, \tag{2}$$

其中 Δ 是 Laplace 算子.

我们进行一些准备工作. 定义 m 维 Brown 运动 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 首出边界 ∂G 的时刻 $\tau_{\partial G}$:

$$\tau_{\partial G} = \inf\{t \geqslant 0 : W_t \in \partial G\}. \tag{3}$$

正如在附录 6 中所述, 在空间 $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^m)$, 且具有该空间的 Borel $\sigma-$ 代数 $\mathscr{F}$ 上直接给出的 Brown 运动 W. 与前面一样, P 是过程 W 的分布, $\mathbb{F}$ 是自然 $\sigma-$ 代数流. 关于概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 和 $\sigma-$ 代数流 $\mathbb{F}$ 作了通常性的假设.

根据第三章定理 3, 随机变量 $\tau_{\partial G}$ 是关于 $\sigma-$ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ 的停时. 设 $\nu = \tau_{\partial G}$, 且引入泛函

$$h(w) = f(W_\nu). \tag{4}$$

不难发现, 由于过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 的连续性有 $W_\nu \in \partial G$. 因为 $W_\nu \in \mathscr{F}_\nu|\mathscr{B}(\partial G), \mathscr{F}_\nu \subset \mathscr{F}$ 和 $f \in \mathscr{B}(\partial G)|\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 则 h 是有界 $\mathscr{F}|\mathscr{B}(\mathbb{R})-$ 可测泛函.

对开集 G 的每一点 x, 取半径为 $R>0$, 中心在 x 包含在 G 的开球

$$V_R(x)=\{y:|y-x|<R\},$$

研究球 $V_r(x)=\{y:|y-x|\leqslant r\}$, 其中 $r<R$. 类似 (3) 式可以定义

$$\tau_{\partial V_r(x)}=\inf\{t\geqslant 0:W_t\in\partial V_r(x)\},\tag{5}$$

以后设 $\tau=\tau_{\partial V_r(x)}$. 根据第三章定理 3 这个 τ 是相对于 $\sigma-$ 代数族 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的停时.

我们需要在附录 6 的 §5 中引入的推移算子 θ_τ 和 §1 中定义的测度 P^x.

以后假设如果函数 $Y(\omega)$ 在集合 D 的外部没有定义, 则对 $\omega\notin D$ 有 $Y(\omega)\mathbf{1}_D:=0$.

引理 1. 对每个 $x\in\mathbb{R}^m$ 和任意的 $r>0$, 使得 $[V_r(x)]\subset G,\mathsf{P}^x$–a.s. 有

$$\theta_\tau f(W_\nu)\mathbf{1}_D=f(W_\nu)\mathbf{1}_D\tag{6}$$

其中 $D=\{\nu<\infty\},\nu=\tau_{\partial G},\tau=\tau_{\partial V_r(x)}$.

证. 设 $\Omega_x=x+C_0([0,\infty);\mathbb{R}^m)$, 其中 $x\in\mathbb{R}^m$. 注意, 对所有的 $x\in\mathbb{R}^m$ 有 $\mathsf{P}^x(\Omega_x)=1$. 从 x 出发的轨道要走出 ∂G 一定先走出球 $V_r(x)$ 的边界. 因此, 如果 $\omega\in D\bigcap\Omega_x$, 则 Brown 运动轨道的连续性导出不等式

$$\tau(\omega)<\nu(\omega)\quad(<\infty).\tag{7}$$

注意, 对所有的 $u,t\geqslant 0$ 有 $W_u(\theta_t\omega)=W_{u+t}(\omega)$. 取任意的 $\omega\in D\bigcap\Omega_x$. 对它来说, 设 $\tau(\omega)=t$. 由于 (6.21) 得到等式

$$\theta_\tau f(W_\nu)(\omega)=f(W_{\nu(\theta_t\omega)}(\theta_t\omega))=f(W_{t+\nu(\theta_t\omega)}(\omega)).\tag{8}$$

现在只需要验证, 对所研究的点 ω 有

$$t+\nu(\theta_t\omega)=\nu(\omega).\tag{9}$$

由 (7) 式有 $\nu(\omega)>t$. 此外, 对 $s<t,W_s(\omega)\in G$ 和

$$\begin{aligned}t+\nu(\theta_t\omega)&=t+\inf\{u\geqslant 0:W_u(\theta_t\omega)\in\partial G\}\\&=t+\inf\{u\geqslant 0:W_{t+u}(\omega)\in\partial G\}=\inf\{s\geqslant 0:W_s(\omega)\in\partial G\}=\nu(\omega).\end{aligned}$$

这样, 关系式 (9) 成立, 与 (8) 式一起证明了性质 (6). □

§2.　Dirichlet 问题的解.

定理 1. 设区域 $G \subset \mathbb{R}^m$, 那样, 使得对每个 $x \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\mathsf{P}^x(\tau_{\partial G} < \infty) = 1. \tag{10}$$

这时, 对在 ∂G 上有界可测函数 f, 具有边界条件 (2) 的 Dirichlet 问题 (1) 的解存在, 且以下面"概率"形式的公式给出

$$g(x) = \mathsf{E}^x f(W_{\tau_{\partial G}}),\quad x \in G \bigcup \partial G. \tag{11}$$

证. 设 $\nu = \tau_{\partial G}$. 因为对 $x \in \partial G$ 有 P^x–a.s. $\nu = 0$ 和 $W_0 = x$, 则对所给出的函数 g 来说, 边界条件 (2) 是满足的.

现验证 (1) 式. 考虑到附录 6 中的引理 3, 则 $f(W_\nu)$ 是有界随机变量 (参见, 公式 (4) 后面的讨论), 可看出由公式 (11) 所定义出的函数 $g(x)$ 是对所有 $x \in \mathbb{R}^m$ 有界和 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m)|\mathscr{B}(\mathbb{R})$– 可测的.

由于 (10) 式, (6) 式和 (6.22) 式, 对任意的点 $x \in G$ 有

$$\mathsf{E}^x f(W_\nu) = \mathsf{E}^x \theta_\tau f(W_\nu) = \mathsf{E}^x \mathsf{E}^{W_\tau} f(W_\nu), \tag{12}$$

这里和以后都要作如下的简化, 如果实函数 $Y(\omega)$ 没有定义在集合 $D = \{\nu < \infty\}$ 之外, 则 $\mathsf{E}^x Y := \mathsf{E}^x(Y\mathbf{1}_D)$ (当最后积分存在时), 而 $Y\mathbf{1}_D$ 应该理解为在集合 $\{\nu < \infty\}$ 上为 Y, 在集合 $\{\nu = \infty\}$ 上为 0.

设 $\mathsf{Q}^x = \mathsf{P}^x(W_\tau)^{-1}$ 是空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}^x)$ 上的随机变量 W_τ 在 $\partial V_r(x)$ 上的分布. 利用公式 (I.23) 有

$$\mathsf{E}^x H(Y) = \int_S H(y) \mathsf{P}^x Y^{-1}(dy),$$

$Y: \Omega \to S, Y \in \mathscr{F}|\mathscr{B}(S), S \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ 和 $H: S \to \mathbb{R}, H \in \mathscr{B}(S)|\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 由 (12) 式和 (11) 式得

$$g(x) = \int_{\partial V_r(x)} \mathsf{E}^y f(W_\nu) \mathsf{Q}^x(dy) = \int_{\partial V_r(x)} g(y) \mathsf{Q}^x(dy). \tag{13}$$

证明引入的分布函数 Q^x 在球 $\partial V_r(x)$ 上是均匀分布的. 考虑到 (6.1) 式和 (6.2) 式, 研究可以仅限制在点 $x = 0$. 除此之外, 只需要验证 (作为简单的习题, 试解释), 对任意正交 m 阶矩阵 U 有 $\mathsf{Q}^0 U^{-1} = \mathsf{Q}^0$. 测度 $\mathsf{Q}^0 U^{-1}$ 是在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上随机变量 $U(W_\alpha)$ 的分布, 其中 $\alpha = \tau_{\partial V_r(0)}$. 注意, $U(W_\alpha) = (UW)_\beta$, 这里 $\beta = \inf\{t \geqslant 0 : (UW)_t \in \partial V_r(0)\}$. 这是由于, 在正交变换下向量的欧氏长度保持不变. 此外, $\{(UW)_t, t \geqslant 0\}$ 依然是空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的标准 Brown 运动. 最后是由于公式 (II.3) 和 $UU^* = I$, 其中 I 是 m 阶单位矩阵, 从而得出.

这样, 有界可测函数 $g: G \to \mathbb{R}$, 对每个 $x \in \mathbb{R}^m$ 和任意包含在区域 G 中的球 $V_r(x)$, 由于 (13) 式满足关系式

$$g(x) = \frac{1}{\mu_r(\partial V_r(x))} \int_{\partial V_r(x)} g(y)\mu_r(dy), \tag{14}$$

这里 μ_r 是 $\partial V_r(x)$ 上的 Lebesgue 测度. 由表示式 (14) 得出函数 g 是在区域 G 上的调和函数, 换句话说, $\Delta g = 0$. 为了这个结果最后的证明, 下面将给出的, 也是在 [24] 中所讨论的.

§3. 给出在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 中是调和函数 g 的积分条件.

引理 2. *设 $g(x)$ 是有界可测函数, 使得对任意的 $x \in G$ 和每个球 $V_r(x) \subset G$ 满足性质 (14). 这时, 函数 g 是在区域 G 上的调和函数.*

证. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 研究由下面公式定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑函数

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} c(\varepsilon)\exp\{1/(|x|^2 - \varepsilon^2)\}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

其中, $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的欧氏范数, 选取那样的 $c(\varepsilon)$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^m} v_\varepsilon(x)dx = c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon S_r \exp\{1/(r^2 - \varepsilon^2)\}dr = 1, \tag{15}$$

这里, $S_r = 2r^{m-1}\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中半径为 r 的球面积. 同样, 定义函数 g_ε 作为函数 g 和 v_ε 的卷积, 即设

$$g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} v_\varepsilon(x-y)g(y)dy, \quad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{16}$$

其中函数 g 认为在区域 G 外补充定义为 0. 很容易看出, 对每个 $\varepsilon > 0$ 函数 g_ε 在 $\mathbb{R}^m$ 中无限可微 ($g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$).

设 $G(\varepsilon) = \{x \in G : V_\varepsilon(x) \subset G\}$, 其中 $\varepsilon > 0$. 每个那样的集合是开集且当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时有 $G(\varepsilon) \uparrow G$, 即 $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} G(\varepsilon) = G$ 和 $\varepsilon < \varepsilon'$ 时有 $G(\varepsilon') \subset G(\varepsilon)$. 由 (16) 式, 考虑到 (15) 式和 (14) 式, 对 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in G(\varepsilon)$ 找到

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} g(x+z)v_\varepsilon(z)dz = \int_{V_\varepsilon(0)} g(x+z)v_\varepsilon(z)dz \\ &= c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon \int_{\partial V_r(0)} g(x+z)\exp\{1/(r^2-\varepsilon^2)\}\mu_r(dz)dr \\ &= c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon \exp\{1/(r^2-\varepsilon^2)\}\int_{\partial V_r(0)} g(x+z)\mu_r(dz)dr \\ &= g(x)c(\varepsilon)\int_0^\varepsilon S_r \exp\{1/(r^2-\varepsilon^2)\}dr = g(x). \end{aligned}$$

因此, 对 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in G(\varepsilon)$ 有 $g(x) = g_\varepsilon(x)$. 所以对每个 $\varepsilon > 0, g \in C^\infty(G(\varepsilon))$, 也就是说 $g \in C^\infty(G)$.

固定任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in G(\varepsilon)$. 对 $z \in V_r(0)$, 根据泰勒 (Taylor) 公式有

$$g(x+z) = g(x) + \sum_{k=1}^{m} z_k \frac{\partial g(x)}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} z_k z_j \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_k \partial x_j} + R(x,z),$$

这里, 当 $\varepsilon \to 0$ 时有

$$\sup_{z \in V_\varepsilon(0)} R(x,z) = o(\varepsilon^2).$$

注意, 对 $k, j = 1, \cdots, m$ 和 $\varepsilon > 0$ 有

$$\int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k \mu_\varepsilon(dz) = 0, \quad \int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k z_j \mu_\varepsilon(dz) = 0, \quad k \neq j.$$

因此,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{S_\varepsilon}\int_{\partial V_\varepsilon(0)} g(x+z)\mu_\varepsilon(dz) \\ &= g(x) + \frac{1}{2S_\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_k^2}\int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k^2 \mu_\varepsilon(dz) + \frac{1}{S_\varepsilon}\int_{\partial V_\varepsilon(0)} R(x,z)dz. \end{aligned} \tag{17}$$

考虑到, 当 $\varepsilon \to 0$ 时对 $x \in G(\varepsilon)$ 有

$$\frac{1}{S_\varepsilon}\int_{\partial V_\varepsilon(0)} R(x,z)dz = o(\varepsilon^2)$$

和

$$\int_{\partial V_\varepsilon(0)} z_k^2 \mu_\varepsilon(dz) = \frac{1}{m}\int_{\partial V_\varepsilon(0)} \sum_{j=1}^{m} z_j^2 \mu_\varepsilon(dz) = \frac{\varepsilon^2 S_\varepsilon}{m},$$

由于 (17) 式得出, 对 $x \in G(\varepsilon)$ 有

$$\frac{\varepsilon^2}{2m}\Delta g(x) + o(\varepsilon^2) = 0.$$

由此可得对所有的 $x \in G$ 有 $\Delta g = 0$. □

这样, 引理 2, 因而定理 1 得证. □

§4. 将定理 1 的证明与下面习题的结果进行有意义的比较.

1. 试举例说明, 有那样的区域 G, 使得具有在 ∂G 上边界条件 $f = 0$ 的 Dirichlet 问题 (1) 有无界的解.

2. 试证, 当 $m \geqslant 2$ 时, 从点 $x \in B_r(0) \setminus \{0\}$ 出发的 Brown 运动, (以概率 1) 走出这个排除中心的球, 同时不走进点 0. 进而, 在区域 $G = \{y \in \mathbb{R}^m : 0 < |y| < r\}$ 上 Dirichlet 问题 (1),(2) 的有界解将仅由在球面 $|y| = r$ 上函数 f 的值所确定.

注 1. 如果 G 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界区域, 则条件 (10) 总是满足的. 这是由于过程 W 的每个分量满足于重对数律 (参见, 第三章定理 8). 以后, 如果 G 是有界区域, 则 ∂G 是紧集, 看作是有界闭集. 因此, 如果对那样的区域 G 函数 f 在 ∂G 上连续, 则它自然而然是有界的. 由于附录 6 中的注 1 在定理 1 中的 f 有界性条件可以要求为, 对所有的 $x \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\mathsf{E}^x|f(W_{\tau_{\partial G}})| < \infty. \tag{18}$$

§5. 研究 Dirichlet 问题解的唯一性.

定理 2. 设满足定理 1 的条件. 这时, 每个具有边界条件 (2), 问题 (1) 的有界解将由公式 (11) 给出.

证. 设 g 是区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上的有界调和解, 且 $g|_{\partial G} = f$. 设 $G_n = \{x \in G : \inf\limits_{g \in \partial G} |x - y| > 1/n\}$. 对 $x \in G_n, n \in \mathbb{N}, t \geqslant 0$ 研究相对于 $\sigma-$ 代数流 $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 的停时 $\beta_n(x,t) = t \wedge \tau_{\partial(G_n \bigcap V_n(x))}$. 其中 $\tau_M = \inf\{t \geqslant 0 : W_t \in M\}$ 对闭集 $M \subset \mathbb{R}^m$, 而 $V_n(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < n\}$. 根据对带有 $\beta = \beta_n$ 的 Ito 公式有

$$g(W_\beta) = g(W_0) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^\beta \frac{\partial g(W_s)}{\partial x_k} dW_s^{(k)} + \frac{1}{2}\int_0^\beta \Delta g(W_s)ds. \tag{19}$$

因为对 $s \leqslant \beta$ 有 $W_s \in G$, 所以 (19) 式中右半部分第二个积分等于 0.

(19) 式两边取数学期望 E^x 有

$$\mathsf{E}^x g(W_\beta) = \mathsf{E}^x g(W_0) = g(x).$$

对每个 $x \in G$, 对 t 取极限 $(t \to \infty)$, 然后再对 n 取极限 $(n \to \infty)$ P^x-a.s. 有

$$g(W_{\beta_n(x,t)}) \to g(W_{\tau_{\partial G}}),$$

由于 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\mathsf{E}g(W_{\beta_n(x,t)}) \to \mathsf{E}^x g(W_{\tau_{\partial G}}),$$

这样就证明了函数 g 表示成 (11) 式的形式, 即 Dirichlet 问题解的唯一性. □

§6. 研究在靠近区域 G 边界附近, Dirichlet 问题解的行为.

对 $\mathbb{R}^m$ 中开集 G 引入停时

$$\nu_G := \inf\{t > 0 : W_t \in \overline{G}\}, \quad \text{其中} \quad \overline{G} = \mathbb{R}^m \setminus G.$$

定义 1. 点 $z \in \partial G$ 称作规则的, 如果 $\mathsf{P}^z(\nu_G = 0) = 1$. 边界 ∂G 上的其他点称作不规则的 (或奇异的).

注意, 这个规则性的定义在某种意义上是具有局部性, 点 $z \in \partial G$ 是规则的当且仅当对某个点作为 $G \bigcap V_r(z)$ 的边界上的点是规则的, 其中 r 是某个 > 0 的常数, $V_r(z) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - z| < r\}$.

3. 试证, 如果 $m = 1$, 则边界 ∂G 上的任意点是规则的.

定理 3 ([148; p.145]). 设 $m \geqslant 2$ 和 $z \in \partial G$. 这时, 下面的条件是等价的:

1) z 是区域 G 的边界 ∂G 上的规则点;

2) 对任意的有界连续函数 $f : \partial G \to \mathbb{R}$ 有 $\lim\limits_{G \ni x \to z} \mathsf{E}^x f(W_{\tau_{\partial G}}) = f(z)$;

3) 对任意的 $\varepsilon > 0$ 有 $\lim\limits_{G \ni x \to z} \mathsf{P}^x(\tau_{\partial G} > \varepsilon) = 0$.

边界上的点是规则的最简单充分性条件是由下面的习题给出

4. 设 $z \in \partial G$, 可以找到对某个 $r > 0$ 以点 z 为顶点包含在 $\mathbb{R}^m \setminus (G \bigcap V_r(z))$ 内的锥体. 这时, z 是规则点.

回顾一下, 以 0 点为顶点的锥体是集合

$$C(y, \theta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (x, y) \geqslant |x| \cdot |y| \cos\theta\}, \quad 其中 \quad y \neq 0 \in \mathbb{R}^m, \theta \in [0, \pi].$$

前面条件中所述以 z 点为顶点的锥体的集合是 $z + C(y, \theta)$, 其中, $y \neq 0$ 和 $\theta \in (0, \pi)$. 与定理 1 中条件 (10) 相关的是下面的有趣的习题

5. ([148; p.253]). 设 $v(x) = \mathsf{P}^x(\tau_{\overline{G}} = \infty)$. 试证, $v(x)$ 是区域 G 上的调和函数, 如果 z 是边界上的规则点, 则 $\lim\limits_{G \ni x \to z} g(x) = 0$. 特别的, 如果任意边界上的点是规则的, 则函数 $\lambda v + g(x)$, 其中

$$g(x) = \mathsf{E}^x f(W_{\tau_{\overline{G}}}) \mathbf{1}_{\{\tau_{\overline{G}} < \infty\}},$$

对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是 Dirichlet 问题 (1),(2) 的解. 除此之外, 这个问题任意的有界解都有上面的形式.

§7. 下面的两个结果是相对于扩散过程的, 一般地说, 要比 Brown 运动广.

预先回顾一下生成元的定义.

定义 2. 称作在 Banach 空间 S 上半群 $(T_t)_{t \geqslant 0}$ 的生成元 (或无穷小算子) 的算子 A, 是如下的形式定义的:

$$Af = \text{s-}\lim_{t \to 0+} \frac{T_t f - f}{t},$$

定义在那些元素 $f \in S$ 上, 使得上面的极限 (依范数) 存在.

定理 4 ([169; p.95]). 设 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中过程, 且为下面随机微分方程的解

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^m. \tag{20}$$

设 A 是由下面公式给出的半群的生成元 $(T_tf)(x) = \mathsf{E}^x f(X_t)$, 其中, E^x 应该指出的是 $X_0 = x$.

这时算子 A 的定义域 $\mathscr{D}_A$ 中包含着 $C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 中的所有函数 (有界连续函数, 且具有有界连续的一阶、二阶导数) 且对 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 有

$$Af(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

注 2. 因为 Brown 运动 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 是方程 $dX_t = dW_t$ 的解 (这里, $b = 0, \sigma = I$ 是 m 阶单位矩阵), 则定理 4 指出, 对 Brown 运动所对应半群生成元是定义在 $C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 中函数的算子是 $\Delta/2$ 的扩张.

定理 5 (邓肯 (Dynkin) 公式). 假设满足前面定理的条件, τ 是停时, 且 $\mathsf{E}\tau < \infty$. 设 f 是 $\mathscr{D}_A$ 中的有界函数, 这时, 对每个 $x \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\mathsf{E}^x f(X_\tau) = f(x) + \mathsf{E}^x\left(\int_0^\tau Af(X_s)ds\right). \tag{21}$$

例 1. 设 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^m (m \geqslant 2)$ 中的 Brown 族. 求数学期望 $\mathsf{E}^x\tau$, 其中 $\tau = \tau_{\partial V_r(0)}$ 是 Brown 运动首次走出以 0 为球心, r 为半径球 ($|x| \leqslant r$) 的时刻.

设 $\tau_n = \tau \wedge n, n \in \mathbb{N}$. 取函数 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$, 使得当 $|y| < r$ 时有 $f(y) = |y|^2$. 这时, 由于 (21) 式和注 2, 对 $x \in V_r(0)$ 有

$$\mathsf{E}^x f(W_{\tau_n}) = f(x) + \mathsf{E}^x\left(\int_0^{\tau_n} \frac{1}{2}\Delta f(W_s)ds\right).$$

因此,

$$\mathsf{E}^x f(W_{\tau_n}) = |x|^2 + \mathsf{E}^x\left(\int_0^{\tau_n} mds\right) = |x|^2 + m\mathsf{E}^x\tau_n.$$

考虑到, 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $|W_{\tau_n}| \leqslant r$, 得到 $\mathsf{E}^x\tau_n \leqslant (r^2 - |x|^2)/m$. 显然, P^x-a.s. $\tau < \infty$ 和当 $n \to \infty$ 时有 $\tau_n \uparrow \tau$. 因此, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\mathsf{E}^x f(W_{\tau_n}) \to \mathsf{E}^x f(W_\tau) = r^2,$$

和

$$\mathsf{E}^x\tau = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}^x\tau_n = (r^2 - |x|^2)/m.$$

6. 设 $x \notin V_r(0)$. 试求概率 $\mathsf{P}^x(\tau < \infty)$, 其中 τ−Brown 运动 (在 $\mathbb{R}^m$ 中, $m \geqslant 2$) 首次到达球 $V_r(0), r > 0$ 的时刻.

§8. 讨论 Dirichlet 问题 (1)~(2) 的某些推广.

设在 $C^2(\mathbb{R}^m)$ 中给定半椭圆算子

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

这里的半椭圆性意味着对每个 $x\in\mathbb{R}^m$, 对称矩阵 $a=(a_{ij})$ 的特征值是非负的 (而椭圆性意味着对每个 $x\in\mathbb{R}^m$, 对称矩阵 $a=(a_{ij})$ 的特征值是正的).

对区域 $G\subset\mathbb{R}^m$ 和连续函数 $f:\partial G\to\mathbb{R}$, 我们类比着对 Dirichlet 问题中的 Laplace 算子来寻找被称作 L – 调和扩张 f, 即寻找那样的函数 g, 使得在 G 中有

$$Lg=0 \tag{22}$$

和对所有的 "规则" 点 $z\in\partial G$ 有

$$\lim_{G\ni x\to z}g(x)=f(x). \tag{23}$$

"概率的途径" 去解这个问题是: 与算子 L 联系的相应的 m 维扩散过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$, 即乃是方程 (20) 解的过程, 其中 $W=\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 Brown 运动, 而矩阵 $a=(a_{ij})$ 那样有 $\sigma\sigma^*=a$.

可以验证, 那样过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 的生成元 A 在 $C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 上与算子 L 相重合. 因此, 类似定理 1 自然而然地要研究函数

$$g(x)=\mathsf{E}^x f(X\tau_{\partial G}) \tag{24}$$

且要研究它是否满足关系式 (22) 式和 (23) 式.

为了实现这个目的, 首先需要关心的是方程 (20) 解的*存在性*. 为此, 只需要系数 b 和 σ 对某个 $M>0$ 满足利普希茨 (Lipschitz) 条件

$$|b(x)-b(y)|+|\sigma(x)-\sigma(y)|\leqslant M|x-y|,\quad x,y\in\mathbb{R}^m, \tag{25}$$

其中范数 $|\cdot|$ 意味着既是对向量相应的也是对矩阵. 此外, 对 σ 的条件可以要求矩阵 a 的所有元素是属于 $C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 类. 为了在 (24) 式中函数 g 有意义, 自然而然地要假设, 对所有的 $x\in G$ 有

$$\mathsf{P}^x(\tau_{\partial G}<\infty)=1, \tag{26}$$

其中 $\tau_{\partial G}$ 是过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 首次走出区域 G 的边界时刻. (前面对 Brown 运动所定义边界上的点的 "规则性", 同样也适用于扩散过程.)

遗憾的是, 与 Brown 运动 (当 $L=\Delta/2$) 的区别是在一般情况下前面所指出的途径不能导出问题 (22)~(23) 的解. 但是, 对这个问题进行一些形式上的改变, 前面所述的思想可以得到被称作 "Dirichlet 随机问题" 的 "概率" 解.

定义 3. 局部有界可测函数 g 称作在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上相对于扩散过程 $X, X-$调和的, 如果对所有的 $x \in G$ 和所有有界开集 $U \subset G, x \in U$ 有

$$g(x) = \mathsf{E}^x g(X_{\tau_{\partial U}}).$$

设 $f = f(x)$ 是定义在 $x \in \partial G$ 上的某个有界可测函数. 称函数 $g = g(x), x \in G$, 是 "Dirichlet 随机问题" 的解, 如果

$$g \text{ 是在 } G \text{ 上 } X- \text{ 调和函数} \tag{27}$$

且对 $x \in G, \mathsf{P}^x-$a.s. 有

$$\lim_{t \uparrow \tau_{\partial G}} g(X_t) = f(X_{\tau_{\partial G}}). \tag{28}$$

定理 6 ([169; p.139]). 设 f 是区域 ∂G 上的有界可测函数, 其中 $G \subset \mathbb{R}^m$. 这时, 存在 "Dirichlet 随机问题" (27)~(28) 的解, 它由公式 (24) 给出. "Dirichlet 随机问题" 解在下面的意义下是唯一的, 即如果 g 是 G 上的有界函数, 且满足 (27) 式和 (28) 式, 则 g 由公式 (24) 给出.

引入下面的一个结果: 在一定的条件下 "Dirichlet 随机问题" 的解也是最初 Dirichlet 问题 (22)~(23) 的解.

对非负整数 k 和 $\alpha \in (0, 1]$, 设 $C^{k+\alpha}(G)$ 表示定义在区域 $G \subset \mathbb{R}^m$ 上那样实函数的全体, 它存在直到且包含 k 阶的偏导, 且第 k 阶导数满足以 α 为指数的赫尔德 (Hölder) 条件. 如同以前一样, 假设满足所述的条件, 以保证存在方程 (20) 的解, 其中包含条件 (25).

定理 7 ([169; p.141]). 设 L 是区域 G 上的一致椭圆算子, 即对 $x \in G$ 所有的矩阵 $(a_{ij}(x))$ 的特征值都是不等于 0 的某个正数. 设 f 是 ∂G 上的有界连续函数, 使得 $f \in C^{2+\alpha}(G)$, 对某个 $\alpha \in (0, 1)$. 这时公式 (24) 给出了 Dirichlet 问题 (22)~(23) 的解.

Brown 运动和扩散过程可以得到 "概率" 解, 不仅仅是 Dirichlet 问题, 而且对许多其他偏微分方程理论中的经典问题 (柯西 (Cauchy) 问题, 施特藩 (Stefan) 问题等等) 也如此. 引入关于这方面的一个著名结果.

定理 8 (费因曼 (Feynman) – 卡茨 (Kac) 公式). 设函数 $f \in C_0^2(\mathbb{R}^m)$ 和

$$u(t, x) = \mathsf{E}^x \left(f(X_t) \exp\left\{ -\int_0^t q(X_s) ds \right\} \right), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

其中 q 是有界连续函数. 这时,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au - qu,$$

这里 A 是扩散过程 $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ 的生成元.

关于前面所涉及问题的类似情况，以及关于研究其他偏微分方程的概率的途径，可参见，例如 [5, 95, 148, 169].

附录 8
大偏差

---

§1. 在许多有趣的问题中不得不去研究非常小概率事件族. 正如在第四章 §19 中所见到的那样, 在一定的条件下, 初始资本为 y_0 的资产破产的概率是以指数形式很快的衰减 (依 y_0). 在许多情况里, 可以证明, 所研究概率的衰减速度 (依某个参数) 为同一幂指数. *大偏差*述语的产生是与研究独立随机变量和有关系. 如果 $X_1, X_2, \cdots$ 是中心化的独立同分布随机变量序列, 且 $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n (n \in \mathbb{N})$, 则被称作*大偏差的*是事件, 它是由 S_n 偏离 0 (即中值) 的阶是 n 所组成. 而与*正态偏差*有区别, 正如其在中心极限定理中所提到的, 偏离的阶是 $\sqrt{n}$, 现在涉及关于形如 $\{S_n \geqslant xn\}, \{S_n \leqslant -xn\}, \{|S_n| \geqslant xn\}$ 的事件, 其中 $x > 0$. 于是, 经典的 Cramer 定理 (参见, 例如, [115]) 告诉我们, 在矩的生成函数 $\Psi(t) = \mathsf{E}\exp\{tX_1\}$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 一定条件下, 描述当 $n \to \infty$ 时对 $x > 0, (1/n)\log \mathsf{P}\{S_n \geqslant xn\}$ 的渐近行为*). 其等价形式可以研究 $(1/n)\log \mathsf{P}\{S_n/n \in F\}$, 这里闭集 F 是半直线 $[x, \infty)$. 自然也可以提出类似的问题, 它是不同于 $1/n$ 规范化因子的和 S_n 落入到集合 $B \subset \mathbb{R}$ 的概率. 结果将是依赖于规范化因子的选取, 和各项的分布以及集合 B.

下面所叙述的对所确定事件概率族的对数渐近性质研究方法, 是在泛函极限定理的一般理论框架下进行的: 研究在距离空间中的测度族. 在描述渐近性质时, 随后引入的*偏差函数* (*速率*) 起着关键作用. 这样对随机变量和的研究可以用随机过程族 (当然是规范化的) 来代替. 同时, 我们将指出以 Strassen 公式中的*重对数泛函定律*是与当 $\varepsilon \to 0$ 时, 过程 $\{\sqrt{\varepsilon}W(t), t \in [0, T]\}$ 的概率分布密切联系的, 其中 W 是 Wiener 过程. 为此, 将建立了 Schilder 定理. 为证明它, 同样要求偏差函数的性质, 以及关于 m 维 Wiener 过程行为的辅助性结果. 作为本章最后部分, 简单地研究了重对数律的一些其他推广.

---

*) log 表示以自然数为底的对数.

§2.　以后总是假设 S 是具有距离 ρ 的 Polish 空间.

定义 1.　函数 $f: \mathsf{S} \to [-\infty, +\infty]$ 称作*在点 $x \in \mathsf{S}$ 下半连续的*, 如果对 S 中任意的点序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, 当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x$ 有下面的不等式

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x).$$

很容易看出, 这个性质等价于关系式

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{y\in V_\varepsilon(x)} f(y) = f(x),$$

其中 $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathsf{S} : \rho(x, y) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

称作函数 $f: \mathsf{S} \to [-\infty, \infty]$ *是下半连续的*, 如果它在每一点 $x \in \mathsf{S}$ 上下半连续. 不难验证, 函数下半连续的当且仅当对任意的 $c \in \mathbb{R}$ 集合 $\{x : f(x) \leqslant c\}$ 是闭的.

定义 2.　函数 $I: \mathsf{S} \to [0, \infty]$ 称作*偏差函数* (速率函数), 如果

1) $I \not\equiv \infty$;

2) I 下半连续;

3) 对任意的 $c \in [0, \infty]$, 集合 $\{x : I(x) \leqslant c\}$ 是紧集.

注意, 由 3) 可以得到性质 2), 因为传统上它们都在定义之中.

定义 3.　称作 $(\mathsf{S}, \mathscr{B}(\mathsf{S}))$ 上测度 (概率) 族 $\{\mathsf{P}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *满足具有偏差函数 I 的大偏差原理*, 如果

1°. 对任意的闭集 F, 有 $\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log \mathsf{P}_\varepsilon(F) \leqslant -I(F)$;

2°. 对任意的开集 G, 有 $\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log \mathsf{P}_\varepsilon(G) \geqslant -I(G)$, 其中

$$I(B) := \inf_{x\in B} I(x), \quad B \subset \mathsf{S}.$$

特别的, 如果对 $B \in \mathscr{B}(\mathsf{S})$ 有

$$\inf_{x\in B^0} I(x) = \inf_{x\in[B]} I(x),$$

这里, B^0 和 $[B]$ 相应的表示集合 B 的内核和闭包, 则由 1° 和 2° 得出, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时有

$$\mathsf{P}_\varepsilon(B) = \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}[I(B) + o(1)]\right\}.$$

这样, 如果 $0 < I(B) < \infty$ 则当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $\mathsf{P}_\varepsilon(B)$ 以指数衰减, 形式上可以写成函数 $\exp\{-I(B)/\varepsilon\}$.

概率测度弱收敛的定义与定义 3 相近的 (参见第五章定理 1). 注意, 利用定义 3 的变形, 在那里因子 ε 的地方可以用*速度* $v(\varepsilon)$ 来代替, 即某个正函数 $v(\varepsilon) \to 0$, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时.

引入类似测度族密度的概念.

定义 4. 测度族 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 称作指数胎紧的, 如果对任意的 $M>0$ 存在紧集 $K_M\subset\mathsf{S}$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathsf{P}_n(\mathsf{S}\setminus K_M)\leqslant -M.$$

不难看出, 如果测度族 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足大偏差原理 (在定义 3 中用 $1/n$ 代替 ε, 用 P_n 代替 P_ε), 则它是指数胎紧的.

下面两个结果指出, 对测度族的大偏差原理与研究确定的函数族对这些测度的积分极限行为的联系. 第一个所介绍的结果 (参见, 例如, [115; p.32]) 称作瓦拉特汗 (Varadhan) 引理.

定理 1 (Varadhan). 设测度族 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足大偏差原理 (具有偏差函数 I). 设函数 $H:\mathsf{S}\to\mathbb{R}$ 是连续有上界的. 这时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{\mathsf{S}}e^{nH(x)}\mathsf{P}_n(dx)=\sup_{x\in\mathsf{S}}[H(x)-I(x)].$$

包含 Varadhan 引理的逆命题的结果有

定理 2 (布利克 (Bryc)[104]). 设测度族 $\{\mathsf{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 是指数胎紧的. 设对所有的 $H\in C_b(\mathsf{S})$ 当 $n\to\infty$ 时有

$$\Lambda_n(H):=\frac{1}{n}\log\int_{\mathsf{S}}e^{nH(x)}\mathsf{P}_n(dx)\to\Lambda(H)\in\mathbb{R},$$

这时, $\{\mathsf{P}_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足具有偏差函数 $I(x)=\sup\limits_{H\in C_b(\mathsf{S})}[H(x)-\Lambda(H)]$ 的大偏差原理.

关于在拓扑空间中测度族的大偏差原理, 参见, 例如, [114].

§3. 为了引入有实质内容的偏差函数 (同时满足大偏差原理的测度族) 的例子, 它们以后将要用到, 我们还需要一个简单的结果.

对 $B\subset\mathsf{S}$ 和 $\delta>0$, 设 B^δ 表示集合 B 的 $\delta-$ 邻域, 即

$$B^\delta=\{x\in\mathsf{S}:\rho(x,B)<\delta\}\ \text{这里,}\ \rho(x,B)=\inf\{\rho(x,y):y\in B\}.$$

引理 1. 如果 I 是偏差函数和 F 是 S 的闭子集, 则当 $\delta\downarrow 0$ 时有 $I(F^\delta)\to I(F)$.

证. 显然,

$$I(F^\delta)=\inf_{x\in F^\delta}I(x)\leqslant\inf_{x\in F}I(x)=I(F),$$

且函数 $I(F^\delta)$ 在 $[0,\infty]$ 上不增的. 假设 $I(F)<\infty$. 这时, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 可以找到 $x_n\in F^{1/n}$ 使得 $I(x_n)\leqslant I(F^{1/n})+1/n\leqslant I(F)+1$. 由于定义 2 的性质 3) 得到序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 属于某个 S 中的紧集 V. 因而, 存在 $x\in V$ 和子序列 $\{n_j\}$ 使得当 $j\to\infty$

时有 $x_{n_j} \to x$. 因此 $\liminf_{j\to\infty} I(x_{n_j}) \geqslant I(x)$. 除此之外, 因为 $x_{n_j} \in F^{1/n_j}$ 对 $j \in \mathbb{N}$ 所以 $x \in F$. 这样,

$$\begin{aligned} I(F) &\leqslant I(x) \leqslant \liminf_{j\to\infty} I(x_{n_j}) \leqslant \liminf_{j\to\infty} [I(F^{1/n_j}) + 1/n_j] \\ &= \liminf_{\delta\downarrow 0} I(F^{\delta}) \leqslant \limsup_{\delta\downarrow 0} I(F^{\delta}) \leqslant I(F). \end{aligned} \tag{1}$$

设 $I(F) = \infty$, 即对每个 $x \in F$ 有 $I(x) = \infty$. 假设当 $n \to \infty$ 时 $\{I(F^{1/n})\}_{n\geqslant 1}$ 不趋向 ∞. 这时可以找到 $M > 0$ 和序列 $\{r_j\}_{j\geqslant 1}$ 使得对所有的 $j \in \mathbb{N}$ 有 $I(F^{1/r_j}) \leqslant M$. 余下的讨论完全类似在 (1) 式中的估计. 引理得证. □

§4. 在空间 $\mathsf{S} = C([0,T];\mathbb{R}^m)$ 中引入函数 (泛函)

$$I(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |\dot{\varphi}|^2 dt, & \text{如果 } \varphi - \text{绝对连续函数, 且 } \varphi(0) = 0, \\ \infty, & \text{其他情况,} \end{cases} \tag{2}$$

这里, $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的欧氏范数, $\dot{\varphi}(t) = (\dot{\varphi}^{(1)}(t), \cdots, \dot{\varphi}^{(m)}(t))$, 向量函数 φ 的绝对连续性意味着, 对 $t \in [0,T], k = 1, \cdots, m$ 有

$$\varphi^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(0) + \int_0^t \dot{\varphi}^{(k)}(u)du, \quad \text{这里 } \dot{\varphi}^{(k)} \in L^1[0,T].$$

引理 2. *引入的函数 I 是在 S 上的偏差函数.*

证. 定义 3 的条件 1) 显然是满足的. 验证条件 3) 成立. 证明集合 $S_M = \{\varphi \in \mathsf{S} : I(\varphi) \leqslant M\}, M \geqslant 0$ 在 S 中是紧集. 对 $\varphi \in S_M$ 和 $s, t \in [0,T]$ 利用 Cauchy – Bunyakovskii – Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(s)| &= \left| \int_s^t \dot{\varphi}(u)du \right| \leqslant \int_s^t |\dot{\varphi}(u)|du \\ &\leqslant \left(\int_s^t |\dot{\varphi}(u)|^2 du \right)^{1/2} |t-s|^{1/2} \leqslant (2M|t-s|)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中对向量函数的积分, 如一般一样, 是对每个坐标分量取的积分.

因此, 对 $t \in [0,T]$ 有 $|\varphi(t)| \leqslant (2MT)^{1/2}$. 这样集合 S_M 是由一致有界且一致连续的函数所组成. 根据阿尔泽拉 (Arzela) – 阿斯科利 (Ascoli) 定理在 S 中 S_M 的闭集是紧集. 剩下只需要验证 S_M 是闭集.

对 $\varphi \in \mathsf{S}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 引入泛函

$$J_n(\varphi) := \frac{n}{2T} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(kT/n) - \varphi((k-1)T/n)|^2, \tag{4}$$

取闭集 $\mathsf{S}^{(0)}=\{\varphi\in\mathsf{S}:\varphi(0)=0\}$, 且假设

$$J(\varphi):=\begin{cases}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}J_n(\varphi), & \varphi\in\mathsf{S}^{(0)},\\ \infty, & \varphi\in\mathsf{S}\backslash\mathsf{S}^{(0)}.\end{cases}\tag{5}$$

由 (4) 式得出 $G(\varphi)=\sup\limits_n J_n(\varphi)$ 是在 S 上的下半连续函数 (如同连续函数的上确界). 对 $\varphi\in\mathsf{S}^{(0)}$ 有 $J(\varphi)=G(\varphi)$ 和对 $\varphi\in\mathsf{S}\backslash\mathsf{S}^{(0)}$ 有 $J(\varphi)=\infty$, 因此, 显然, J 是在 $\mathsf{S}^{(0)}$ 上的下半连续函数. 这样, 对性质 3) 来说只需要验证, 在 S 上有

$$J=I.\tag{6}$$

首先验证如果 $I(\varphi)<\infty$ 则 $J(\varphi)<\infty(\varphi\in\mathsf{S}^{(0)})$. 类似 (3) 式得到

$$\begin{aligned}J_n(\varphi)&=\frac{n}{2T}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{(k-1)T/n}^{kT/n}\dot\varphi(u)du\right|^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)T/n}^{kT/n}|\dot\varphi(u)|^2du=I(\varphi),\end{aligned}\tag{7}$$

因此, 有 $J(\varphi)\leqslant I(\varphi)<\infty$.

现设 $J(\varphi)<\infty$, 其中 $\varphi\in\mathsf{S}^{(0)}$. 用 $\varphi_n(n\in\mathbb{N})$ 表示逐段线性函数, 且节点 $(kT/n,\varphi(kT/n)),k=0,\cdots,n$.

显然,

$$J_n(\varphi)\leqslant J(\varphi)\quad 和\quad J_n(\varphi)=J_n(\varphi_n)=I(\varphi_n),\quad n\in\mathbb{N}.\tag{8}$$

设 $\psi\in C_0^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$. 考虑到, 当 $n\to\infty$ 时, φ_n 一致收敛到 φ, 有

$$\int_0^T\langle\varphi(t),\dot\psi(t)\rangle dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^T\langle\varphi_n(t)\dot\psi(t)\rangle dt,$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的内积. 根据分部积分公式有

$$\int_0^T\langle\varphi(t),\dot\psi(t)\rangle dt=-\lim_{n\to\infty}\int_0^T\langle\dot\varphi_n(t),\psi(t)\rangle dt.$$

注意到 (8) 式得到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\langle\varphi(t),\dot\psi(t)\rangle dt\right|&\leqslant\limsup_n\left(\int_0^T|\dot\varphi_n(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T|\psi(t)|^2dt\right)^{1/2}\\&\leqslant J(\varphi)\|\psi\|_{L^2},\end{aligned}$$

这里, $\|\cdot\|_{L^2}$ 是空间 $L^2[0,T]$ 中的范数, 该空间是由取值于 $\mathbb{R}^m$, 且每个坐标分量具有对 Lebesgue 测度平方可积的向量函数 (等价类) 所组成. 这样, 在 $L^2[0,T]$ 中到处稠密的空间 $C_0^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ 上产生有界线性泛函

$$F(\psi)=\int_0^T\langle\varphi(t),\dot\psi(t)\rangle dt,\tag{9}$$

它根据哈恩 (Hahn) – Banach 定理, 保泛地扩张到 $L^2[0,T]$ 上 (参见; 例如, [35; 第四章, §4, 第三段]). 再根据 Riesz 引理 (参见; 例如, [60; 第一卷, p.57]) 存在某个元素 $\alpha \in L^2[0,T]$ 有

$$F(\psi) = \int_0^T \langle \alpha(t), \psi(t) \rangle dt,$$

因为 $L^2[0,T] \subset L^1[0,T]$ 则分部积分, 对 $\psi \in C_0^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ 得到

$$F(\psi) = -\int_0^T \left\langle \int_0^t \alpha(u)du, \dot{\psi}(t) \right\rangle dt, \tag{10}$$

比较 (9) 式和 (10) 式得出

$$\varphi(t) = -\int_0^t \alpha(u)du, \quad t \in [0,T].$$

因此, φ 函数绝对连续和 $I(\varphi) < \infty$.

这样, 我们证明了

$$\{\varphi \in \mathsf{S} : I(\varphi) < \infty\} = \{\varphi \in \mathsf{S} : J(\varphi) < \infty\}.$$

集合 $\mathscr{S} = \{\varphi \in \mathsf{S} : I(\varphi) < \infty\}$ 称作卡麦隆 (Cameron) – 马丁 (Martin) 空间. 验证对 $\varphi \in \mathscr{S}$ 有 $I(\varphi) = J(\varphi)$.

设 $\varphi \in C^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$. 这时 $\sup\limits_{t\in[0,T]} |\ddot{\varphi}^{(j)}(t)| = c_j < \infty, j = 1, \cdots, m$. 因此, 利用 Taylor 公式得到

$$\begin{aligned} J_n(\varphi) &= \frac{n}{2T} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |\varphi^{(j)}(kT/n) - \varphi^{(j)}((k-1)T/n)|^2 \\ &= \frac{n}{2T} \sum_{k=1}^n |\dot{\varphi}((k-1)T/n)|^2 + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

因为 $\dot{\varphi} \in C([0,T];\mathbb{R}^m)$, 则

$$\frac{T}{2n} \sum_{k=1}^n |\dot{\varphi}((k-1)T/n)|^2 \to \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\varphi}(t)|^2 dt < \infty, \quad n \to \infty. \tag{11}$$

由 (5) 式, (8) 式和 (11) 式得出, 对 $\varphi \in C^\infty([0,T];\mathbb{R}^m), \varphi(0) = 0$ 有

$$J(\varphi) = I(\varphi). \tag{12}$$

如果 $\varphi \in \mathscr{S}$ 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 可以找到函数 $\varphi^{(\varepsilon)} \in C^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$, 使得 $\varphi^{(\varepsilon)}(0) = 0$ 和

$$I(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) = \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}^{(\varepsilon)}(t)|^2 dt < \varepsilon.$$

利用范数的性质 (在 $L^2[0,T]$ 中) 有

$$|I^{1/2}(\varphi) - I^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| \leqslant I^{1/2}(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) < \varepsilon^{1/2}, \tag{13}$$

因此, 考虑到 (7) 式和 (8) 式找到

$$\begin{aligned}|J_n^{1/2}(\varphi) - J_n^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| &= |I^{1/2}(\varphi_n) - I^{1/2}(\varphi_n^{(\varepsilon)})| \leqslant I^{1/2}(\varphi_n - \varphi_n^{(\varepsilon)}) \\ &= J_n^{1/2}(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) \leqslant I^{1/2}(\varphi - \varphi^{(\varepsilon)}) < \varepsilon^{1/2}.\end{aligned}$$

由此可见,

$$|J^{1/2}(\varphi) - J^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| \leqslant \varepsilon^{1/2}. \tag{14}$$

这样, 对 $\varphi \in \mathscr{S}$ 由于 (13) 式, (14) 式给出估计

$$\begin{aligned}|I^{1/2}(\varphi) - J^{1/2}(\varphi)| \leqslant |I^{1/2}(\varphi) - I^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| + |I^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)}) - J^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)})| \\ + |J^{1/2}(\varphi^{(\varepsilon)}) - J^{1/2}(\varphi)| \leqslant 2\varepsilon^{1/2},\end{aligned}$$

这就证明了 I 和 J 在 $\mathscr{S}$ 上相重合. 引理得证. □

§5. 在这一节中, 将建立概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上 m 维 Weiner 过程 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 的一些性质.

引理 3. 对任意的 $\gamma, v > 0$ 下面不等式成立:

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]} |W(t)| \geqslant \gamma\right) \leqslant 2m \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2mv}\right\}. \tag{15}$$

证. 对 $\theta \in \mathbb{R}^m$, 引入过程

$$X_\theta(t) = \exp\left\{\langle W(t), \theta\rangle - \frac{1}{2}|\theta|^2 t\right\}, \quad t \geqslant 0.$$

很容易验证, $\{X_\theta(t), t \geqslant 0\}$ 是相对于 Wiener 过程 W 所产生的自然 $\sigma-$ 代数流的鞅. 对任意的 $\lambda > 0$ 有

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]} \langle W(t), \theta\rangle \geqslant \gamma\right) \\ \leqslant\, &\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]} \exp\left\{\lambda\langle W(t), \theta\rangle - \frac{1}{2}\lambda^2|\theta|^2 t\right\} \geqslant \exp\left\{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2|\theta|^2 v\right\}\right) \\ =\, &\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]} X_{\lambda\theta}(t) \geqslant \exp\left\{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2|\theta|^2 v\right\}\right).\end{aligned}$$

设 $|\theta| = 1$. 这时, 根据第四章推论 5, 最后的概率不超过

$$\frac{\mathsf{E}X_{\lambda\theta}^+(v)}{e^{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2 v}} = \frac{\mathsf{E}X_{\lambda\theta}(0)}{e^{\lambda\gamma - \frac{1}{2}\lambda^2 v}} = e^{-\lambda\gamma + \frac{1}{2}\lambda^2 v} \leqslant e^{-\frac{\gamma^2}{2v}},$$

这里考虑到, 在点 $\lambda=\gamma/v$ 处函数 $g(\lambda)=-\lambda\gamma+\frac{1}{2}\lambda^2 v$ 达到最小.

如果 θ_k 表示第 k 个坐标轴上的单位向量 $(k=1,\cdots,m)$ 则

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]}|W(t)|\geqslant\gamma\right)&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]}|\langle W(t),\theta_k\rangle|\geqslant\frac{\gamma}{\sqrt{m}}\right)\\&\leqslant 2m\sup_{\theta:|\theta|=1}\mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]}\langle W(t),\theta\rangle\geqslant\frac{\gamma}{\sqrt{m}}\right)\\&\leqslant 2me^{-\frac{\gamma^2}{2mv}}.\quad\square\end{aligned}$$

引理 4. 设确定性向量函数 $a\in C^1([0,T];\mathbb{R}^m)$. 这时,

$$\int_0^T\langle a(u),dW(u)\rangle=\langle a(T),W(T)\rangle-\int_0^T\langle\dot a(u),W(u)\rangle du.\tag{16}$$

证. 显然, 只需要研究 $m=1$ 的情况. 由于第八章引理 4 有

$$\int_0^T a(u)dW(u)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n-1}a(t_k)(W(t_{k+1})-W(t_k)),\tag{17}$$

其中, 点 $t_k=kT/n, k=0,\cdots,n(n\in\mathbb{N})$.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}a(t_k)(W(t_{k+1})-W(t_k))&=a(T)W(T)-\sum_{k=0}^{n-1}W(t_k)(a(t_{k+1})-a(t_k))\\&=a(T)W(T)-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}W(t_k)\dot a(u)du.\end{aligned}$$

考虑到 Wiener 过程的独立增量性, 可得

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left(\int_0^T a(u)dW(u)-a(T)W(T)+\int_0^T\dot a(u)W(u)du\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W(u)-W(t_k))\dot a(u)du\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W(u)-W(t_k))\dot a(u)du\right)^2\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W(u)-W(t_k))^2du\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot a(u)^2du\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(u-t_k)du\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot a(u)^2du\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t_{k+1}-t_k)^2}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot a(u)^2du=\lim_{n\to\infty}\frac{T^2}{2n}\int_0^T\dot a(u)^2du=0.\quad\square\end{aligned}$$

我们还需要吉尔萨诺夫 (Girsanov) 定理的特殊情况 (第八章定理 18).

引理 5. 设确定性向量函数 $a \in C([0,T];\mathbb{R}^m)$. 这时过程

$$B(t) = W(t) - \int_0^t a(u)du, \quad t \in [0,T], \tag{18}$$

是在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \widetilde{\mathsf{P}})$ 上的 Wiener 过程, 其中

$$\widetilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{E}1_A X_T, \quad A \in \mathscr{F},$$
$$X_T = \exp\left\{\int_0^T \langle a(u), dW(u)\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |a(u)|^2 du\right\}. \tag{19}$$

换句话说, $\widetilde{\mathsf{P}} \ll \mathsf{P}$ 和 $d\widetilde{\mathsf{P}}/d\mathsf{P} = X_T$.

证. 只需要建立, 对任意的 $n \geqslant 1, 0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathsf{E}}\exp\{i\langle B(t_1), \lambda_1\rangle + \cdots + i\langle B(t_n) - B(t_{n-1}), \lambda_n\rangle\}\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}|\lambda_{k+1}|^2(t_{k+1} - t_k)\right\},\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\widetilde{\mathsf{E}}$ 表示对测度 $\widetilde{\mathsf{P}}$ 取的中值.

公式 (20) 式左半部分, 考虑到 (19) 式可以写成形如

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\langle W(t_{k+1}) - W(t_k), \lambda_{k+1}\rangle - \left\langle\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(u)du, \lambda_{k+1}\right\rangle\right)\right\} X_T d\mathsf{P}\\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T |a(u)|^2 du - i\sum_{k=0}^{n-1}\left\langle\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(u)du, \lambda_{k+1}\right\rangle\right\}\\ &\quad\times\prod_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}\exp\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle a(u) + i\lambda_{k+1}, dW(u)\rangle\right\}.\end{aligned} \tag{21}$$

利用关系式 (17) 得到

$$\xi_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle a(u), dW(u)\rangle \sim \mathsf{N}\left(0, \int_{t_k}^{t_{k+1}} |a(u)|^2 du\right), \tag{22}$$

$$\zeta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}}\langle a(u) + i\lambda_{k+1}, dW(u)\rangle = \underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\zeta_{k,r}, \tag{23}$$

其中

$$\zeta_{k,r} = \sum_{j=0}^{r-1}\langle a(t_{k,j}) + i\lambda_{k+1}, W(t_{k,j+1}) - W(t_{k,j})\rangle,$$

$$t_{k,j} = t_k + j\frac{t_{k+1} - t_k}{r}, \quad j = 0, \cdots, r.$$

对任意的 $u, v \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u+iv)x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}(u^2+2iuv-v^2)}, \tag{24}$$

因为这个积分等于 $e^{\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \mathsf{E} e^{i\eta v}$, 其中 $\eta \sim \mathsf{N}(\sigma^2 u, \sigma^2)$. 现注意到

$$|\mathsf{E}\exp\{\zeta_k\} - \mathsf{E}\exp\{\zeta_{k,r}\}| \leqslant (\mathsf{E}\exp\{2|\zeta_k| + 2|\zeta_k - \zeta_{k,r}|\})^{1/2}(\mathsf{E}|\zeta_k - \zeta_{k,r}|^2)^{1/2}.$$

考虑到 (22) 式和 (23) 式, 以及量 $\zeta_{k,r}$ 的 Gauss 性, 不难得到

$$\mathsf{E}\exp\{\zeta_k\} = \lim_{r\to\infty} \mathsf{E}\exp\{\zeta_{k,r}\}$$

利用 (24) 式, 可以找到 $\prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}\exp\{\zeta_k\}$ 和发现 (21) 式的表达式与公式 (20) 右半部分相重合. 这就是所要验证的. □

§6. 设 $W = \{W(t), t \in [0,T]\}$ 是在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, 区间 $[0,T]$ 上的 m 维 Weiner 过程. 对 $\varepsilon > 0$ 在空间 $\mathsf{S} = C([0,T];\mathbb{R}^m)$ 中 Borel $\sigma-$ 代数上赋予 sup $-$ 范数 $\|\cdot\|$, 引入测度

$$\mathsf{Q}_\varepsilon(B) = \mathsf{P}(\sqrt{\varepsilon} W(\cdot) \in B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathsf{S}). \tag{25}$$

定理 3 (Schilder). *测度族 $\{\mathsf{Q}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 满足具有形如 (2) 式的偏差函数 I 的大偏差原理.*

证. 验证定义 3 中的关系式 1°. 取任意的闭集 $F \subset \mathsf{S}$. 设 φ_n 是对 $\varphi \in \mathsf{S}$ 如前面所表示的逐段线性函数, 且节点为 $(kT/n, \varphi(kT/n)), k = 0, \cdots, n$.

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$ 有

$$F = \{\varphi \in F : \|\varphi - \varphi_n\| < \delta\} \bigcup \{\varphi \in F : \|\varphi - \varphi_n\| \geqslant \delta\}.$$

显然,

$$F \subset A_n(\delta) \bigcup C_n(\delta) \tag{26}$$

其中

$$A_n(\delta) = \{\varphi \in \mathsf{S} : \varphi_n \in F^\delta\}, \quad C_n(\delta) = \{\varphi \in \mathsf{S} : \|\varphi - \varphi_n\| \geqslant \delta\}.$$

设 $L_\delta = \min\{I(F^\delta), 1/\delta\}$. 这时

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}_\varepsilon(A_n(\delta)) &\leqslant \mathsf{Q}_\varepsilon(\varphi \in \mathsf{S} : I(\varphi_n) \geqslant L_\delta) = \mathsf{P}(I((\sqrt{\varepsilon}W)_n) \geqslant L_\delta) \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{n}{T}\sum_{k=1}^{n}\left|W\left(\frac{kT}{n}\right) - W\left(\frac{(k-1)T}{n}\right)\right|^2 \geqslant \frac{2L_\delta}{\varepsilon}\right) \\
&= \int_{(2L_\delta)/\varepsilon}^{\infty} \frac{u^{\frac{nm}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{nm}{2}}\Gamma\left(\frac{nm}{2}\right)} du,
\end{aligned} \tag{27}$$

这里, 考虑到 (25) 式和 $\frac{n}{T}\sum_{k=1}^{n}\left|W\left(\frac{kT}{n}\right)-W\left(\frac{(k-1)T}{n}\right)\right|^2$ 具有自由度为 nm 的 χ^2 分布.

对 $z>0$ 和 $\mu\in\mathbb{R}$ 得到

$$J(z,\mu)=\int_z^{\infty}u^{\mu}e^{-\frac{u}{2}}du=2z^{\mu}e^{-\frac{z}{2}}+2\mu\int_z^{\infty}u^{\mu-1}e^{-\frac{u}{2}}du\leqslant 2z^{\mu}e^{-\frac{u}{2}}+\frac{2\mu}{z}J(z,\mu).$$

因此, 对每个 $\mu\in\mathbb{R}$ 和 $z>4\mu$ 有 $J(z,\mu)\leqslant 4z^{\mu}e^{-\frac{z}{2}}$. 因此, 对每个 $n\in\mathbb{N},\delta>0$, 和足够小的 $\varepsilon>0$ 成立不等式

$$\varepsilon\log \mathsf{Q}_{\varepsilon}(A_n(\delta))\leqslant -L_{\delta}+\varepsilon nm\log((2L_{\delta})/\varepsilon)+\varepsilon\log 4-\varepsilon\log\left(2^{\frac{nm}{2}}\Gamma\left(\frac{nm}{2}\right)\right). \tag{28}$$

由此, 有

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log \mathsf{Q}_{\varepsilon}(A_n(\delta))\leqslant -L_{\delta}. \tag{29}$$

由于引理 3, 对所有的 $n\in\mathbb{N},\delta>0$ 和 $\varepsilon>0$ 得到

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_{\varepsilon}(C_n(\delta))&\leqslant \mathsf{P}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sup_{t\in[0,T/n]}\left|W\left(\frac{kT}{n}+t\right)-W\left(\frac{kT}{n}\right)\right|\geqslant\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\\&\leqslant 2nm\exp\left\{-\left(\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\frac{n}{2mT}\right\}.\end{aligned}$$

取 $n=n(\delta,T,m)$ 使得 $n\delta^2/(16mT)>L_{\delta}$, 这时

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log \mathsf{Q}_{\varepsilon}(C_n(\delta))\leqslant -2L_{\delta}. \tag{30}$$

注意, 对任意的 $a,b>0$ 有

$$\log(a+b)\leqslant\log(2\max\{a,b\})=\log 2+\max\{\log a,\log b\},$$

由于 (26) 式, (29) 式和 (30) 式对所有的 $\delta>0$ 得到估计

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log \mathsf{Q}_{\varepsilon}(F)\leqslant -L_{\delta}. \tag{31}$$

由于引理 1, 由 (31) 式得出性质 1°.

取开集 $G\subset\mathsf{S}$, 验证定义 3 中性质 2°. 如果 $I(G)=\infty$, 则 2° 成立. 因此, 下面设 $I(G)<\infty$. 对任意的 $\alpha>0$ 可以找到函数 $\psi_{\alpha}\in G$, 使得

$$I(\psi_{\alpha})<I(G)+\alpha. \tag{32}$$

因为 G 是开集, 则对某个 r_{α} 有 $V_{r_{\alpha}}(\psi_{\alpha})\subset G$, 其中 $V_{r_{\alpha}}(\psi)=\{\varphi\in\mathsf{S}:\|\varphi-\psi\|<r\}$. 对每个 $\beta\in(0,\alpha)$ 不难选出函数 $\varphi\in C^2([0,T];\mathbb{R}^m),\varphi(0)=0$, 使得 $I^{1/2}(\psi_{\alpha}-\varphi)<\beta/\sqrt{2}$. 这时

$$I^{1/2}(\varphi)\leqslant I^{1/2}(\psi_{\alpha})+I^{1/2}(\psi_{\alpha}-\varphi)\leqslant I^{1/2}(\psi_{\alpha})+\beta. \tag{33}$$

除此之外, 对 $t \in [0,T]$ 有

$$|\psi_\alpha(t)-\varphi(t)| \leqslant \int_0^t |\dot{\psi}_\alpha(u)-\dot{\varphi}(u)|du \leqslant \sqrt{2t}I^{1/2}(\psi_\alpha-\varphi).$$

因此,

$$\|\psi_\alpha-\varphi\| \leqslant \beta\sqrt{T}.$$

这样, 对 $\delta < r_\alpha/2$ 有 $V_\delta(\varphi) \subset G$ 当 $\beta\sqrt{T} < r_\alpha/2$.

因此,

$$\mathsf{Q}_\varepsilon(G) \geqslant \mathsf{Q}_\varepsilon(V_\delta(\varphi)) = \mathsf{P}(\sqrt{\varepsilon}W \in V_\delta(\varphi)) = \mathsf{P}(\|W-\varphi/\sqrt{\varepsilon}\| < \delta/\sqrt{\varepsilon}). \tag{34}$$

注意,

$$\varphi(t) = \int_0^t \dot{\varphi}(u)du.$$

因此, 根据引理 5, 利用 (16) 式和 (18) 式, 公式 (34) 右半部分可以重新改写成

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathsf{E}}\mathbf{1}_{\left\{\|B\|<\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^T\langle\dot{\varphi}(u),dB(u)\rangle-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T|\dot{\varphi}(u)|^2du\right\}\\ &=\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}I(\varphi)\right\}\widetilde{\mathsf{E}}\mathbf{1}_{\left\{\|B\|<\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^T\langle\dot{\varphi}(u),dB(u)\rangle\right\},\end{aligned} \tag{35}$$

随后, 由于 (16) 式有

$$\left|\int_0^T\langle\dot{\varphi}(u),dW(u)\rangle\right| \leqslant |\langle W(T),\dot{\varphi}(T)\rangle| + \left|\int_0^T\langle\ddot{\varphi}(u),W(\omega)\rangle du\right| \leqslant h\|W\|, \tag{36}$$

其中,

$$h=(1+T)\sup_{t\in[0,T]}\{|\dot{\varphi}(t)|+|\ddot{\varphi}(t)|\}.$$

由 (35) 式和 (36) 式得到估计

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_\varepsilon(G) &\geqslant \exp\{-I(\varphi)/\varepsilon\}\mathsf{E}\mathbf{1}_{\{\|W\|<\delta/\sqrt{\varepsilon}\}}\exp\{-h\|W\|/\sqrt{\varepsilon}\}\\ &\geqslant \exp\{-(I(\varphi)+h\delta)/\varepsilon\}\mathsf{P}(\|W\|<\delta/\sqrt{\varepsilon}).\end{aligned}$$

这样,

$$\varepsilon\log\mathsf{Q}_\varepsilon(G) \geqslant -I(\varphi)-h\delta+\varepsilon\log\mathsf{P}(\|W\|<\delta/\sqrt{\varepsilon}),$$

这时

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathsf{Q}_\varepsilon(G) \geqslant -I(\varphi). \tag{37}$$

考虑到 (32) 式, (33) 式和 (37) 式, 导致所要的性质 2°. 定理得证. □

§7. 在这一节中, 将证明 Strassen 形式的重对数泛函的定律. 为此要求一个辅助性结果.

设 $W = \{W(t), t \geqslant 0\}$ 是在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上 m 维 Wiener 过程. 引入一族随机函数

$$f_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{n}\phi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T], \tag{38}$$

其中, $\phi(1) = \phi(2) = 1$ 和 $\phi(n) = \sqrt{2\log\log\, n}, n \geqslant 3$ 是向量函数的每个坐标乘以标量.

为了研究这个族的极限点, 我们还需要下面的引理.

引理 6. 设确定性向量函数 $g \in C([0,\infty); \mathbb{R}^m)$ 和

$$g_n(t) = \frac{g(nt)}{\sqrt{n}\phi(n)}, \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

设集合 $\Lambda \subset (1, \infty)$ 和点 1 属于 Λ 的闭包. 假设对任意的 $\lambda \in \Lambda$ 有

$$\limsup_{r\to\infty} \rho(g_{n_r}(\lambda), V) = 0, \tag{40}$$

这里, V 是空间 $C([0,T]; \mathbb{R}^m)$ 中的某个紧集, $n_r(\lambda) = [\lambda^r], r \in \mathbb{N}, [\cdot]$ 是数的整数部分, $\rho(f, V) = \inf\{\rho(f, h) : h \in V\}, \rho$ 是在 S 中的一致距离. 这时,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(g_n, V) = 0 \tag{41}$$

和函数 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 的集合在 S 中是准紧的 (pre - compact).

证. 如果 V 在 S 中是紧集, 则根据 Arzela – Ascoli 定理存在 $M > 0$, 使得

$$\sup_{f\in V} \|f\| \leqslant M \tag{42}$$

且可以找到函数 $\Delta : [0, T] \to [0, \infty)$ 使得当 $s \downarrow 0$ 时有 $\Delta(s) \downarrow 0$ 和

$$\sup_{f\in V} |f(t) - f(s)| \leqslant \Delta(t - s), \quad 0 \leqslant s, t \leqslant T, \tag{43}$$

这里, 如以前一样, $\|\cdot\|$ 是在 S 中的 sup – 范数.

取 $\lambda \in \Lambda$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 找到 $r = r(\lambda, n)$ 使得 $n_r(\lambda) < n \leqslant n_{r+1}(x) = N$, 其中, $N = N(\lambda, n)$ 和 $n_0(\lambda) = 0$. 这时

$$\begin{aligned}\|g_n - g_N\| &= \sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{\sqrt{N}\phi(N)}{\sqrt{n}\phi(n)} g_N(nt/N) \mp g_N(nt/N) - g_N(t) \right| \\ &\leqslant \left(\frac{\sqrt{N}\phi(N)}{\sqrt{n}\phi(n)} - 1 \right) \|g_N\| + \sup_{t\in[0,T]} |g_N(nt/N) - g_N(t)|. \end{aligned} \tag{44}$$

由 (40) 式得出, 对每个 $\lambda \in \Lambda$ 和任意的 $\varepsilon > 0$ 可以找到函数 $v_{n_r}(\lambda) \in V$ 使得当 $r \geqslant N_0(\varepsilon, \lambda)$ 时有

$$\rho(g_{n_r}(\lambda), v_{n_r}(\lambda)) < \varepsilon. \tag{45}$$

由此和 (42) 式可得对所有足够大的 N 有 $\|g_N\| \leqslant M + \varepsilon$. 除此之外, 对所有的 $n > N_1 = N_1(\lambda)$ 有

$$\frac{\sqrt{N}\phi(N)}{\sqrt{n}\phi(n)} - 1 \leqslant 2(\lambda - 1). \tag{46}$$

注意, 由于 (45) 式和 (43) 式对所有足够大的 n 有

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} |g_N(nt/N) - g_N(t)| &\leqslant \sup_{t\in[0,T]} |g_N(nt/N) - g_N(t) \pm v_N(nt/N) \pm v_N(t)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + \sup_{t\in[0,T]} |v_N(nt/N) - v_N(t)| \leqslant 2\varepsilon + \Delta(2T(\lambda - 1)),\end{aligned}$$

因为

$$\left|\frac{nt}{N} - t\right| \leqslant T\left(1 - \frac{n}{N}\right) \leqslant T\frac{[\lambda^{r+1}] - [\lambda^r]}{[\lambda^{r+1}]} \to T(\lambda - 1), \quad r \to \infty.$$

选取 $\lambda \in \Lambda$ 足够接近 1, 得到 (41) 式成立.

取任意的序列 $\{g_{n_j}\}$, 其中 $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$. 根据已证的, 可以找到 $h_{n_j} \in V$ 使得当 $j \to \infty$ 时有 $\rho(g_{n_j}, h_{n_j}) \to 0$. 可以选取子序列 $\{n_j'\} \subset \{n_j\}$ 使得当 $j \to \infty$ 时有 $h_{n_j'} \to h \in V$. 这时, 当 $j \to \infty$ 时有 $g_{n_j'} \to h$. □

定理 4 (Strassen). 形如 (38) 式的随机函数族以概率 1 有下列关系式:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, \mathsf{K}) = 0$ 其中 K 是 Strassen 球, 即

$$\mathsf{K} = \{\varphi \in \mathsf{S} : I(\varphi) \leqslant 1/2\} = \{\varphi \in \mathscr{S} : \int_0^T |\dot{\varphi}(u)|^2 du \leqslant 1\},$$

而函数 I 是由 (2) 式中所定义的;

2) 对任意的函数 $f \in \mathsf{K}$ 和几乎所有的 $\omega \in \Omega$ 可以找到序列 $\{n_j(\omega)\} \subset \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty} \rho(f_{n_j(\omega)}, f) = 0.$$

换句话说, 在 S 中 a.s. 函数族 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ 是准紧的, 且这个族的极限点全体与集合 K 相重合.

证. 对 $\delta > 0$ 研究集合 $S_{(1+\delta)/2} = \{\varphi \in \mathsf{S} : I(\varphi) < (1+\delta)/2\}$. 如果 $\varphi \in S_{(1+\delta)/2}$ 和 $\varphi \notin \mathsf{K}$, 则存在 $z \in [0, T]$ 使得

$$\int_0^z |\dot{\varphi}(u)|^2 du = 1.$$

取函数

$$\psi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[0,z],\\ \varphi(z), & t\in[z,T]\end{cases}$$

这时, $\psi\in\mathsf{K}$ 和

$$\rho(\varphi,\psi)=\sup_{t\in[z,T]}|\varphi(t)-\varphi(z)|\leqslant\left(\int_z^T|\dot\varphi(u)|^2du\right)^{1/2}(T-z)^{1/2}<\sqrt{\delta T}. \qquad (47)$$

这样, 对 $\sqrt{\delta T}-$ 球 K 邻域有

$$\mathsf{K}\subset\mathsf{S}_{(1+\delta)/2}\subset\mathsf{K}^{\sqrt{\delta T}}. \qquad (48)$$

对闭集 $F=\mathsf{S}\backslash\mathsf{K}^{\sqrt{\delta T}}$, 根据 Schilder 定理有

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon\log\mathsf{Q}_\varepsilon(F)\leqslant -I(F),$$

即对任意的 $\gamma>0$ 和所有足够小的 $\varepsilon>0$ 有

$$\mathsf{Q}_\varepsilon(F)\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(I(F)-\gamma)\right\}, \qquad (49)$$

这里, Q_ε 是 S 中过程 $\sqrt{\varepsilon}W$ 的分布, 其中 $W=\{W(t),t\in[0,T]\}$.

由于 (48) 式有 $F\subset\overline{S_{(1+\delta)/2}}=\mathsf{S}\setminus S_{(1+\delta)/2}$. 因此

$$I(F)\geqslant I(\overline{S_{(1+\delta)/2}})\geqslant(1+\delta)/2. \qquad (50)$$

这样, 对 $\gamma=\delta/4$, 由 (49) 式和 (50) 式有

$$\mathsf{Q}_\varepsilon(F)\leqslant\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{4}\right)\right\}.$$

注意, 形如 (38) 式的随机函数 f_n 的分布是 $\mathsf{Q}_{\varepsilon_n}$, 其中 $\varepsilon_n=1/\phi^2(n)$.

因此, 对任意的 $\lambda>1$ 和 $n_r(\lambda)=[\lambda^r], r\in\mathbb{N}$, 得到

$$\sum_{r=r_0}^{\infty}\mathsf{P}(f_{n_r(\lambda)}\notin\mathsf{K}^{\sqrt{\delta T}})\leqslant\sum_{r=r_0}^{\infty}(\log n_r(\lambda))^{-1-\frac{\delta}{2}}<\infty,\quad \lambda^{r_0}\geqslant 3.$$

根据 Borel – Cantelli 引理, 对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 当 $r>M_0(\omega,\lambda,\delta)$ 时有 $f_{n_r(\lambda)}\in\mathsf{K}^{\sqrt{\delta T}}$. 换句话说, a.s. 有 $\limsup\limits_{r\to\infty}\rho(f_{n_r(\lambda)},\mathsf{K})=0$. 由于引理 6 的结论 1), Strassen 定理得证.

现证 2). 只需要研究 $f\in\mathsf{K}$, 对它满足 $I(f)<1/2$. 事实上, 如果 $I(f)=1/2$, 则对 $\delta\in(0,1)$ 取点 $u\in[0,T]$ 使得

$$\int_0^u|\dot f(s)|^2ds=1-\delta.$$

这时, 类似 (47) 式可以找到 $\sup\limits_{t\in[0,T]}|f(t)-h(t)|\leqslant\sqrt{\delta T}$, 对那样函数 h, 对 $t\in[0,u]$ 有 $h(t)=f(t)$, 对 $t\in[u,T]$ 有 $h(t)=f(u)$.

对序列 $\{k^r\}_{r\geqslant1}$, 其中 $k\geqslant2$ 有

$$\|f_{k^r}-f\|_{[0,T]}\leqslant\|f_{k^r}\|_{[0,T/k]}+\|f\|_{[0,T/k]}+\|f_{k^r}-f\|_{[T/k,T]}, \tag{51}$$

这里 $\|g\|_{[a,b]}$ 对 $g\in C([0,T];\mathbb{R}^m)$ 和 $[a,b]\subset[0,T]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上压缩函数 g 的范数 (在空间 $C([a,b];\mathbb{R}^m)$ 上).

显然, 对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的函数 $f\in\mathrm{K}$, 当 $k>T/\varepsilon^2$ 时有 $\|f\|_{[0,T/k]}\leqslant\sqrt{T/k}<\varepsilon$.

由于已证的结论 1), 对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 和每个 $k\geqslant2$ 在 K 中可以找到函数 $g_{k^r}(t)$ (依赖于 ω) 使得, 当 $r>M_0(\varepsilon,k,\omega)$ 时有

$$\|f_{k^r}-g_{k^r}\|_{[0,T]}<\varepsilon. \tag{52}$$

因此, 当 $k>T/\varepsilon^2$ 和 $r>M_0(\varepsilon,k,\omega)$ 时有

$$\|f_{k^r}\|_{[0,T/k]}\leqslant\|g_{k^r}\|_{[0,T/k]}+\|f_{k^r}-g_{k^r}\|_{[0,T]}<2\varepsilon.$$

对 $k\geqslant2$ 和 $t\in[0,T]$ 假设

$$f(t,k)=\begin{cases}0, & t\in[0,T/k],\\ f(t)-f(T/k), & t\in(T/k,T].\end{cases}$$

引入随机函数

$$g_{r,k}(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,T/k],\\ \dfrac{1}{\sqrt{k^r}\phi(k^r)}(W(k^rt)-W(k^rT/k)), & t\in(T/k,T].\end{cases}$$

这时

$$\|f_{k^r}-f\|_{[T/k,T]}\leqslant\|f_{k^r}-g_{r,k}\|_{[T/k,T]}+\|g_{r,k}-f(\cdot,k)\|_{[T/k,T]}+\|f(\cdot,k)-f\|_{[T/k,T]}.$$

显然, 对所有足够大的 k 有 $\|f(\cdot,k)-f\|_{[T/k,T]}\leqslant\|f\|_{[0,T/k]}<\varepsilon$. 对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 有

$$\|f_{k^r}-g_{r,k}\|_{[T/k,T]}=\left|\frac{W(k^{r-1}T)}{\sqrt{k^{r-1}}\phi(k^{r-1})}\frac{\phi(k^{r-1})}{\sqrt{k}\phi(k^r)}\right|<(1+2\varepsilon)/\sqrt{k},$$

因为当 $r\to\infty$ 时 $\phi(k^{r-1})/\phi(k^r)\to1$, 而由于 (52) 式对所有足够大的 r 以概率 1 有 $\|f_{k^{r-1}}\|_{[0,T]}<1+\varepsilon$.

对每个 $k\geqslant2$ 事件 $\{\|g_{r,k}-f(\cdot,k)\|_{[T/k,T]}<\delta\},r\in\mathbb{N}$, 总起来独立, 因为它们是由 Wiener 过程在不相交的时间区间上的增量所确定的.

利用 m 维 Wiener 过程的马氏性 (完全类似于第三章定理 2) 对 $\delta > 0$ 得到

$$\mathsf{P}(\|g_{r,k} - f(\cdot,k)\|_{[T/k,T]} < \delta) = \mathsf{P}\left(\sup_{t\in[0,v]}\left|\frac{W(tk^r)}{\sqrt{k^r}\phi(k^r)} - \varphi(t,k)\right| < \delta\right)$$
$$= \mathsf{P}(\|\sqrt{\varepsilon_{k^r}}W(\cdot) - \varphi(\cdot,k)\|_{[0,v]} < \delta) = \mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon_{k^r}}(G),$$

这里 $v = T(1-1/k), \varphi(t,k) = f(t+T/k) - f(T/k)$ 对 $t \in [0,v]$, 开集 $G = \{\psi \in C([0,v];\mathbb{R}) : \|\psi(\cdot) - \varphi(\cdot,k)\|_{[0,v]} < \delta\}$, 而测度 $\mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon_n} = \mathrm{Law}(\{\sqrt{\varepsilon_n}W(t), t \in [0,v]\})$, 其中 $\varepsilon_n = 1/\phi^2(n), n \in \mathbb{N}$.

注意,

$$\int_0^v |\dot{\varphi}(t,k)|^2 dt \leqslant 1-\alpha, \quad \alpha \in (0,1)$$

根据 Schilder 定理 (在空间 $C([0,v];\mathbb{R}^m)$ 上测度 $\mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon_n}$) 有

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \log \mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon}(G) \geqslant -I^{(v)}(G),$$

这里, $I^{(v)}$ 是偏差函数. 因此, 对任意的 $\gamma > 0$ 和所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon}(G) \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(I^{(v)}_{(G)} + \gamma)\right\} \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(I^{(v)}(\varphi(\cdot,k)) + \gamma)\right\}$$
$$\geqslant \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}(1-\alpha+2\gamma)\right\}.$$

因此, 当 $\gamma = \alpha/4$ 时有

$$\mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon^r}(G) \geqslant (r\log k)^{-1+\frac{\alpha}{2}}.$$

所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathsf{Q}^{(v)}_{\varepsilon^r}(G) = \infty.$$

根据 Borel – Cantelli 引理, 对几乎所有的 $\omega \in \Omega$ 可以找到序列 $\{r_j(\omega)\}$, 使得

$$\|g_{r_j(\omega),k} - f(\cdot,k)\|_{[T/k,T]} < \delta.$$

考虑到前面公式 (51) 右半部分各项的估计, 导致结论 2) 的成立. □

§8. 研究重对数定律的一些其他推广.

首先, 类似于不变原理 (第五章定理 8), 在空间 $C[0,1]$ 中引入随机折线, 它是由中值为 0, 方差为 1 的独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$, 按照下面方式构造的. 设 $(k/n, S_n/(\sqrt{n}\phi(n)))$ 是逐段线性 (随机) 函数 $h_n(t)$ 的节点坐标, 其中, $S_n = X_1 + \cdots + X_n, \phi(1) = \phi(2) = 1, \phi(n) = \sqrt{2\log\log n}$ 对 $n \geqslant 3, t \in [0,1]$ 和 $n \in \mathbb{N}$. 换句话说, 与重对数定律中出现的规范化因子同时构造随机折线 $h_n(t)$, 这里代替了相应的在中心极限定理中规范化因子 $\sqrt{n}$.

借助于第三章定理 13 建立如下的结果.

定理 5 (Strassen). 对引入的随机折线族 $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ 所有定理 4 的结论成立, 它是相对于根据 Wiener 过程所构造的随机函数族 $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$.

1. 利用定理 5, 得到 (哈特曼 (Hartman) – 温特纳 (Wintner)) 定理:

设 $X_1, X_2, \cdots$ 是中值为 0, 方差为 1 的独立同分布随机变量序列. 这时, 集合 $\{S_n/\sqrt{2n\log\log n}\}_{n\geqslant 3}$ 的极限点以概率 1 与区间 $[-1,1]$ 相重合 (其中, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$).

2. 试证, 如果 $\{X_k\}, \{S_k\}$ 如在 1 中的那样, $f(t)$ 是 Riemann $[0,1]$ 上实可积函数, 则 a.s. 有

$$\limsup_{n\to\infty}(2n^3\log\log n)^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) S_k = \left(\int_0^1 F^2(u)du\right)^{1/2},$$

其中

$$F(u) = \int_u^1 f(t)dt, \quad u \in [0,1].$$

定义 5. 确定性正函数 $\Psi(t)\uparrow\infty$, 当 $t\to\infty$ 时 $(t\in[0,\infty))$ 称作 Wiener 过程 $W = \{W(t), t\geqslant 0\}$ 的上函数, 如果对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 存在 $N = N(\omega) > 0$ 使得对所有的 $t\geqslant N$ 有 $W(t,\omega)\leqslant\Psi(t)$. 如果对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 函数 Ψ 不是上函数, 则称为下函数.

3. 是否在对 Wiener 过程的上 (下) 函数的定义中满足的只是对点 $\omega\in A$, 其中 $0 < \mathsf{P}(A) < 1$?

引入著名的 Kolmogorov – Petrovskii 积分准则 (参见, 例如, [31]). 同时也称: Kolmogorov – Petrovskii – Erdös – Feller 积分准则, 对独立随机变量部分和序列有类似结果).

定理 6. 设 $\varphi(t), t > 0$ 是不降函数, 使得当 $t\to\infty$ 时有 $\varphi(t)\to\infty$. 这时如果 $I(\varphi) < \infty$, 函数 $\Psi(t) = \sqrt{t}\varphi(t)$ 将是 Wiener 过程的上函数, 如果 $I(\varphi) = \infty$ 则 $\Psi(t)$ 是下函数, 其中

$$I(\varphi) = \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\exp\left\{-\varphi^2(t)/2\right\}dt. \tag{53}$$

这个定理给出了比一般的重对数定律更加精确结果: 计算 $I(\varphi)$ 看出函数 $\varphi(t) = (1+\varepsilon)\sqrt{2t\log\log t}$ 是上或下函数相对于, 当 $\varepsilon > 0$ 和 $\varepsilon\leqslant 0$ 时 (在第三章定理 8 不包括 $\varepsilon = 0$ 的情况).

与定理 4 有关, 自然而然产生一个问题: 下面函数族与 (38) 式相比, 那个极限点的集合更广,

$$F_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{n}\varphi(n)}, \quad t\in[0,1], \quad n\in\mathbb{N}, \tag{54}$$

其中, φ 是与定理 6 中的同样函数吗? 借助于推广 (53) 式的泛函来给出回答. 这时, 显示出趋于 Strassen 球的收敛速度非常敏感于规范化因子的选取, 甚至于在所用的规范化因子 φ 中补充个常数都可以对族 (54) 式趋于 Strassen 球的收敛速度阶 (指数) 有所改变 (参见, [9] 和那里的参考书).

重对数定律在许许多多方向都发展了, 并且正在发展. 例如在区别于一致拓扑的诸种拓扑中的重对数泛函定律, 参见, [48]. 同样可举出对于经验过程、比 Brown 运动更广的 Gauss 过程、取值于抽象空间部分和过程 (也包含上过程)、以及随机场的重对数泛函定律的研究.

后 记

本书没有过多地列举参考文献, 对书中所涉及的问题, 甚至属于随机过程理论的 “核心” 问题, 也不可能列出所有的名著. 为了方便读者, 从一般常被引用的成果文献当中, 列举出一些概率论的教程: [4, 18, 34, 63, 68, 78, 85, 101, 106, 123, 131, 143, 189], 还有随机过程论的: [12, 17, 25, 30, 32, 39, 42, 61, 72, 77, 83, 93, 100, 103, 110, 125, 135, 142, 146, 149, 177, 185, 192]. 个别地列举了百科全书 [57], 手册 [37, 56], 甚至于列举了举反例的书 [75] 和习题集 [55]. 应该指出的是上面所列举的书中, 许多涉及概率论同时也涉及随机过程.

在学完必需的基础以后, 将会比较容易地熟识现代随机过程论的各个分支及其应用. 而我们从中选择一些分支, 这并不是为追赶时髦和其他别的目的所作的调整.

首先应该指出的是, 与 Kolmogorov 公理化方法来构造概率论同时还有其他的方法. 众所周知, 是建立在算法复杂性概念基础上的 (参见, 例如, A. H. 施利亚耶夫 (A. N. Shiryayev), “补充” [34]). 另一方面, 现在对量子概率给予了很大的关注 (其中还有量子随机过程), 参见, 例如, [88, 165, 167, 171].

无论从理论角度上讲, 还是从应用的角度上讲, 随机过程统计 (或 “时间序列” 分析) 都是一个非常重要的分支. 关于这个领域的研究可以参考文献 [6, 80, 134, 137, 160, 183, 191]. 同时, 还应该指出的是一些随机过程理论的数值计算问题, 参见, 例如, [102, 144].

传统又广阔的研究方向仍是构造模型, 也就是依据观测给予不同方案的模型. 在本教程中研究了高斯过程, 马氏过程, 同时还有鞅. 阐述事件的依赖性、σ – 代数、由随机变量族所产生一些其他的术语 (混合, 相关性, 半不变量等等). 在这些或其他的一些相关形式中, 建立起一系列相互关联的结果, 他们即在极限定理的经典理论里, 也在非传统的理论当中; 参见, 例如, [8, 28, 98, 105, 117, 118, 137, 162, 168, 198].

在许多问题当中小概率事件起着极其重要的作用. 关于随机过程的极值理论可以参见, 例如, [38, 45, 52]. 要了解大偏差理论, 可以去参见, 例如, [114, 115, 116, 127,

194].

许多有趣的问题都是处在不同学科的交叉点. 作为核心展现的例子是研究 Dirichlet 问题. 关于分析和概率论的各种各样的问题, 参见, 例如, [95, 108, 121].

由于对取值在无穷维空间随机元的研究, 人们可追踪经典概率论结果的最大推广的长期趋势, 参见, 例如, [140, 157].

在个别的地方还提到了具有巨大影响领域的随机金融数学. 再一次援引书 [86, 147], 在那里有着很多的书评. 除此之外, 还提到了保险和实际中数学理论的概率问题.

根据以往, 物理, 化学; 生物及其他自然和人文的科学, 甚至于技术当中经常会给出新的模型, 它们要求更深刻的概率分析. 关于这方面应指出的是, 例如, 在 [10, 132, 176] 中所进行的研究.

参考文献

1. *Афанасьева Л. Г., Булинская. Е. В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. –М.: Изд–во МГУ, 1980.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. –М.: Наука, 1977.
3. *Боровков А. А.* Математическая статистика. –М.: Наука, 1984.
4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. –3-е изд. –М.; Новосибирск: Эдиториал УРСС; Ин-т математики, 1999.
5. *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. –СПб.: Лань, 2000.
6. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. –М.: Мир, 1980.
7. *Булинский А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и полей. –М.: Изд-во МГУ, 1981
8. *Булинский А. В.* Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. –М.: Изд-во МГУ, 1989.
9. *Булинский А.В., Лифшиц М. А.* Скорость сходимости в функциональном законе повторного логарифма при нестандартных нормирующих множителях// УМН. –1995. –Т. 50, № 5. – С. 83 – 102.
10. *Ван Кампен Н. Г.* Стохастические процессы в физике и химии. –М.: Высшая школа, 1990.
11. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. –М.: Наука, 1986.
12. *Венмцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. –2-е изд. –М.: Наука, 1996.
13. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. –М.: Наука, 1991.

14. *Гапошкин В. Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей// ТВП. –1977. –Т.22, № 2. – С. 295 – 319.

15. *Георги Х. -О.* Гиббсовские меры и фазовые переходы. –М.: Мир, 1992.

16. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1–3. –М.: Наука, 1971, 1973, 1975.

17. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. –2-е изд. –М.: Наука, 1977.

18. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. -6-е изд. –М.: Наука, 1988.

19. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. -2-е изд. –М.: Наука, 1987.

20. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. –М. –Л.: Гостехиздат, 1949.

21. *Добрушин Р. Л.*Пример счетного однородного марковского процесса, всесостояния которого являются мгновенными// ТВП. –1956. –Т.1, № 4. – С. 481 – 485.

22. *Добрушин Р. Л.* Задание системы случайных величин при помощи условных распределений// ТВП. –1970. –Т. 15, № 3. – С. 469 – 497.

23. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. –М.: Физматгиз, 1963

24. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. –М.: Наука, 1967.

25. *Дуб Дж. Л.*Вероятностные процессы. –М.: ИЛ, 1956.

26. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. –М.: Физматлит, 1994.

27. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. –М.: Наука, 1986.

28. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. –М.: Наука, 1965.

29. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. –М.: Наука, 1970.

30. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. 1, 2. –М.: ИЛ, 1960, 1963.

31. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. –М.: Мир, 1968.

32. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. –М.: Мир, 1971.

33. *Колмогоров А. Н.* Математика и механика. Избранные труды. Т. 1. –М.: Наука, 1985.

34. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. –3-е изд. –М.: Фазис, 1998.

35. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. –7-е изд. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

36. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. –М.: Наука, 1980.

37. *Королюк В. С. (ред.)* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. –Киев: Наукова думка, 1978.

38. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. –М.: Мир, 1969.

39. *Крылов Н. В.* Введение в теорию случайных процессов. Части 1 и2. –М.: Изд-во МГУ, 1986,1987.

40. *Крылов Н. В.* Введение в стохастическое исчисление// Стохастическое исчисление/ Под ред. Ю. В. Прохорова, А. Н. Ширяева. –М.: ВИНИТИ, 1989. (Серия соврем. проблемы матем. Фундаментальные направления. Т. 45. Гл. 1.)

41. *Куратовский К.* Топология. Т. 1, 2. –М.: Мир, 1966.

42. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. –Киев: Вища школа, 1983.

43. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. –М.: Наука, 1972.

44. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей. –Киев: Вища школа, 1986.

45. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. –М.: Мир, 1989.

46. *Линцер Р. А., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. –М.: Наука, 1986.

47. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. –М.: Мир, 1989.

48. *Лифщиц М. А.* Гауссовские случайные функции. –Киев: ТВiМС, 1995.

49. *Малыщев В. А., Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. –М.: Наука, 1985.

50. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. –М.: Наука, 1987.

51. *Пещкир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия//УМН. –1995. –Т. 50, № 5.– С. 3 – 62.

52. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. –М.: Изд-во МГУ, 1988.

53. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1,2. –М.: Наука, 1988.

54. *Престон К.* Гиббсовские состояния на счетных множествах. –М.: Мир, 1977.

55. *Прохоров А. В. Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. –М.: Наука, 1986.

56. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. –3-е изд. –М.: Наука, 1987.

57. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / Под род. Ю. В. Прохорова. –М.: Большая Российская энциклопедия, 1999.

58. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. –М.: Физматгиз, 1960.

59. *Ревюз Д.* Цепи Маркова. –М.: РФФИ, 1997.

60. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1–4. –М.: Мир, 1977–1982.

61. *Розанов Ю. А.* Введение в теорию случайных поцессов. –М.: Наука, 1982.

62. *Розанов Ю. А.* Марковские случайные поля. –М.: Наука, 1981.

63. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. –М.: Наука, 1985.

64. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. –2-е изд. –М.: Наука, 1990.

65. *Саханенко А. И.* О сильном принципе инвариантности для сумм независимых случайных векторов // Труды Ин-та математики им. С. Л. Соболева. –Новосибирск, 1980.

66. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // ТВП. –1957. –Т. 2, № 1. – С. 106 – 116.

67. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. –М.: Наука, 1971.

68. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. –М.: Наука, 1982.

69. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. –М.: Наука, 1980.

70. *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. –2-е изд. –М.: Фазис, 1996.

71. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. –Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.

72. *Скороход А. В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов. –Киев: Вища школа, 1980.

73. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. –2-е изд. –М.: Наука, 1986.

74. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. –М.: Мир, 1969.

75. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. –М.: Факториал, 1999.

76. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. –М.: Сов. радио, 1987.

77. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. –М.: Изд-во МГУ, 1992.

78. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. –М.: Мир, 1984.

79. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций // Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. –М.: Мир, 1978. –С. 63–132.

80. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. –М.: Мир, 1974.

81. *Хида Т.* Броуновское движение. –М.: Наука, 1987.

82. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. –М.: Мир, 1964.

83. *Ширяев А. Н.* Случайные процессы (лекции для студентов 3 курса). –М.: Изд-во МГУ, 1972.

84. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. –2-е изд. –М.: Наука, 1976.

85. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. –3-е изд. –М.: МЦНМО, 2004.

86. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. –М.: Фазис, 1998, 2004.

87. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. –Л.: Гидрометеоиздат, 1987.

88. *Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T.* Quantum stochastic processes // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto. –1982. –V. 18, No 1.–p. 97–133.

89. *Adler R. J.* The Geometry of Random Fields. –Chichester: Wiley, 1981.

90. *Alexander K. S., Pyke R.* A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance // Ann. Probab. –1986. –V. 14, No 2.–p. 582–597.

91. *Barbour A. D.* Stein's method for diffusion approximations // Probab. Theory Related Fields. –1990. –V. 84, No 3. –p. 297–322.

92. *Barlow M.* One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution // J. London Math. Soc. (2). –1982. –V. 26, No 2.–p. 335–347.

93. *Bartlett M. S.* An Introduction to Stochastic Processes, with Special Reference to Methods and Applications. –Cambridge Univ. Press, 1978.

94. *Bass R.F.* Law of the iterated logarithm for set-indexed partial sum processes with finite variance // Z. Wahr. verw. Geb. –1985.–Bd. 70, H. 4. –S. 591–608.

95. *Bass R. F.* Probabilistic Techniques in Analysis. –New York: Springer-Verlag, 1995.

96. *Bass R. F., Pyke R.* A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets // Ann. Probab. –1984. –V. 12, No 1. –p. 268–271.

97. *Bass R. F., Pyke R.* A central limit theorem for $\mathscr{D}(A)$ -valued processes // Stochastic Process Appl. –1987. –V. 24, No 1. –p. 109–131.

98. *Berkes I., Morrow G. J.* Strong invariance principles for mixing random fields // Z. Wahr. verw. Geb. –1981. –Bd.57, H. 1. –S. 15-37.

99. *Bertoin J.* Lévy Processes. –Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.

100. *Bhattacharya R. N., Waymire E. C.* Stochastic Processes with Applications. –New York: Wiley, 1990.

101. *Borkar V. S.* Probability Theory. An Advanced Course. –New York: Springer-Verlag, 1995.

102. *Bouleau N., Lépingle D.* Numerical Methods for Stochastic Processes. –New York: Wiley, 1994.

103. *Brzeźniak Z., Zastawniak T.* Basic Stochastic Processes. –London: Springer-Verlag, 1999.

104. *Bryc W.* Large deviations by the asymptotic value method // Diffusion Processes and Related Problems in Analysis. V. 1/Ed. M. Pinsky. –Boston: Birkhäuser, 1990. –p. 447–472.

105. *Bulinski A. V., Keane M. S.* Invariance principle for associated random fields // J. Math. Sci. –1996. –V. 81, No 5. –p. 2905–2911.

106. *Chow Y. S., Teicher H.* Probability Theory: Independence. Interchangeability. Martingales. –3-rd ed. –New York: Springer-Verlag, 1997.

107. *Chung K. L.* Lectures from Markov Processes to Brownian Motion. –New York: Springer-Verlag, 1982.

108. *Chung K. L.* Green, Brown, and Probability.–River Edge: World Scientific, 1995.

109. *Csörgö M., Révész P.* Strong Approximations in Probability and Statistics. –New York: Academic Press, 1981.

110. *Cox D. R., Miller H. D.* The Theory of Stochastic Processes. –London: Chapman & Hall, 1980.

111. *Daley D. J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. –New York: Springer-Verlag, 1988.

112. *Daniell P. J.* Integrals in an infinite number of dimensions // Ann. of Math. (2). 1918–1919. –V. 20. –p. 281–288.

113. *Dawson D. A.* Measure-valued Markov processes. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, XXI, Lect. Notes Math. V. 1541. Springer, 1991.

114. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. –2-nd ed. –New York: Springer-Verlag, 1998.

115. *Den Hollander F.* Large Deviations. –Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.

116. *Deuschel J. -D., Stroock D. W.* Large Deviations. –Boston:Academic Press, 1989.

117. *Dobrushin R. L., Major p.* Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields // Z. Wahr. verw. Geb. –1979. –Bd. 50, No 1. –S. 27–52.

118. *Doukhan p.* Mixing. Properties and Examples. –LNS, 85. –Springer-Verlag, 1994.

119. *Dozzi M.* Stochastic Processes with a Multidimensional Parameter. –Harlow: Longman, 1989.

120. *Dudley R. M.* A course on empirical processes. –Lect. Notes Math. V. 1097. –Berlin: Springer, 1984. –p. 1–142.

121. *Dudley R. M.* Real Analysis and Probability. –Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks / Cole Advanced Books & Software, 1989.

122. *Dudley R. M., Philipp W.* Invariance principles for sums of Banach–space valued random elements and empirical processes // Z. Wahr. verw. Geb. –1983. –Bd. 62, H. 4. –S. 509–552.

123. *Durrett R.* Probability:Theory and Examples. –2-nd ed. –Belmont, CA: Duxbury Press, 1996.

124. *Durrett R.* Stochastic Calculus: A Practical Introduction. –Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.

125. *Durrett R.* Essentials of Stochastic Processes. –New York: Springer, 1999.

126. *Dynkin E. B.* Superprocesses and partial differential equations //Ann. Probab. –1993. –V. 21, No 3. –p. 1185–1262.

127. *Ellis R. S.* Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. –New York: Springer-Verlag, 1985.

128. *Émery M.* Stochastic Calculus in Manifolds. –Berlin: Springer-Verlag, 1989.

129. *Föllmer H., Protter Ph., Shiryaev A. N.* Quadratic covariation and an extention of Itô's formula //Bernoulli. –1995. –V. 1, No 1/2. –p. 149–169.

130. *Freedman D.* Brownian Motion and Diffusion. –2-nd ed. –New York: Springer-Verlag, 1983.

131. *Fristedt B., Gray L.* A Modern Approach to Probability Theory. –Boston, MA: Birkhäuser, 1997.

132. *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. –Berlin: Springer-Verlag, 1983.

133. *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random Summation. Limit Theorems and Applications. –Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.

134. *Grenander U.* Abstract Inference. –New York: Wiley, 1981.

135. *Grimmett G. R., Stirzaker D. R.* Probability and Stochastic Processes. –2-nd ed. –Oxford: Clarendon Press, 1992.

136. *Grimmett G. R., Stirzaker D. R.* Probability and Random Processes: Problems and Solutions. –Oxford: Clarendon Press, 1992.

137. *Guyon X.* Random Fields on a Network. Modeling, Statistics, and Applications. –New York: Springer-Verlag, 1995.

138. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale Limit Theorem and its Applications. –New York: Academic Press, 1980.

139. *Harris T. E.* The Theory of Branching Processes. –New York: Dover, 1989.

140. *Hoffmann-Jϕrgensen J.* Stochastic Processes on Polish Spaces. –Aarhus: Aarhus Univ. Math. Inst., 1991.

141. *Hughes B. D.* Random Walks and Random Enviroments. Vol. 1, 2. –Oxford: Clarendon Press, 1995, 1996.

142. *Iranpour R., Chacon P.* Basic Stochastic Processes. –New York: Macmillan, 1998.

143. *Jacod J., ProtterPh.* Probability Essentials. –Berlin: Springer-Verlag, 2000.

144. *Janicki A., Weron A.* Simulation and Chaotic Behavior of α-stable Stochastic Processes. –New York: M. Dekker, 1994.

145. *Kallenberg O.* Random Measures. –3-rd ed. –London: Academic Press, 1983.

146. *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. –New York: Springer, 1997.

147. *Karatzas I., Shreve S. E.* Methods of Mathematical Finance. –New York: Columbia Univ. Press, 1995.

148. *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. –2-nd ed. –New York: Springer-Verlag, 1991.

149. *Karlin S., Taylor H. M.* A Second Course in Stochastic Processes. –New York – London: Academic Press, 1981

150. *Kindermann R., Snell J. L.* Markov Random Fields and their Applications. –Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980.

151. *Kingman J. F. C.* Poisson Processes. –Oxford: Clarendon Press, 1993.

152. *Komlós J., Major P., Tushnády G.* An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. I, II // Z. Wahr. verw. Geb. –1975. –Bd. 32. –S. 111-131; –1976. –Bd. 34. –S. 33–58.

153. *Kôno N.* Recent development on random fields and their sample paths. Part I: sample path continuity of random fields// Soochow J. Math. –1990. –V. 16, No 2. –p. 123–161.

154. *Krylov N. V.* Introduction to the Theory of Diffusion Processes. –Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.

155. *Lamberton D., Lapeyre B.* Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. –London: Chapman & Hall, 1996.

156. *Last G., Brandt A.* Marked Point Processes on the Real Line: The Dynamic Approach. –New York: Springer-Verlag, 1995.

157. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach Spaces. –Berlin: Springer-Verlag, 1991.

158. *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. –Paris: Gauthier-Villars, 1937.

159. *Lindvall T.* Lectures on coupling method. –New York: Wiley, 1992.

160. *Liptser R. S., Shiryaev A. N.* Statistics of Random Processes. V. 1: General Theory. V. 2: Applications. –Berlin: Springer-Verlag, 2001.

161. *Lomnicki Z., Ulam S.* Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I: Variables indépendentes // Fund. Math. –1934. –V. 23. –p. 237-278.

162. *McLeish D. L.* Dependent central limit theorems and invariance principles // Ann. Probab. –1974. –V. 2. –p. 620–628.

163. *Major P.* Multiple Wiener-Itô integrals // Lect. Notes Math. –1981. –V. 849. –p. 1–127.

164. *Mandelbrot B. B., Van Ness J. W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. –SIAM Rev. –1968. –V. 10. –p. 422-437.

165. *Meyer P. A.* Quantum Probability for Probabilists // Lecture Notes in Math. V. 1538. –Berlin: Springer-Verlag, 1993.

166. *Molchanov S. A.* Ideas in the Theory of Randon Media // Acta Appl. Math. –1991. –V. 22. № 2–3. –p. 139–282.

167. *Nelson E.* Construction of quantum fields from Markoff fields // J. Funct. Anal. –1973. –V. 12. –p. 97–112.

168. *Newman C. M., Wright A. L.* A invariance principle for certain dependent sequences // Ann. Probab. –1981. –V. 9, № 4. –p. 671–675.

169. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. –4-th ed. –Berlin: Springer-Verlag, 1995.

170. *Ortega J., Wschebor M.* On the increments of the Wiener process // Z. Wahr. verw. Geb. –1984. –Bd. 65, H. 3. –S. 329–339.

171. *Parthasarathy K. R.* An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. –Basel: Birkhäuser, 1992.

172. *Pollard D.* Convergence of Stochastic Processes. –New York: Springer-Verlag, 1984.

173. *Protter P.* Stochastic Integration and Differential Equations. A new Approach. – Berlin: Springer-Verlag, 1990.

174. *Pyke R.* The Haar-function constraction of Brownian motion indexed by sets // Z. Wahr. verw. Geb. –1983. -Bd. 64, H. 4. –S. 523-539.

175. *Rachev S. T.* Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models. –Chichester: Wiley, 1991.

176. *Ramakrishnan A.* Stochastic Processes in Physics and Astronomy. –Madras: Inst. of Math. Sci., 1978.

177. *Rao M. M.* Stochastic Processes. General Theory. –Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

178. *Reiss R. -D.* A Course on Point Processes. –New York: Springer-Verlag, 1993.

179. *Resnick S. L.* Adventures in Stochastic Processes. –Boston, MA: Birkhäuser, 1992.

180. *Reuter G. E. H.* Denumerable Markov processes and the associated contraction semi-groups on l // Acta Math. –1957. –V. 97, № 1–2. –p. 1–46.

181. *Révész P.* On the increments of the Wiener and related processes // Ann. Probab. –1982. –V. 10, № 3. –p. 613–622.

182. *Revus D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. –2-nd ed. –Berlin: Springer-Verlag, 1994.

183. *Ripley B. D.* Statistical inference for spatial processes. –Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

184. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusion, Markov Processes, and Martingales. –V. 1. 2-nd ed. –Chichester: Wiley, 1994. –V. 2. –New York: Wiley, 1987.

185. *Rosenblatt M.* Random Processes. –New York: Springer-Verlag, 1974.

186. *Rosenblatt M.* Stationary Sequences and Random Fields. –Boston, MA: Birkhäuser, 1985.

187. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes. –New York: Chapman & Hall, 1994.

188. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z. Wahr. verw. Geb. –1964. –Bd. 3. –S. 211–226.

189. *Stroock D. W.* Probability Theory. An analytic view. –Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

190. *Thorisson H.* Coupling, Stationarity, and Regeneration. –Berlin: Springer, 2000.

191. *Tong H.* Nonlinear Time Series. A Dynamical System Approach. –Oxford: Clarendon Press, 1990.

192. *Todorovic P.* An Introduction to Stochastic Processes and Their Applications. –New York: Springer-Verlag, 1992.

193. *Van der Vaart A. W., Wellner J. A.* Weak Convergence and Empirical Processes. –New York: Springer-Verlag, 1996

194. *Varadhan S. R. S.* Large Deviations and Applications, –Philadelphia, PA: Soc. for Industrial and Appl. Math., 1984.

195. *Walsh J. B.* Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane–Lect. Notes Math. V. 1215. –1986.

196. *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations. –Lect. Notes Math. V. 1180. –Berlin: Springer-Verlag, 1985. –p. 265–439.

197. *Williams D.* Probability and Martingales. –Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

198. *Yu H.* A Strong invariance principle for associated sequences // Ann. Probab. –1996. –V. 24, No 4. –p. 2079–2097.

索　引

(B,S)–价格过程, 124
(x,f,N)–对冲, 127
λ–系, 4
Ω 的分割, 168
π–系, 4
σ–代数,
　　$\mathscr{E}\sim$ 分离 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2\sim$, 201
　　$\sim$ 的不变集合, 248
　　Borel $\sim$, 3
　　可料 $\sim$, 272
　　可选 $\sim$, 272
　　停时 $\sim$, 67
　　在 $\sim$ 上测度 P 的扩张, 5
　　置换事件 $\sim$, 121
　　柱集 $\sim$, 13
σ–代数流, 64
σ–有限测度, 11
ε–熵 (集), 59
ε–网, 59
$\mathscr{D}$–系, 4
$\mathscr{F}$–可测性, 3
$\mathscr{F}|\mathscr{B}$–可测映射, 3
L–调和扩张, 333
L^2–过程, 40
　　复数值 $\sim$, 211
P–零集类, 5
Q–解, 198
$\mathbb{R}^m$ 中最简单的对称随机游动, 54
U–统计, 118
X–调和的函数, 334

A

Aleksandrov 的定理, 129
Araka 的例子, 158
arcsin 律, 83
Aronszajn 的定理, 42
Arzela–Ascoli 定理, 135
按过程 $M\in\mathscr{M}_2^c$ 构造积分的纲要, 277

B

Bachelier 推论, 75
Banach–Alaoglu 的定理, 295
Barlow (巴洛), 283
Bartlett 估计, 224
Birkhoff–Khinchin 定理, 249
Black–Merton–Scholes 模型, 286
Black–Scholes 公式, 287
Blackwell 的定理, 30
Blackwell 与 Dubins 的定理, 122
Bochner–Khinchin 的定理, 219
Borel 空间, 15
Borel σ–代数, 3
Borel–Cantelli 引理, 48
Borovkov 的定理, 158
Brown 桥, 143, 281
Brown 运动, 37, 315

～ 在 0 点的局部时, 280
Levy 的 ～, 90
多维 ～, 38
多重分形 ～, 275
分形 ～, 274, 275
分形 (分数)～, 89
几何 ～, 278
经济 ～, 278
Brown 运动的性质, 315, 318
Brown 运动族, 315, 318
Burkholder 的定理, 117
Burkholder–Davis–Gundy 的定理, 118
白噪声, 220, 242, 243
分数 ～, 194
半随机矩阵, 197
半鞅, 124
保守链, 183
保险数学中的基本结果, 113
变列, 142
遍历过程, 249
遍历性定理, 176
标值随机点过程, 194
标准齐次马氏链, 180
波动性, 278
补偿元, 99
不变测度, 180
不变集合, 248
不规则的边界点, 330
不依赖于 σ–代数的随机函数, 64
部分和过程, 11

C

Cameron–Martin 空间, 341
Cauchy–Bunyakovskii 不等式, 308
Chung–Fuks 随机常返准则, 52
Cox 过程, 194
Cramer (克拉默), 230, 245
Cramer 的定理, 220, 336
Cramer–Luenberger 保险模型, 10
Cramer–Wold 方法, 150
Crarke (克拉尔科), 276
测度, 3
测度 μ 相对于测度 ν 的密度, 17
测度 Q 投影相容性条件, 23
测度 Q 相对于测度 P 局部绝对连续, 94
测度的决定类, 149
测度的扩张, 5
测度的弱收敛, 128
测度的特征泛函, 150
测度的特征函数, 16
测度的正则性, 5
测度的支撑, 53
常返集, 52
初始分布, 169
“穿越” 水平 t 的量, 193
传输系数, 248
纯非确定性过程, 226
纯离散随机过程, 55
纯灭过程, 199
纯生过程, 199
从属条件, 229

D

Dali 的结果, 60
Daniell 定理, 15
Daniell–Kolmogorov 定理, 15
Davis (戴维斯), 82
De la Vallee Poussin 定理, 83
Dirichlet 类, 277
Dirichlet 随机问题, 333
Dirichlet 问题, 325
Donsker–Prokhorov 不变原理, 137
Doob (杜布), 276
Doob 的定理, 52, 96, 104, 106, 117, 151
Doob 分解, 96
Doob 关于穿越次数的引理, 105
Doob 推论, 114
Doob 自由选择定理或停止定理, 100
Doob–Meyer 分解, 96

Dvoretzky (德沃里茨基), 64
Dynkin 公式, 332
大偏差, 336
大数定律, 217
带拒绝系统, 188
带状滤波器, 248
导入测度, 12
倒向鞅 (倒向下鞅, 倒向上鞅), 118
等待时间的悖论, 193
等价的过程, 23
递降 σ–代数族, 118
点随机测度, 193
电报信号 (电报波), 192, 240
逗留状态, 196
独立随机变量, 9
独立增量过程, 34, 165
对测度 Q 可有限逼近的集合类, 28
对称稳定分布, 53
对称向量, 305
对称性和相容性条件, 15～17
对冲, 126
对冲策略, 126
对数似然比, 54
对正交随机测度的积分, 207
多维 Brown 运动, 38
多维情况的 Glivenko–Cantelli 定理, 29
多维中心极限定理, 138
多指标鞅, 124
多重分形 Brown 运动, 275

E

Erdös (爱尔迪希), 64
Erdös-Renyi 法则的类比, 58
Erlang 公式, 188
Etemund (埃杰曼德), 121
二次变差, 99

F

Fejér 核, 223
Feller (费勒), 198
Feller 的定理, 303
Feller 时齐马氏族, 319
Fernik (费尔尼科), 61
Feynman–Kac 公式, 334
Fock (福克), 199
Fredholm 算子, 235
反射过程, 71
反射原理, 70
方差 (协方差) 矩阵, 138
非负定复函数, 40
非负定矩阵, 38
非负定实函数, 39
非正常解, 197
分布的步长, 30
分数 (分形) Brown 运动, 89
分数白噪声, 194
分数噪声场, 240
分形 Brown 运动的表示, 274
风险 (资产) 价格, 124
负载系数, 190
复数值 L^2–过程, 211

G

Galton–Watson 分支过程, 108
Garsia (加尔斯亚), 249
Gauss 实随机函数, 39
Gauss 实随机函数有界性的必要与充分条件, 61
Gauss 随机函数, 38
Gauss (正态) 随机向量, 38
Girsanov 的定理, 284, 344
Grawersen–Pechker–Shiryayev 的定理, 276
Guboshkin 的定理, 241
概率测度, 3
概率空间, 3
～ 的标准扩张, 25
～ 的扩张, 25
概率空间的标准扩张, 25
革新过程, 231, 245
根据半群的生成元来恢复半群, 197

根据变差定义的距离, 156
更新过程, 10
更新函数, 30
更新理论的基本定理, 30
构造测度, 204, 217, 244
关于常返性的定理, 53
关于单调类的定理, 4
关于二分法的定理, 52
关于市场是完全的定理, 126
广义二阶导数, 246
广义反函数, 27
广义平稳过程, 215
广义下随机等价的过程, 24
规则的边界点, 330
规则过程, 226
轨道, 8
轨道具有有界变差的随机过程, 124
过程的均方连续性, 219
过程的修正, 23
过程的占位 (随机) 测度, 52
过程修正, 23
过程在固定点有跳跃, 57

H

Haar 函数, 46
Hahn–Banach 定理, 341
Hardy 的结果, 81
Hardy 函数类 $\mathscr{H}_2$, 233
Harst 参数, 89
Hartman–Wintner 定理, 353
Hellinger (黑林格), 156
Herglotz 的定理, 216
Hilbert 空间的再生核, 42
Hilbert–Schmidt 定理, 236
Hilbert–Schmidt 算子, 236
Hwitt–Savage “0–1” 律, 121
函数 $p_{ij}(s,t)$ 的延拓, 169
滑动平均过程, 221
混合矩, 215

I

Ionescu 定理, 293
Ito (伊藤), 276
Ito 定理, 281
Ito 公式, 260
Ito 过程, 260
Ito 随机积分, 256
Ito, Crarke 的定理, 275

J

积分算子的核, 236
基本方程, 287
基本柱集, 12
极大 L^p–不等式, 104
极大不等式, 139
极大与极小概率不等式, 104
集合的非负定矩阵函数, 244
集合的示性函数, 6
几何 Brown 运动, 278
几何平均 $G(v)$, 233
计数测度, 28
简单函数, 6, 207, 273
简明的随机积分, 274
渐近无穷小条件, 299
解的弱唯一性, 282
金融数学的基本定理, 125
紧集上一致收敛拓扑, 153
经济的 Brown 运动, 278
经验测度, 142
经验分布函数, 28
局部的偏流, 278
局部紧 Hausdorff 空间, 153
局部时 (Levy) Brown 运动, 280
局部鞅 (局部上鞅, 局部下鞅), 123
局部有限测度, 36
局部重对数律, 79
矩形, 13
矩阵形式的 Riccati 微分方程, 286
具有常数强度的标准 Poisson 过程, 36
具有初始条件的随机微分方程, 264

具有平稳增量的随机过程, 89
均方协方差, 280
均方意义下的微分运算, 246

K

Kakutani (角谷静夫), 64
Kakutani–Hellinger 距离, 156
Karhunen 的定理, 212
Karhunen–Loéve 的定理, 237
Kato (加藤敏夫), 198
Khinchin 的定理, 82
Khinchin 的结果, 76
Khinchin 的重对数律, 76
Khinchin 公式, 56
Khinchin 和 Marcinkiewicz–Zygmund 不等式, 117
Ki Fan 距离, 157
Kolmogorov (柯尔莫戈洛夫), 246, 275
Kolmogorov 的定理, 15, 58~59, 142, 233
Kolmogorov 的结果, 73
Kolmogorov 强大数定律, 121
Kolmogorov (拟合优度) 检验, 142
Kolmogorov “0–1” 律, 73
Kolmogorov–Chapman 方程, 172, 175
Kolmogorov–Petrovskii–Erdös–Feller 积分准测, 353
Kolmogorov–Szego 的定理, 233
Komlos (科姆咯斯), 155
Kotelnikov–Shannon 的定理, 245
Krickeberg 分解, 116
Kuznetsov (库兹涅佐夫), 173
可测的随机过程, 25
可测空间, 3
可测空间的同构, 15
可达集, 52
可分随机过程, 32
可料 σ–代数, 272
可料过程, 272
可料序列, 95
可选 σ–代数, 272
可选过程, 272
可选时, 111
可选随机测度
可置换的随机变量, 118
空间 $C(T,S)$, 21
控制测度, 156
扩散, 278
扩张的 σ–代数, 5

L

Langevin 方程, 261
Lebesgue 积分变量替换公式, 16
Lederman (列杰尔曼), 198
Leiderman–Reuter 的定理, 199
Levy 的 Brown(实) 函数, 90
Levy 的定理, 55, 110, 282
Levy 的结果, 75
Levy 定理的倒向序列, 120
Levy 公式, 56
Levy 过程, 57
Levy 鞅, 95, 165
Levy–Khinchin 公式, 57
Levy–Shimberg 随机场, 90
Levy–Skorokhod 距离, 148
Lindberg 条件, 137
Lindeberg 函数, 299
Lipschitz 条件, 264
Lomnicki–Ulam 的定理, 9
Lyapunov 分数, 158
离散化, 8
连续模, 135
连续柱集, 21
滤波理论, 285
滤波器, 221, 247
    Kalman–Bucy~, 285
滤化的概率空间, 93
滤化的随机实验, 93
滤基, 64

M
Major (马哲尔), 155
Mandelbrot (芒德布罗), 275
Mandelbrot–Van Ness 的定理, 275
Markov 方程, 168
Markov 时, 65
Mercer 的定理, 237
马氏过程, 161, 164
马氏链, 167
马氏链有限维分布, 169
马氏随机函数, 201
马氏转移过程, 172
马氏转移函数, 172
马氏族, 200
脉冲, 247
脉冲转移函数, 247
没有重复点的随机点测度, 193
迷向场, 244
迷向随机场, 244

N
Novikov 条件, 283
拟鞅, 124
逆变换公式, 16

O
Ornstein–Uhlenbeck 随机过程, 91, 263
Ottaviani 不等式, 55
耦合方法, 157

P
Paley–Weiner–Zygmund 的定理, 62
Parseval 等式, 47, 308
Parzen 的定理, 44
Planck (普朗克), 199
Poisson 定理, 156
Poisson 过程, 36, 170
Poisson 过程的显式构造, 36
Poisson 随机测度, 12, 30
Poisson 随机测度, 52
Polish 空间, 15
Polya 准则, 54
Prokhorov 的定理, 135, 137, 153
Protter–Follmer–Shiryayev 的定理, 280
频率特征, 248
平方可积鞅, 99
平均常返集, 52
平稳 (广义) 随机过程的谱表示, 217
平稳分布, 179
破产问题, 103
谱测度, 216
谱窗口, 224
谱密度, 219
谱密度的渐近无偏估计, 224
谱密度的平滑化估计, 224
谱密度的统计估计, 222

Q
期权, 126
　　买入 ~ (看涨 ~), 127
　　卖出 ~ (看跌 ~), 127
　　美式 ~, 126
　　欧氏 ~, 126
期权的公平价格, 127
齐次 (时齐) 马氏过程, 175
奇异测度, 156
奇异过程, 226
强不变原理, 154
强解, 262, 264
强解的唯一性, 264
强马氏性, 68
确定性的, 226
确定性的过程, 226
群体增长的随机干扰方程, 278
群众服务系统, 188

R
Radon 测度, 193
Radon–Nikodym 导数, 156
Radon–Nikodym 定理, 92

Reuter (饶太尔), 198
Riemann 序列, 280
Riesz 分解, 116
Riesz 引理, 341
Riesz–Markov 定理, 294
弱解, 282
(弱) 收敛的决定类, 149

S

Samuelson (萨谬尔森), 278
Schauder 函数, 47
Scheffe 的定理, 156
Skorokhod 的定理, 88, 145
Skorokhod 空间 $D([0,\infty)]$, 56
Skorokhod 空间 $D([0,1])$, 28
Skorokhod 空间 $D([0,1]^q)$ 和 $D([0,\infty)^q)$, 153
Stone 的定理, 245
Strassen 的定理, 155, 157, 349, 353
Strassen 形式的重对数泛函的定律, 348
Stratonovich 积分, 284
上调和函数, 116
上函数, 353
时齐的迷向向量场, 244
时齐扩散, 281
实 Gauss 随机函数连续性的充分必要条件, 61
实 Gauss 随机函数有界性的充分必要条件, 61
实现, 8
适应的过程, 272
首次到达集合的时刻, 82
首次离开集合的时刻, 82
疏伐过程, 195
速度, 337
算术平均 $A(v)$, 233
随机半群, 175
随机变量, 3
随机变量上的推移算子, 322
随机测度, 159
随机场, 8, 242
    Ornstein–Uhlenbeck ～, 91
    Wiener–Chenzov ～, 90
随机等价的过程, 23
随机点测度, 193
随机点过程, 159, 193
随机分形维数, 274
随机过程, 8
    离散时间 ～, 8
随机过程的二次变差, 99
随机过程的均方积分, 247
随机函数, 8
随机积分的基本性质, 210
随机基, 93
随机连续的随机过程, 32
随机幂, 124
随机区间, 272
随机微分, 259
随机微分方程 (强) 解的马氏性, 270
(随机) 无区别的过程, 24
(随机) 无区别的随机过程, 24
随机向量, 3
随机向量的特征函数, 17
随机序列, 8, 100
随机游动, 10
    $\mathbb{R}^m$ 中最简单的对称 ～, 54
    ～ 的对称化, 53
    ～ 的有效维数, 53
    常返的 ～, 52
    非常返的 ～, 52
    在随机介质中的 ～, 54
    暂留的 ～, 52
随机游动的对称化, 53
随机游动的有效维数, 53
随机元, 3
随机元的概率分布, 7

T

Talagran (塔拉格兰), 61

Tannaka 公式, 281
Tannaka 公式的离散变式, 98, 99
Tushnady (塔什纳迪), 155
胎紧的测度族, 135
套利策略子类, 125
套期保值, 287
条件数学期望, 92
条件数学期望的 “望远镜” 性质, 93
条件数学期望的局部性质, 99
停时, 65
“停时的” 过程, 274
通常化条件, 123
投资策略, 125
投资组合, 125
推移算子, 248

U

Ulam 引理, 149

V

Van Ness (范讷斯), 275
Varadhan (瓦拉特汗), 297
Varadhan 引理, 338

W

Wald 第一恒等式, 84
Wald 统计序列分析, 54
Wiener 测度, 50
Weiner 过程, 37
　　~ 的马氏性, 64
　　~ 的显式结构, 46
Wiener 螺线, 275
Wiener–Chenzov 随机场, 90
Wiener–Paley 的结果, 80
Wold 分解, 229, 232
微信号, 124
维数为 m 的 Bessel 过程, 118
未定权益, 126
未定权益的投资价值, 127
无风险 (资产) 价格, 124
无穷可分分布, 306
无穷小矩阵, 183
无穷小条件, 158
物理上可实现的滤波器, 221

X

吸引状态, 196
狭义平稳过程, 179, 248, 274
下半连续性, 337
下函数, 353
下坐标的 Levy 过程, 57
线性预测, 225
线性预测误差, 225
相对于测度 ν 绝对连续的测度 μ, 16
相空间, 167
向量值过程, 242
协方差函数, 40, 211
循序可测, 272

Y

鞅, 93
鞅变换, 95
鞅测度, 125
鞅差, 94
鞅的二次 (平方) 特征, 99
样本函数, 8
一致距离, 21
一致可积的随机变量族, 83
一致强大数定律, 29
一致椭圆算子, 334
一致无穷小条件, 306
依分布收敛, 131
已知椭率空间的完全化, 5
以坐标形式给定的过程, 22
银行账户, 124
优越的概率测度, 60
由 “过去” 和 “将来” 产生的事件, 161
有限维分布, 14
右连左极 (càdlàg) 函数, 56
与齐次马氏链伴随的标准半群, 180

Z

Zwonkin 的结果, 282
在 $L^2(\Omega)$ 中过程 X 的遍历性, 218
在固定点有跳跃的随机过程, 57
在平稳状况下被拒绝的概率, 190
在随机介质中的随机游动, 54
暂留的 (非常返的) 随机游动, 52
正常解, 197
正定 (非负定) 矩阵函数, 242
正定矩阵函数, 242
正交的增量, 234
正交随机测度, 204
正态偏差, 336
正态随机向量, 38
正则条件概率, 173
直接给定的过程, 22
指数胎紧的测度族, 338
周期图, 223
柱, 19
柱集 $\sigma-$代数, 13, 21
柱集代数, 19
转移概率, 168
转移概率的强度, 196
转移函数, 172
转移图解, 186
状态空间, 167
子集的半环, 203
自动模式性质, 52
自回归滑动平均过程, 248
自然 $\sigma-$代数流, 64
自融资 (自筹) 策略类, 125
自相似随机过程, 274
最末离开集合的时刻, 82
最小的 $\varepsilon-$网, 59
坐标映射, 13

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝随机过程论
作者＝Ａ．Ｂ．布林斯基，Ａ．Ｈ．施利亚耶夫著
页数＝３７６
ＳＳ号＝１１９６５６３２
出版日期＝２００８．１

前言
目录
第一章　随机过程．随机过程的分布
第二章　独立增量过程．泊松过程和高斯过程
第三章　布朗运动．轨道性质
第四章　鞅．离散与连续时间
第五章　测度的弱收敛．不变原理
第六章　马尔可夫过程．离散与连续时间
第七章　平稳过程．离散与连续时间
第八章　随机积分．随机微分方程
附录 1　柯尔莫戈洛夫定理的证明
附录 2　普罗霍洛夫定理的证明
附录 3　林德伯格 - 杜布定理的证明
附录 4　博赫纳 - 辛钦定理的证明
附录 5　柯尔莫戈洛夫 - 塞格定理的证明
附录 6　布朗运动族的强马氏性的证明
附录 7　狄利克雷问题的概率解
附录 8　大偏差
后记
参考文献
索引